TOR VERGATA
UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI ROMA

Macroarea di Scienze MMFFNN
Dipartimento di Matematica

Incontri di formazione in
didattica della matematica e della fisica
24 settembre 2025

Dal *metodo di adequazione* al calcolo differenziale. Un laboratorio sui testi originali

Cristina Sironi – Università di Roma 'Tor Vergata'

Laura Lamberti – Liceo Scientifico 'Augusto Righi' di Roma

L'importanza della storia nella didattica della matematica

«In any treatise or higher text-book **it is always desirable that references to the original memoirs should be given**, and, if possible, short historic notices also. I am sure that no subject loses more than mathematics by any attempt to dissociate it from its history.»

J. W. L. Glaisher (1890)

«All'inizio l'aritmetica e la geometria erano unite, poi fu necessario dividerle. Ma **la cosa più semplice e naturale è l'origine delle cose**: come dico sempre, **il bambino deve avere l'origine delle cose perché l'origine è più chiara e naturale per la sua mente. Noi non dobbiamo far altro che trovare un materiale che renda l'origine accessibile**.»

M. Montessori, 5 maggio 1931, conferenza n. 31

«Se l'allievo deve partecipare in modo attivo a questo studio, **non si può dargli definizioni e regole senza spiegazione, come doni piovuti dal cielo, di cui poi quegli che riceve il dono non saprebbe servirsi**. [...] **La storia della scienza viene qui in soccorso**, mostrandoci come le verità aritmetiche siano state riconosciute dai Pitagorici mediante modelli geometrici dei numeri, quali sono i numeri figurati: numeri quadrati e rettangolari, numeri triangolari, etc»

F. Enriques 1934, "Prefazione" in Enriques, A., Aritmetica ad uso delle scuole medie inferiori, pp. IX-XI.

La *Storia della Matematica* nelle indicazioni nazionali

Ministero dell'istruzione, dell'università e della ricerca

Schema di regolamento recante "Indicazioni nazionali riguardanti gli obiettivi specifici di apprendimento concernenti le attività e gli insegnamenti compresi nei piani degli studi previsti per i percorsi liceali di cui all'articolo 10, comma 3, del decreto del Presidente della Repubblica 15 marzo 2010, n. 89, in relazione all'articolo 2, commi 1 e 3, del medesimo regolamento."

«Al termine del percorso del liceo […] lo studente conoscerà i concetti e i metodi elementari della matematica, sia interni alla disciplina in sé considerata, sia rilevanti per la descrizione e la previsione di semplici fenomeni, in particolare del mondo fisico. ***Egli saprà inquadrare le varie teorie matematiche studiate nel contesto storico entro cui si sono sviluppate e ne comprenderà il significato concettuale.***
Lo studente avrà acquisito una visione storico-critica dei rapporti tra le tematiche principali del pensiero matematico e il contesto filosofico, scientifico e tecnologico. *In particolare, avrà acquisito il senso e la portata dei tre principali momenti che caratterizzano la formazione del pensiero matematico: la matematica nella civiltà greca, il calcolo infinitesimale che nasce con la rivoluzione scientifica del Seicento e che porta alla matematizzazione del mondo fisico, la svolta che prende le mosse dal razionalismo illuministico e che conduce alla formazione della matematica moderna e a un nuovo processo di matematizzazione che investe nuovi campi (tecnologia, scienze sociali, economiche, biologiche) e che ha cambiato il volto della conoscenza scientifica.»*

Il ruolo della *Storia della Matematica* nella didattica

- La *Storia della Matematica* come **fine**: la conoscenza dello sviluppo e dell'evolversi delle teorie matematiche ha una valenza intrinseca.
- La *Storia della Matematica* come **strumento**: in questa prospettiva, sarebbe vista come un supporto a livello motivazionale e cognitivo per l'insegnamento di concetti particolari.

Jankvist, Uffe Thomas. 2007. « On empirical research in the field of using history in mathematics education ». *Nordic Studies in Mathematics Education,* vol. 12, no 3, pp. 83-105.

Nei libri di testo

Frazioni magiche

STORIA DELLA MATEMATICA

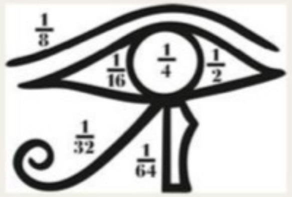
Tra racconti mitologici ed esigenze pratiche, le frazioni fanno la loro comparsa fin dai tempi dell'antico Egitto, dove si credeva che avessero anche poteri magici.

Secondo la mitologia egizia, Seth uccise il fratello Osiride, re d'Egitto, per impossessarsi del regno. Però, una volta fattosi grande, Horus, figlio di Osiride, decise di vendicare la morte del padre e di riprendersi il regno.
Codardamente, Seth cavò un occhio a Horus mentre dormiva e lo ruppe in pezzi. Tuttavia Thot, dio della conoscenza, lo ricostruì e, non trovando uno dei frammenti, lo fabbricò, fornendogli così dei poteri magici. Infatti, Horus riuscì a vincere la battaglia e a regnare proprio grazie al potere di questo occhio.

Tempio di Hathor, particolare, Dendera (Egitto).

Ma che legame c'è tra questa storia e le frazioni nell'antico Egitto?
Gli Egizi usavano soprattutto le frazioni unitarie, cioè del tipo $\frac{1}{n}$ con n numero naturale diverso da 0. L'occhio di Horus, come si vede nella figura a lato, racchiude al suo interno potenze della frazione unitaria $\frac{1}{2}$:

$$\frac{1}{2}=\left(\frac{1}{2}\right)^1,\quad \frac{1}{4}=\left(\frac{1}{2}\right)^2,\quad \frac{1}{8}=\left(\frac{1}{2}\right)^3,$$
$$\frac{1}{16}=\left(\frac{1}{2}\right)^4,\quad \frac{1}{32}=\left(\frac{1}{2}\right)^5,\quad \frac{1}{64}=\left(\frac{1}{2}\right)^6.$$



Queste potenze di $\frac{1}{2}$ costituivano i sottomultipli dell'*hekat*, l'unità di misura usata, all'epoca, per misurare le quantità di materiali secchi come il grano. E, per annotare questi sottomultipli, si impiegavano i geroglifici raffiguranti le parti dell'occhio di Horus.

► Somma le frazioni che vedi nella figura dell'occhio di Horus. Quale frazione Thot dovette «fabbricare» per arrivare all'occhio intero?

Bergamini, Barozzi, *Matematica multimediale.blu, Volume 1*
Zanichelli, 2024.

MATEMATICA E STORIA

► **Alle origini del metodo delle coordinate**

- Perché il metodo delle coordinate è così utile?
- Quali problemi ha consentito di risolvere?
- Com'è nato e come si è sviluppato nel corso del tempo?

Cerca nel Web:
geometria analitica, Dicearco, Descartes, Fermat

Bergamini, Barozzi, Trifone, *Matematica.blu* 2.0, Volume 3, Zanichelli. 2024.

Dalle prime riflessioni allo stato dell'arte

- 1975: nascita in Francia della Commissione inter-IREM «Épistémologie et histoire des mathématiques», dall'Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques.
- Contemporaneamente nasce l'HPM Group (History and Pedagogy of Mathematics) dal secondo ICME (International Congress on Mathematics Education).
- L'introduzione della storia nell'insegnamento della matematica assume il ruolo di una **«terapia contro il dogmatismo, un insieme di strumenti che permettono loro di appropriarsi e padroneggiare il loro sapere: per gli alunni, hanno preparato un ambiente dove la matematica cessa di giocare il ruolo di mostro arido che appiattisce, giudica e condanna, per tornare ad assumere lo statuto di attività culturale indissociabile dalle altre pratiche umane» .**

Evelyne Barbin, *Dix ans d'histoire des mathématiques dans l'IREM*, Bulletin de l'APMEP, 1987, n°358, pp. 175-184.

Secondo la Commissione inter-IREM, la storia della matematica assolve a tre funzioni fondamentali:

- una funzione ***vicariante***,
- una funzione ***dépaysante***,
- una funzione ***culturelle***.

Evelyne Barbin, *Histoire et enseignement des mathématiques: Pourquoi ? Comment ?*, Bulletin AMQ, Vol. XXXVII, n°1 mars 1997, p.21.

Nelle sue applicazioni, l'approccio storico:

- ridona **vitalità** ai temi trattati, attraverso il pensiero e le opere degli scienziati che a essi si sono dedicati;
- permette molteplici **aperture** **interdisciplinari** e **transdisciplinari**;
- dà **unità** alla matematica e approfondisce lo sguardo sulla sua stessa natura, sul **senso** del pensare e fare matematica.

Evelyne Barbin, *Apports de l'Histoire des Mathématiques et de l'Histoire des sciences dans l'enseignement*, Tréma, 26, 2006,

I temi, i materiali e i metodi

Alla luce di queste funzioni, le scelte che si profilano, e che un insegnante è tenuto a compiere, riguardano tanto i temi quanto i materiali e i metodi per una proposta didattica integrata e coerente con il percorso del gruppo di studenti interessato.

Queste scelte guideranno l'adozione di una prospettiva storica e di una riflessione epistemologica.

Il tema

- **Il problema**. Scelta legata alle **difficoltà riconosciute** come ricorrenti tra gli studenti o alle apparenti **discontinuità nella storia** della risoluzione di questioni generali.
- **Lo scienziato**. Approfondire **figure meno popolari**, può contribuire a completare il quadro della nascita e dello sviluppo di un'idea, che non è mai il frutto di un singolo ingegno ma di una comunità scientifica che ha lavorato grazie ai contributi di tutti i suoi membri.
- **Il dibattito scientifico**. I processi creativi nell'ambito di una teoria o della sua applicazione non possono essere esenti da un grande **travaglio intellettuale** e soprattutto da **errori**.

I materiali

- Vasta scelta di **materiali disponibili in rete**: Bulletin AMQ, Actes des Colloques inter-IREM, https://www.univ-irem.fr/-commissions-inter-irem-.
- Lavoro di ricerca approfondito: **rigore** matematico + rigore storico ed epistemologico.
- Cura nella scelta dei **testi originali**.

I metodi

- Didattica **laboratoriale** in piccoli gruppi e/o in modalità singola.
- Accento sull'attività di **ricerca** individuale o in gruppo.
- Si studia su materiali nuovi, nient'affatto scontati, in **modo nuovo**.

La proposta didattica:

Il *Principio di minima azione* di Maupertuis nella storia della Matematica.

Le caratteristiche della proposta

- Interdisciplinarità
- Autonomia, ricerca e progettualità
- Frequenza volontaria
- Didattica laboratoriale a piccoli gruppi
- Laboratori sui testi originali
- Laboratorio di fisica con materiale povero
- Recupero accelerato di temi affrontati negli anni precedenti

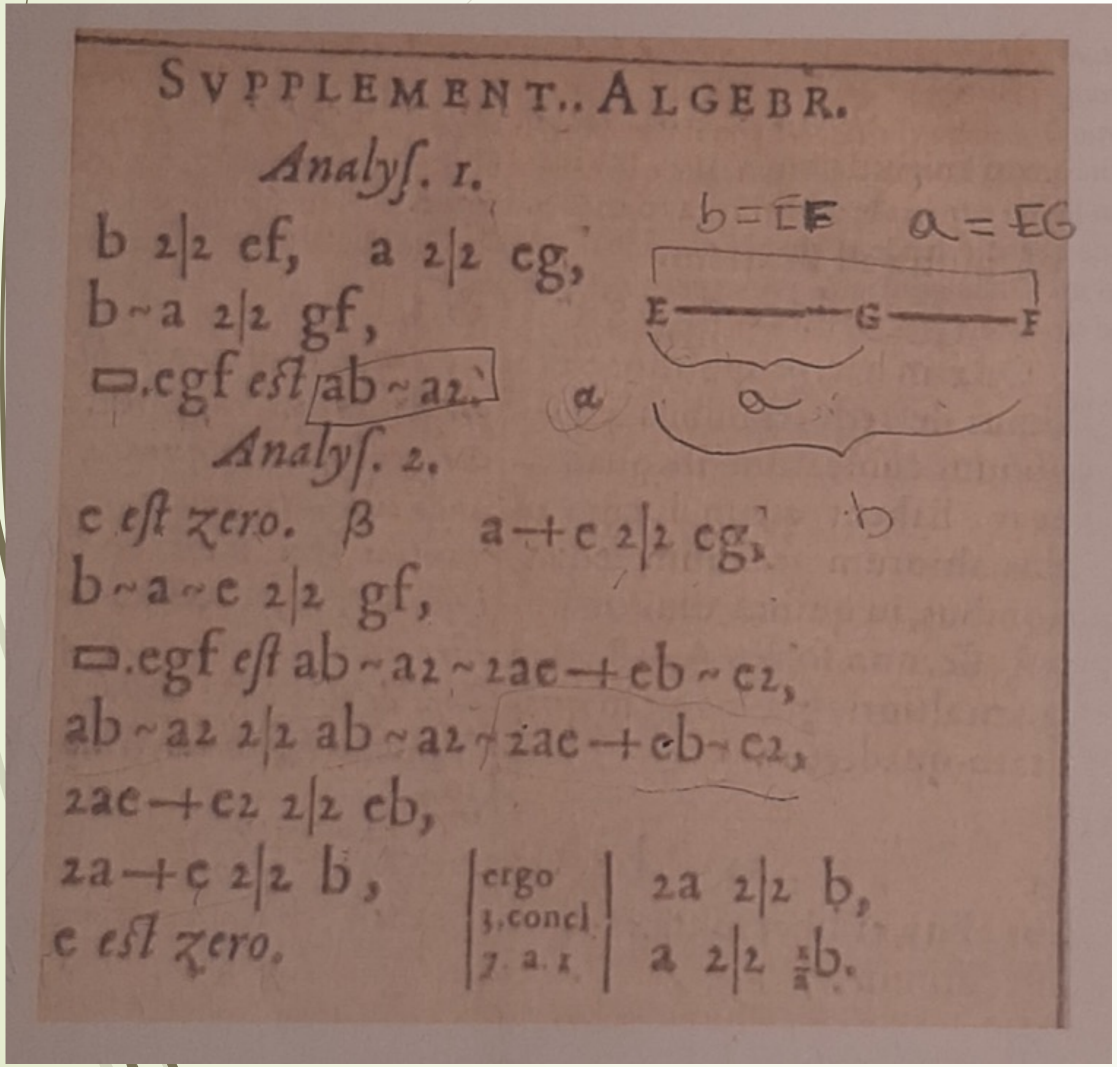
La Storia delle scienze nel progetto proposto

- I temi sono stati affrontati a partire dai **testi originali** delle opere degli scienziati del XVII e XVIII secolo; è stato possibile così esaminare il linguaggio scientifico dell'epoca nonché il formalismo matematico, rilevandone le differenze con quello moderno. Da evitare una lettura anacronistica dei testi.
- Attraverso le fonti storiche si è potuta apprezzare **la genesi di un'idea**, inquadrandola nel panorama storico e culturale dell'epoca.
- L'ambiente scientifico del periodo storico in esame, è caratterizzato da vivaci confronti che coinvolgono gli intellettuali (non solo scienziati) sostenitori di teorie discordanti; queste animate discussioni testimoniano come **l'evoluzione del pensiero scientifico non sia un processo lineare** ad opera di poche menti geniali.

I laboratori sui testi originali

- **Pierre Hérigone, *Supplementum cursus mathematici, continens geometricas aequationum cubicarum purarum, atque affectarum effectiones*, PROPOS. XXVI, 1642**
- **Pierre de Fermat, *Analyse pour les réfractions*, 1657**
- Johann Bernoulli, *Acta Eruditorum*, giugno 1696 e maggio 1697
- Pierre-Louis Moreau de Maupertuis, *Essai de cosmoligie*, 1744
- **Pierre-Louis Moreau de Maupertuis, *Accord de differentes loix de la nature qui avoient jusqu'ici paru incompatibles*, 1744**

Il lavoro degli studenti



SVPPLEMENT.. ALGEBR.

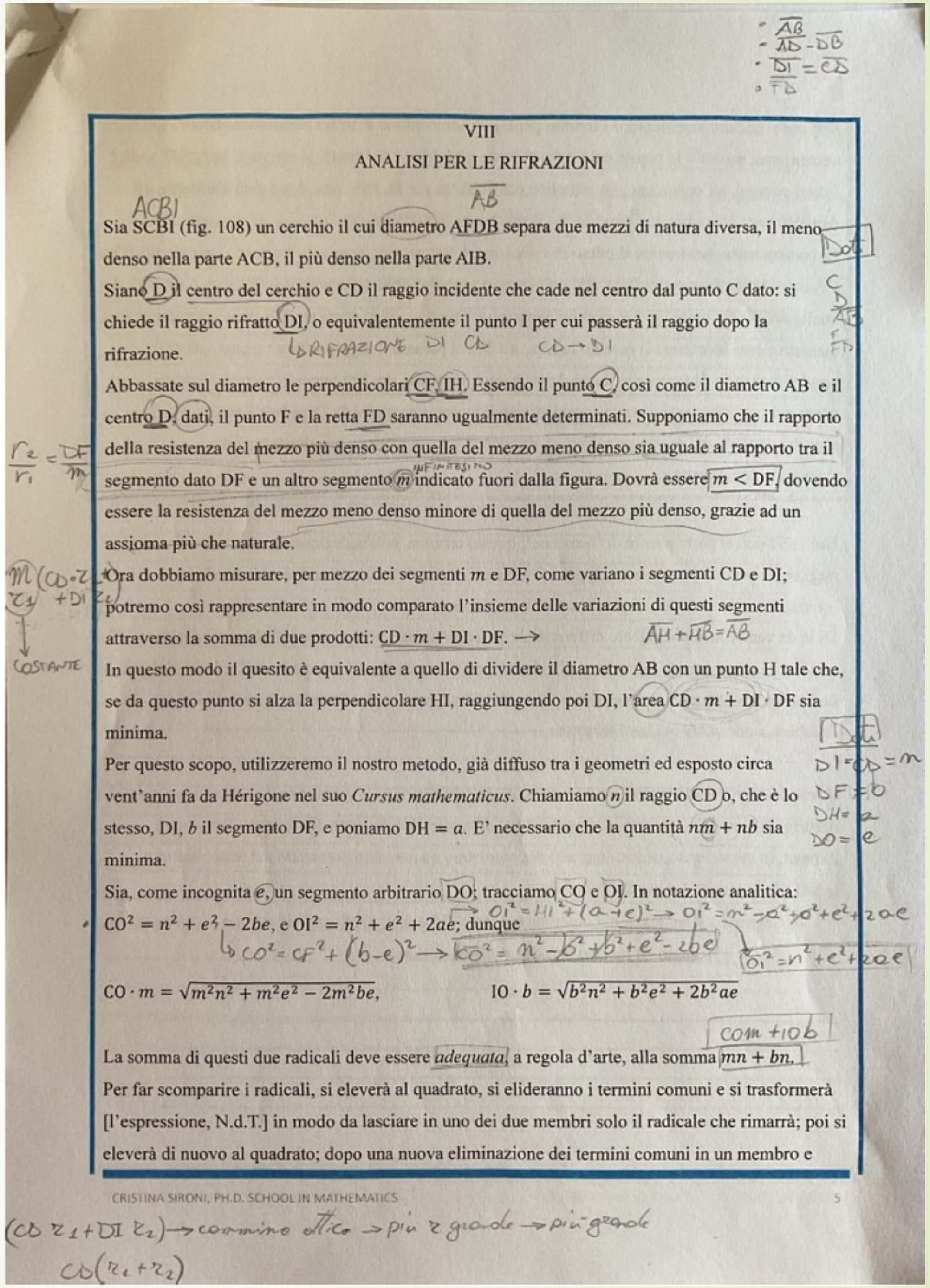
Analys. 1.

b 2|2 ef, a 2|2 cg,
b ~ a 2|2 gf,
□.cgf est ab ~ a2.

Analys. 2.

e est zero. a + e 2|2 cg,
b ~ a ~ e 2|2 gf,
□.egf est ab ~ a2 ~ 2ae + eb ~ e2,
ab ~ a2 2|2 ab ~ a2 ~ 2ae + eb ~ e2,
2ae + e2 2|2 eb,
2a + e 2|2 b,
e est zero.

ergo 3. concl. 7. a. 1 | 2a 2|2 b, a 2|2 ½b.



VIII

ANALISI PER LE RIFRAZIONI

Sia SCBI (fig. 108) un cerchio il cui diametro AFDB separa due mezzi di natura diversa, il meno denso nella parte ACB, il più denso nella parte AIB.

Siano D il centro del cerchio e CD il raggio incidente che cade nel centro dal punto C dato: si chiede il raggio rifratto DI, o equivalentemente il punto I per cui passerà il raggio dopo la rifrazione.

Abbassate sul diametro le perpendicolari CF, IH. Essendo il punto C, così come il diametro AB e il centro D, dati, il punto F e la retta FD saranno ugualmente determinati. Supponiamo che il rapporto della resistenza del mezzo più denso con quella del mezzo meno denso sia uguale al rapporto tra il segmento dato DF e un altro segmento m indicato fuori dalla figura. Dovrà essere $m < \mathrm{DF}$, dovendo essere la resistenza del mezzo meno denso minore di quella del mezzo più denso, grazie ad un assioma più che naturale.

Ora dobbiamo misurare, per mezzo dei segmenti m e DF, come variano i segmenti CD e DI; potremo così rappresentare in modo comparato l'insieme delle variazioni di questi segmenti attraverso la somma di due prodotti: $\mathrm{CD}\cdot m + \mathrm{DI}\cdot\mathrm{DF}$.

In questo modo il quesito è equivalente a quello di dividere il diametro AB con un punto H tale che, se da questo punto si alza la perpendicolare HI, raggiungendo poi DI, l'area $\mathrm{CD}\cdot m + \mathrm{DI}\cdot\mathrm{DF}$ sia minima.

Per questo scopo, utilizzeremo il nostro metodo, già diffuso tra i geometri ed esposto circa vent'anni fa da Hérigone nel suo *Cursus mathematicus*. Chiamiamo n il raggio CD o, che è lo stesso, DI, b il segmento DF, e poniamo $\mathrm{DH} = a$. E' necessario che la quantità $nm + nb$ sia minima.

Sia, come incognita e, un segmento arbitrario DO; tracciamo CO e OI. In notazione analitica:

$\mathrm{CO}^2 = n^2 + e^2 - 2be$, e $\mathrm{OI}^2 = n^2 + e^2 + 2ae$; dunque

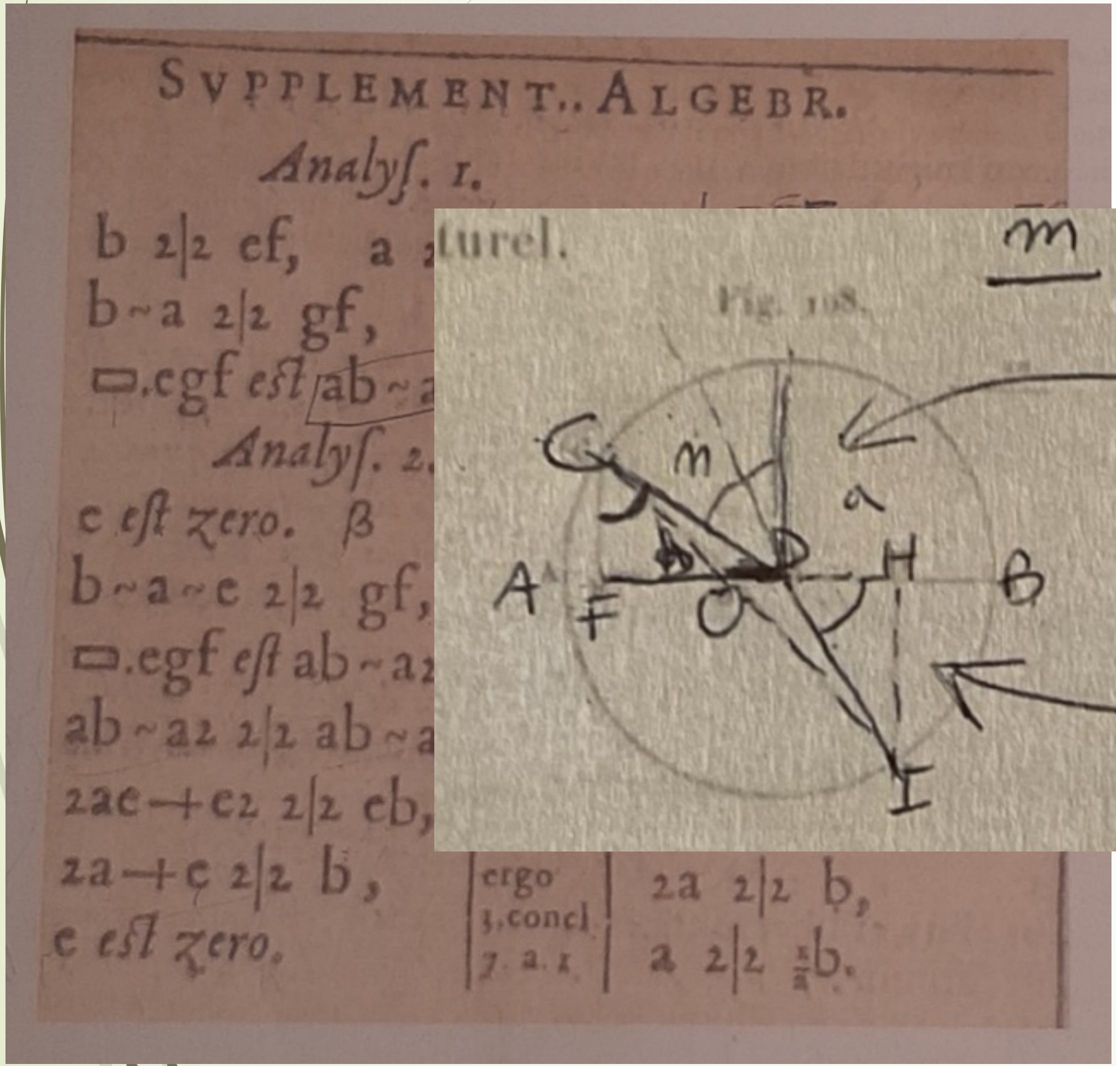
$$\mathrm{CO}\cdot m = \sqrt{m^2n^2 + m^2e^2 - 2m^2be}, \qquad \mathrm{IO}\cdot b = \sqrt{b^2n^2 + b^2e^2 + 2b^2ae}$$

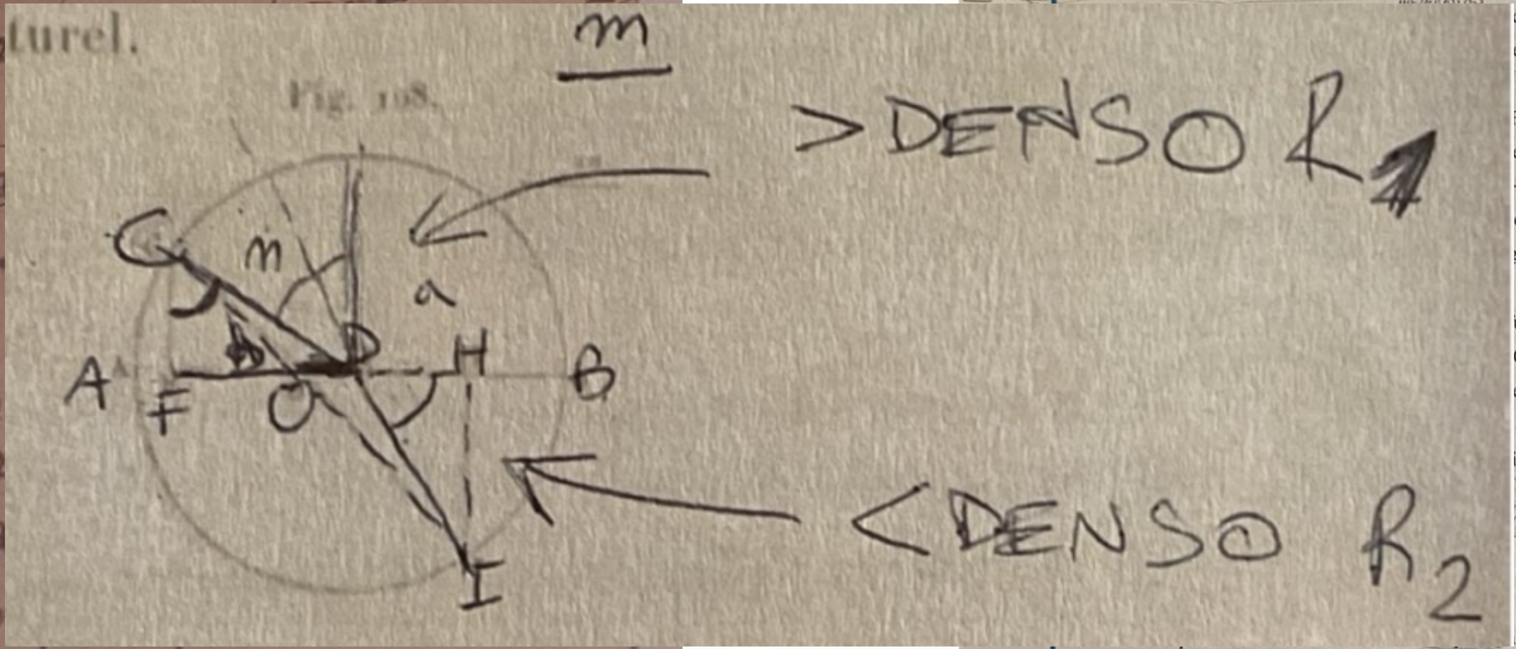
La somma di questi due radicali deve essere *adequata*, a regola d'arte, alla somma $mn + bn$.

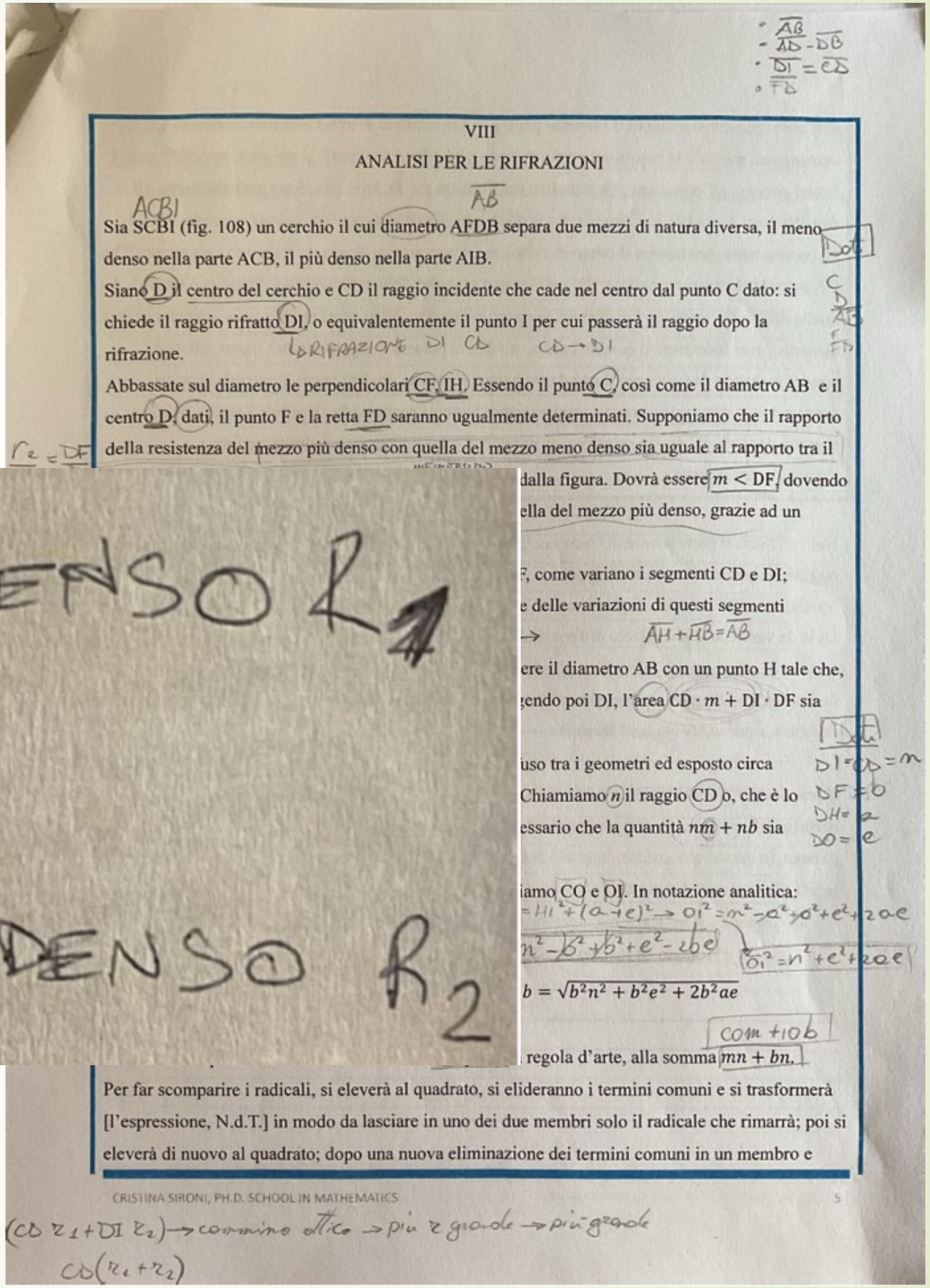
Per far scomparire i radicali, si eleverà al quadrato, si elideranno i termini comuni e si trasformerà [l'espressione, N.d.T.] in modo da lasciare in uno dei due membri solo il radicale che rimarrà; poi si eleverà di nuovo al quadrato; dopo una nuova eliminazione dei termini comuni in un membro e

CRISTINA SIRONI, PH.D. SCHOOL IN MATHEMATICS 5

Il lavoro degli studenti






VIII

ANALISI PER LE RIFRAZIONI

Sia SCBI (fig. 108) un cerchio il cui diametro AFDB separa due mezzi di natura diversa, il meno denso nella parte ACB, il più denso nella parte AIB.

Siano D il centro del cerchio e CD il raggio incidente che cade nel centro dal punto C dato: si chiede il raggio rifratto DI, o equivalentemente il punto I per cui passerà il raggio dopo la rifrazione.

Abbassate sul diametro le perpendicolari CF, IH. Essendo il punto C, così come il diametro AB e il centro D, dati, il punto F e la retta FD saranno ugualmente determinati. Supponiamo che il rapporto della resistenza del mezzo più denso con quella del mezzo meno denso sia uguale al rapporto tra il ... dalla figura. Dovrà essere $m < DF$, dovendo ... ella del mezzo più denso, grazie ad un

... F, come variano i segmenti CD e DI;

... e delle variazioni di questi segmenti

... ere il diametro AB con un punto H tale che, ... gendo poi DI, l'area $CD \cdot m + DI \cdot DF$ sia

... uso tra i geometri ed esposto circa ... Chiamiamo n il raggio CD o, che è lo ... essario che la quantità $nm + nb$ sia

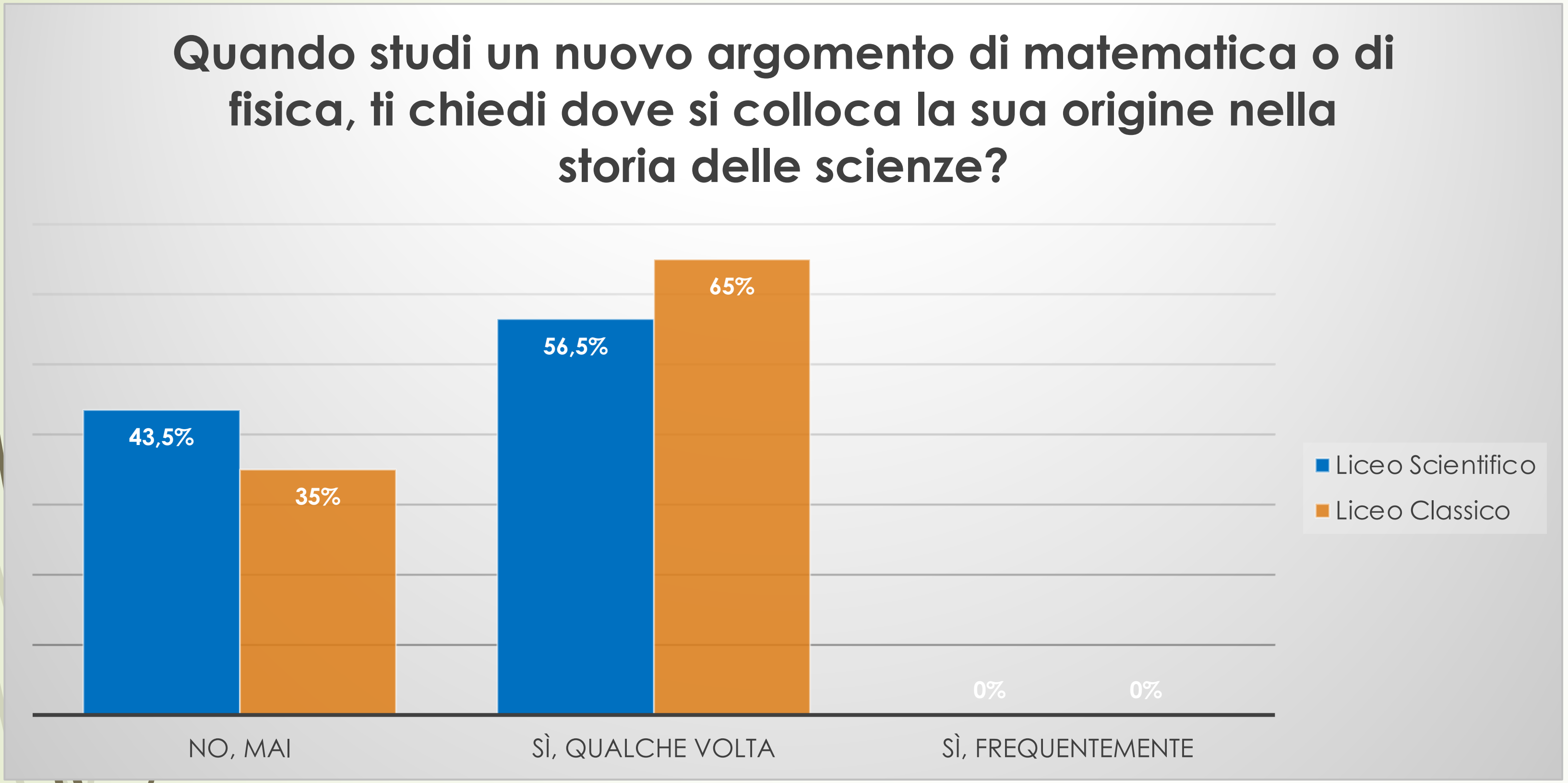
... iamo CO e OI. In notazione analitica:

... $b = \sqrt{b^2n^2 + b^2e^2 + 2b^2ae}$

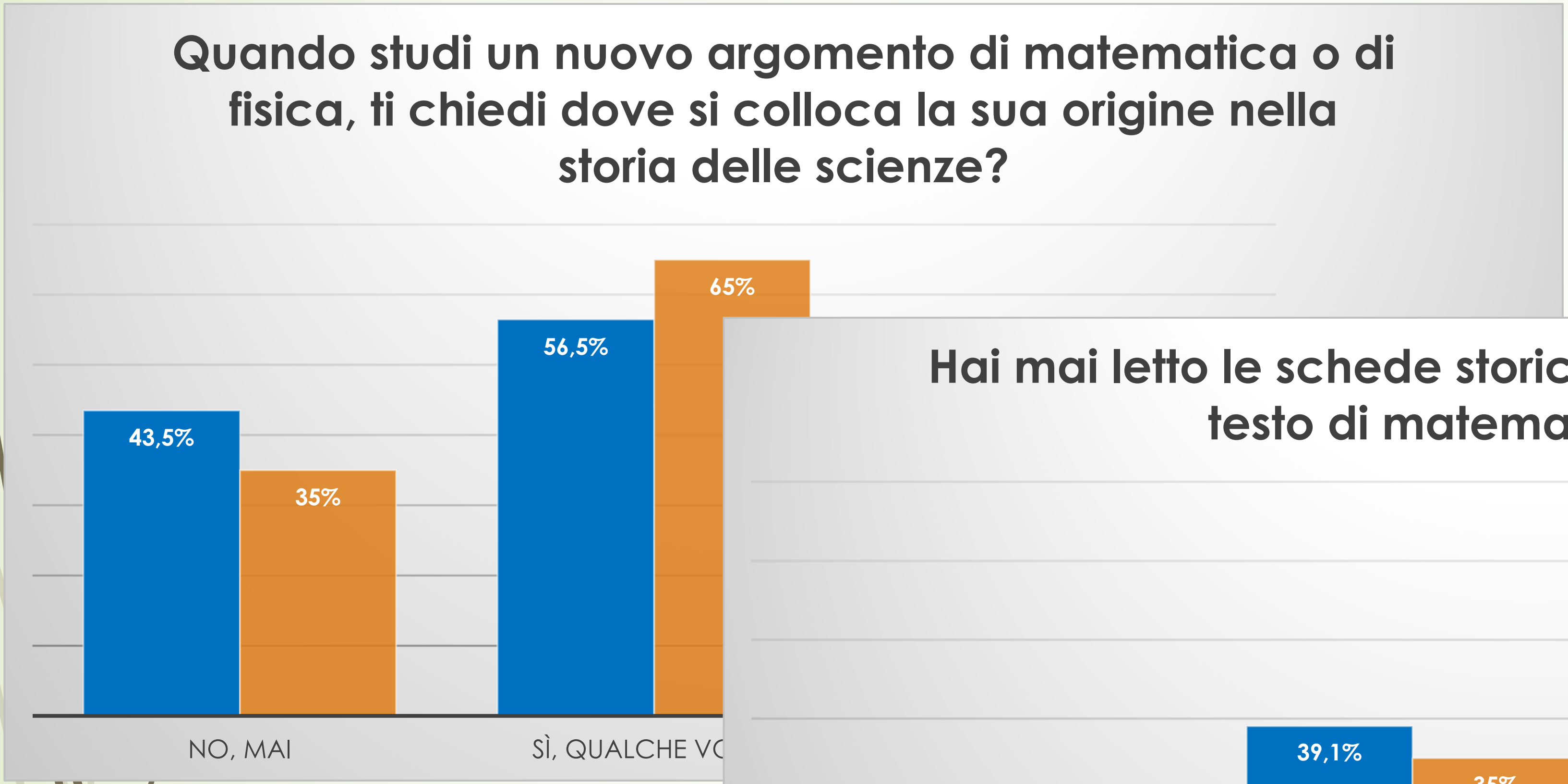
... regola d'arte, alla somma $mn + bn$.

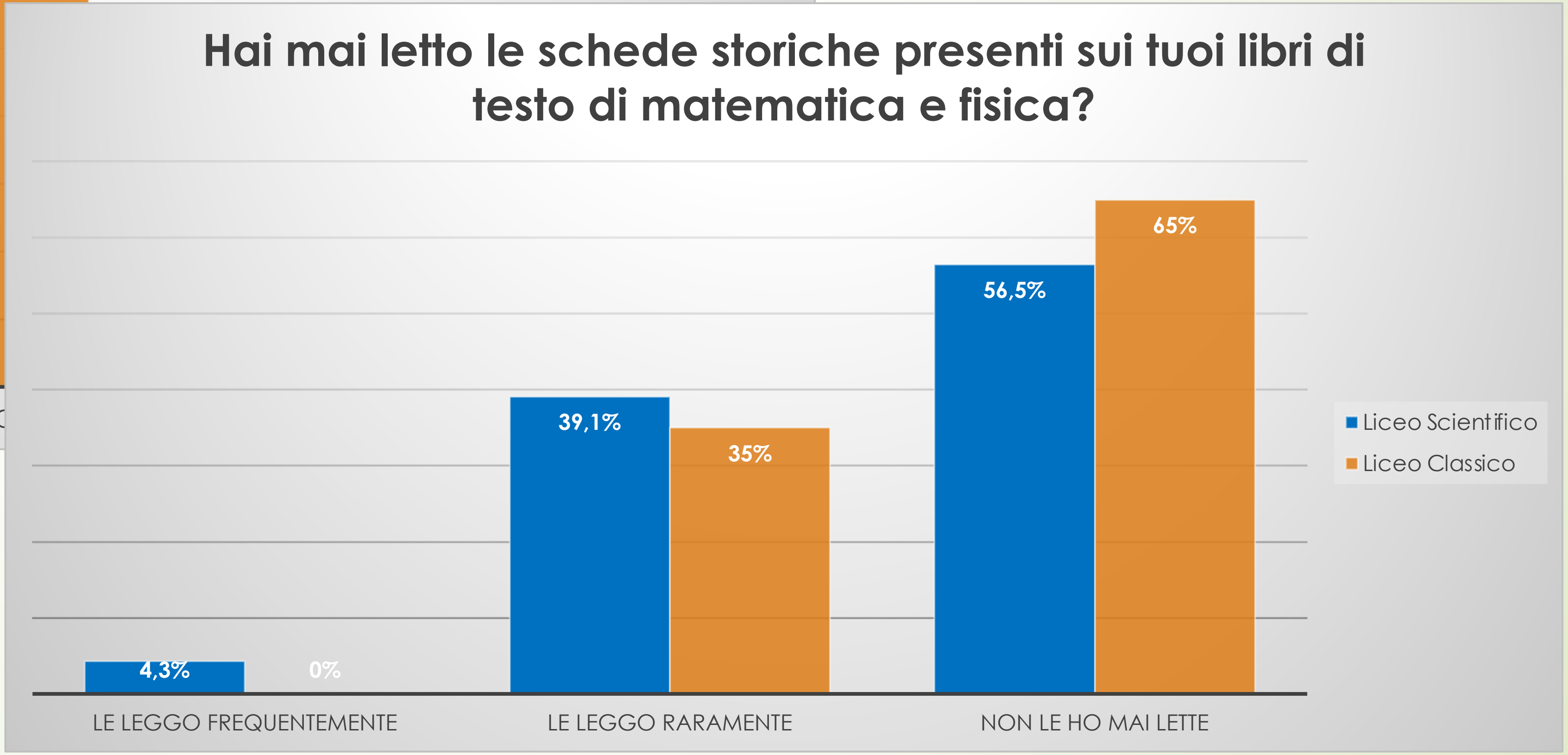
Per far scomparire i radicali, si eleverà al quadrato, si elideranno i termini comuni e si trasformerà [l'espressione, N.d.T.] in modo da lasciare in uno dei due membri solo il radicale che rimarrà; poi si eleverà di nuovo al quadrato; dopo una nuova eliminazione dei termini comuni in un membro e

Il pensiero degli studenti prima dei laboratori

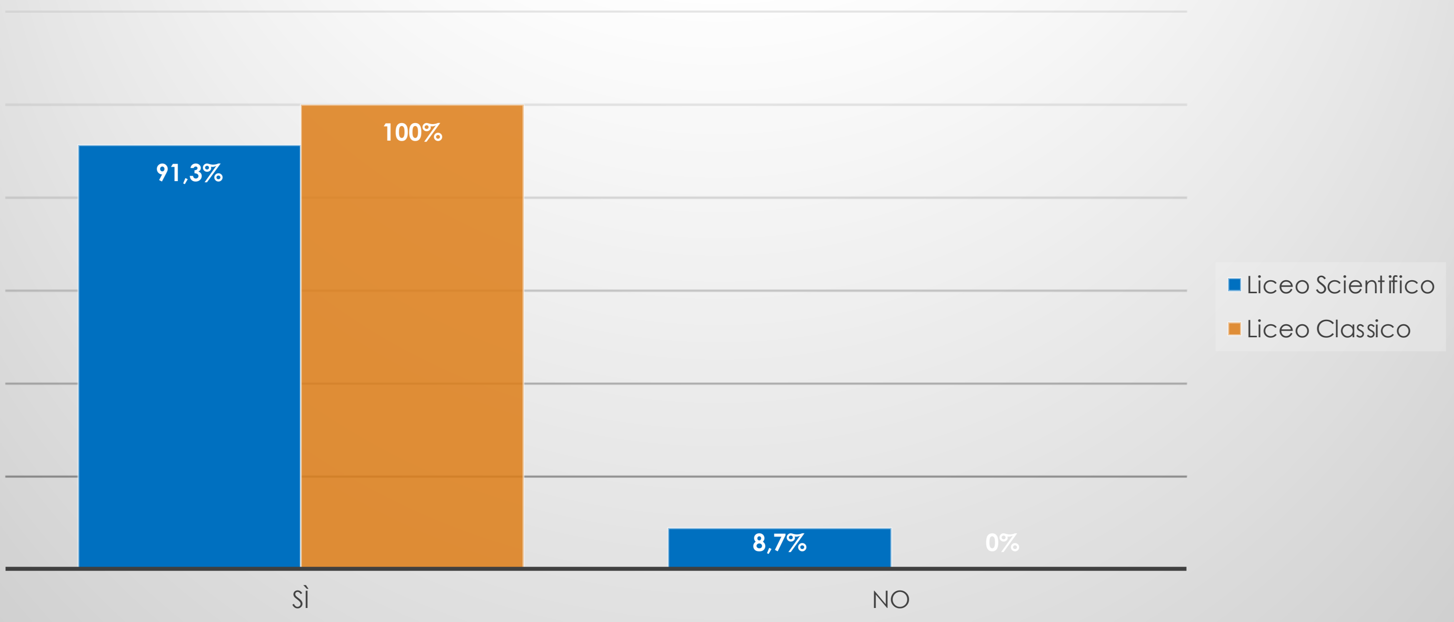


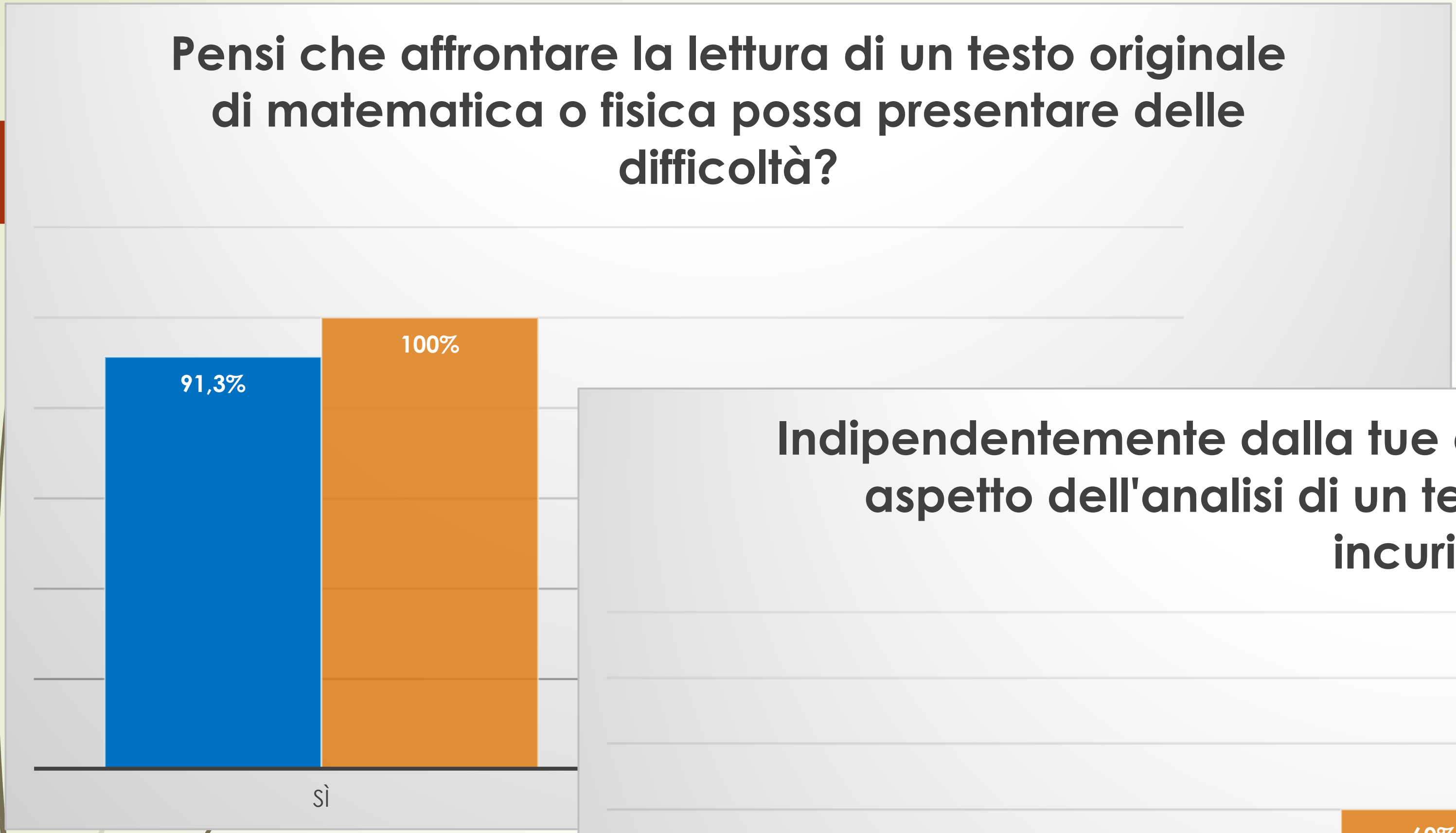
Il pensiero degli studenti prima dei laboratori

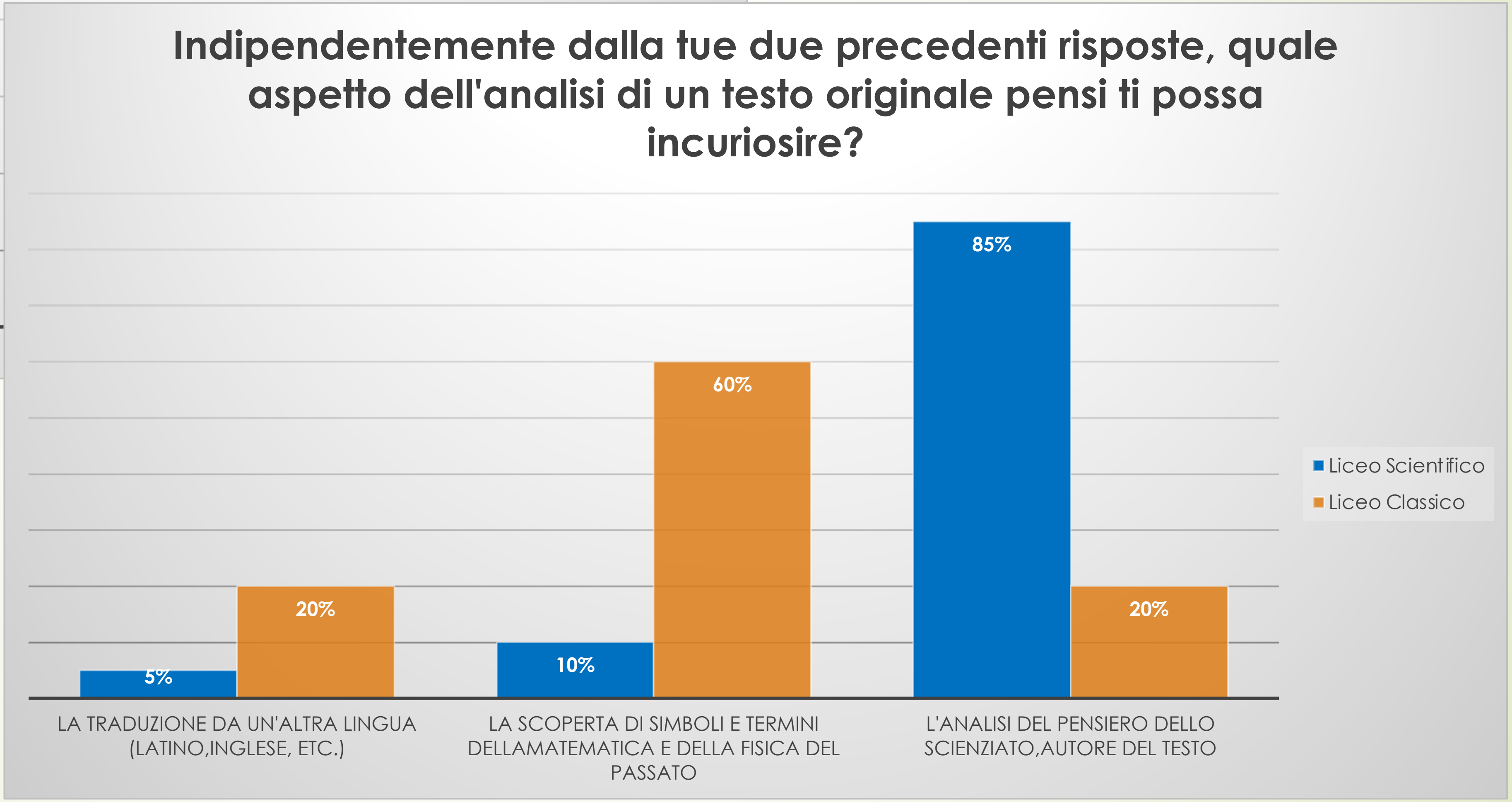


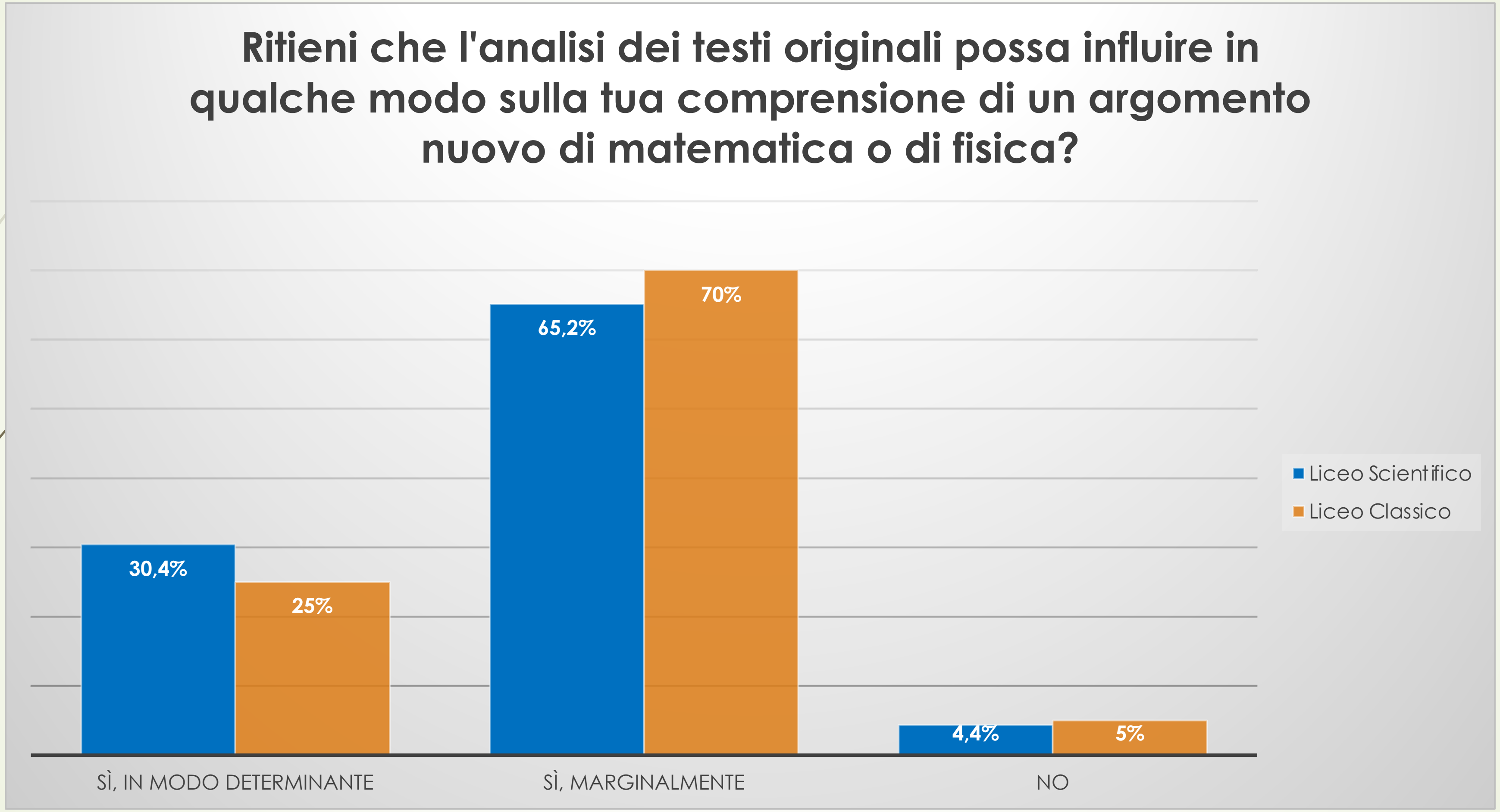


Pensi che affrontare la lettura di un testo originale di matematica o fisica possa presentare delle difficoltà?

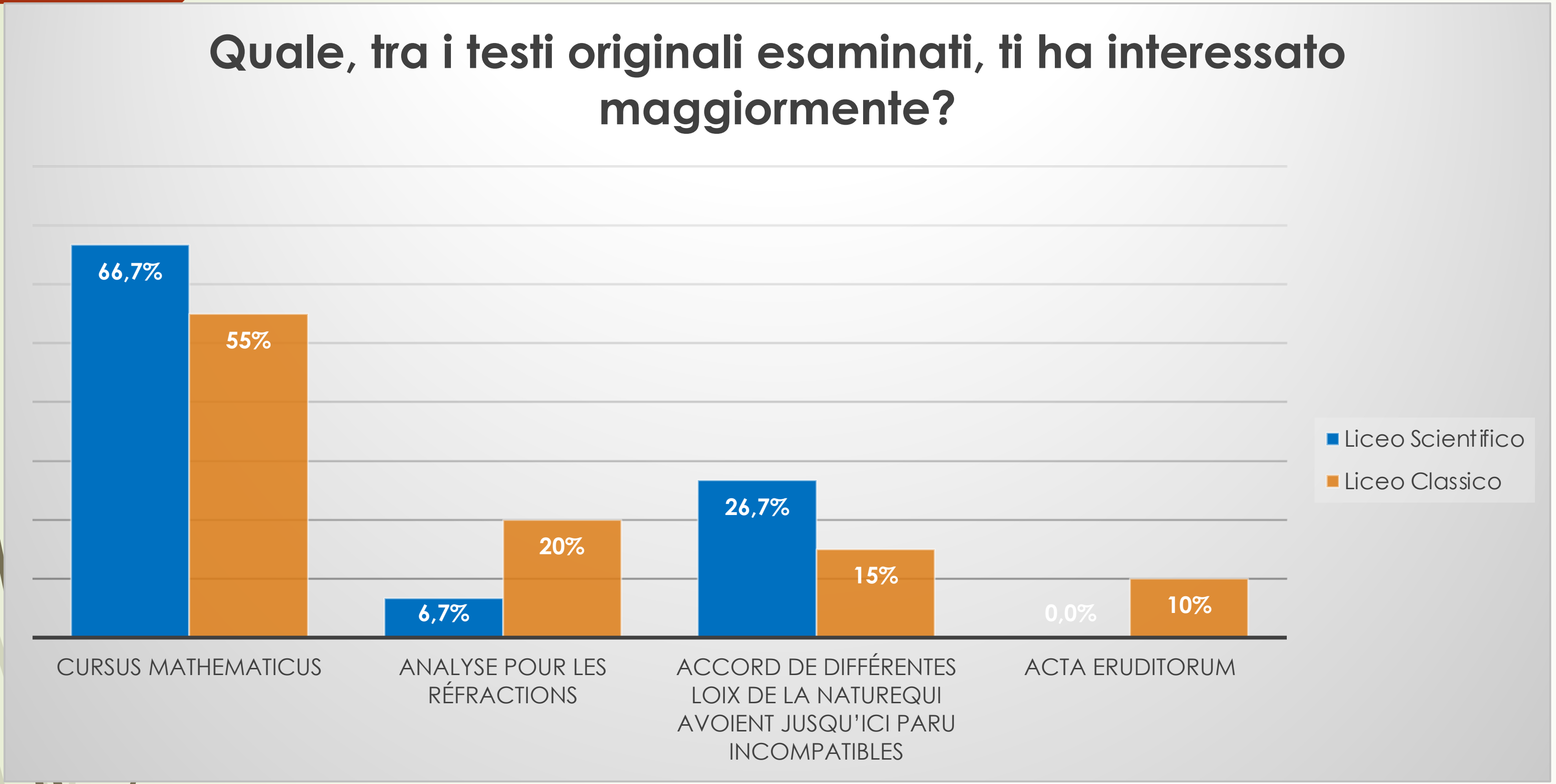



Pensi che affrontare la lettura di un testo originale di matematica o fisica possa presentare delle difficoltà?
91,3%
100%
SÌ

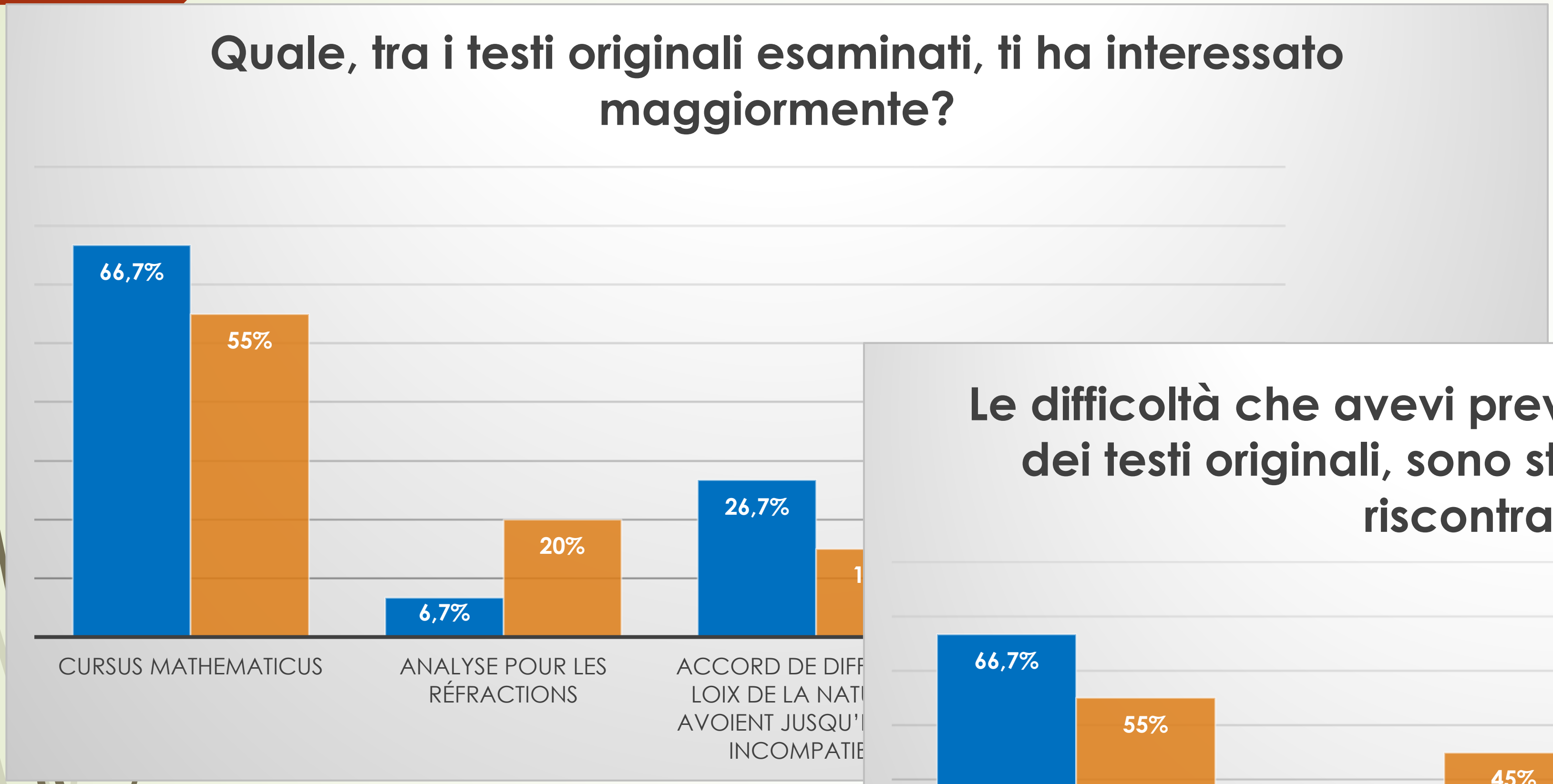

Indipendentemente dalla tue due precedenti risposte, quale aspetto dell'analisi di un testo originale pensi ti possa incuriosire?
5%
20%
10%
60%
85%
20%
LA TRADUZIONE DA UN'ALTRA LINGUA (LATINO,INGLESE, ETC.)
LA SCOPERTA DI SIMBOLI E TERMINI DELLAMATEMATICA E DELLA FISICA DEL PASSATO
L'ANALISI DEL PENSIERO DELLO SCIENZIATO,AUTORE DEL TESTO
Liceo Scientifico
Liceo Classico

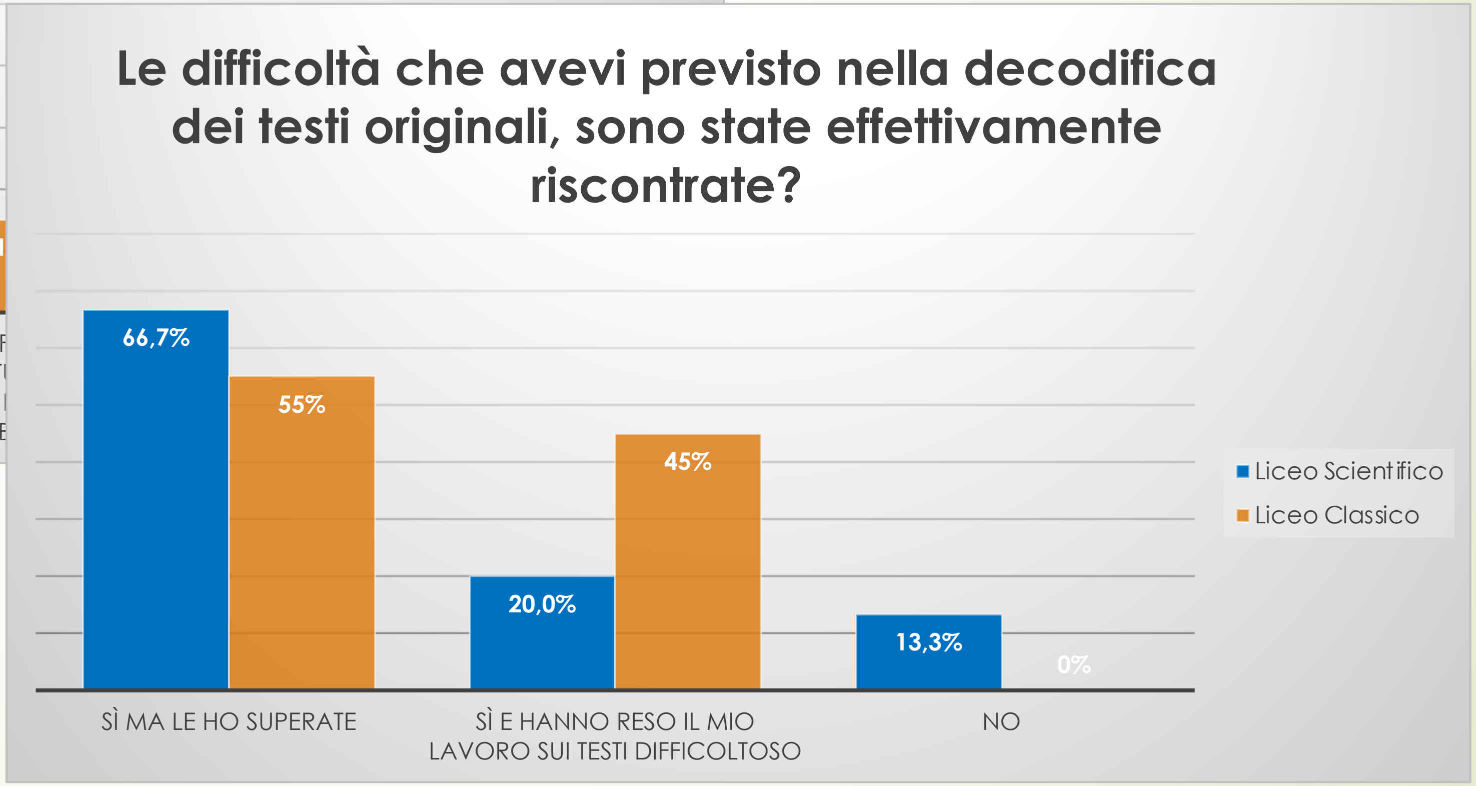

Ritieni che l'analisi dei testi originali possa influire in qualche modo sulla tua comprensione di un argomento nuovo di matematica o di fisica?
30,4%
25%
65,2%
70%
4,4%
5%
SÌ, IN MODO DETERMINANTE
SÌ, MARGINALMENTE
NO
Liceo Scientifico
Liceo Classico

Il pensiero degli studenti al termine dei laboratori

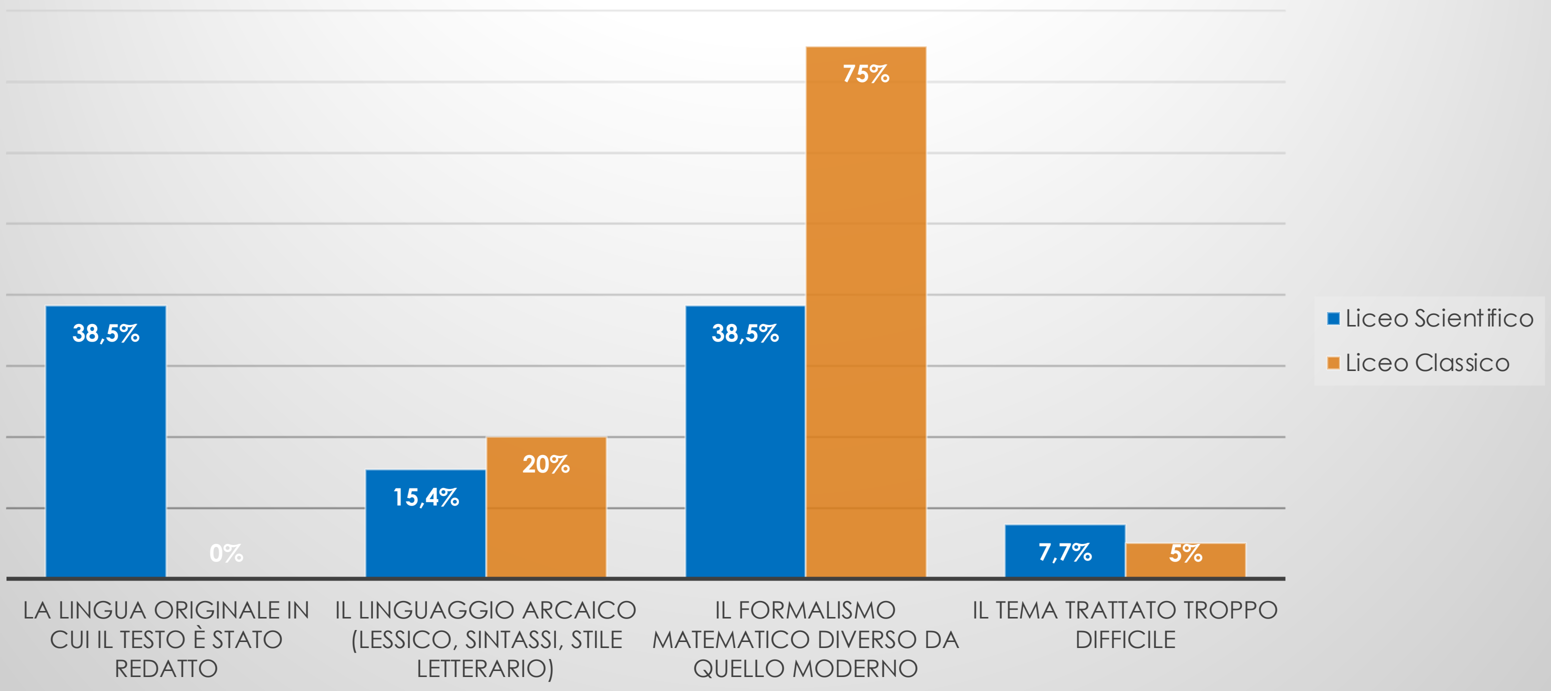


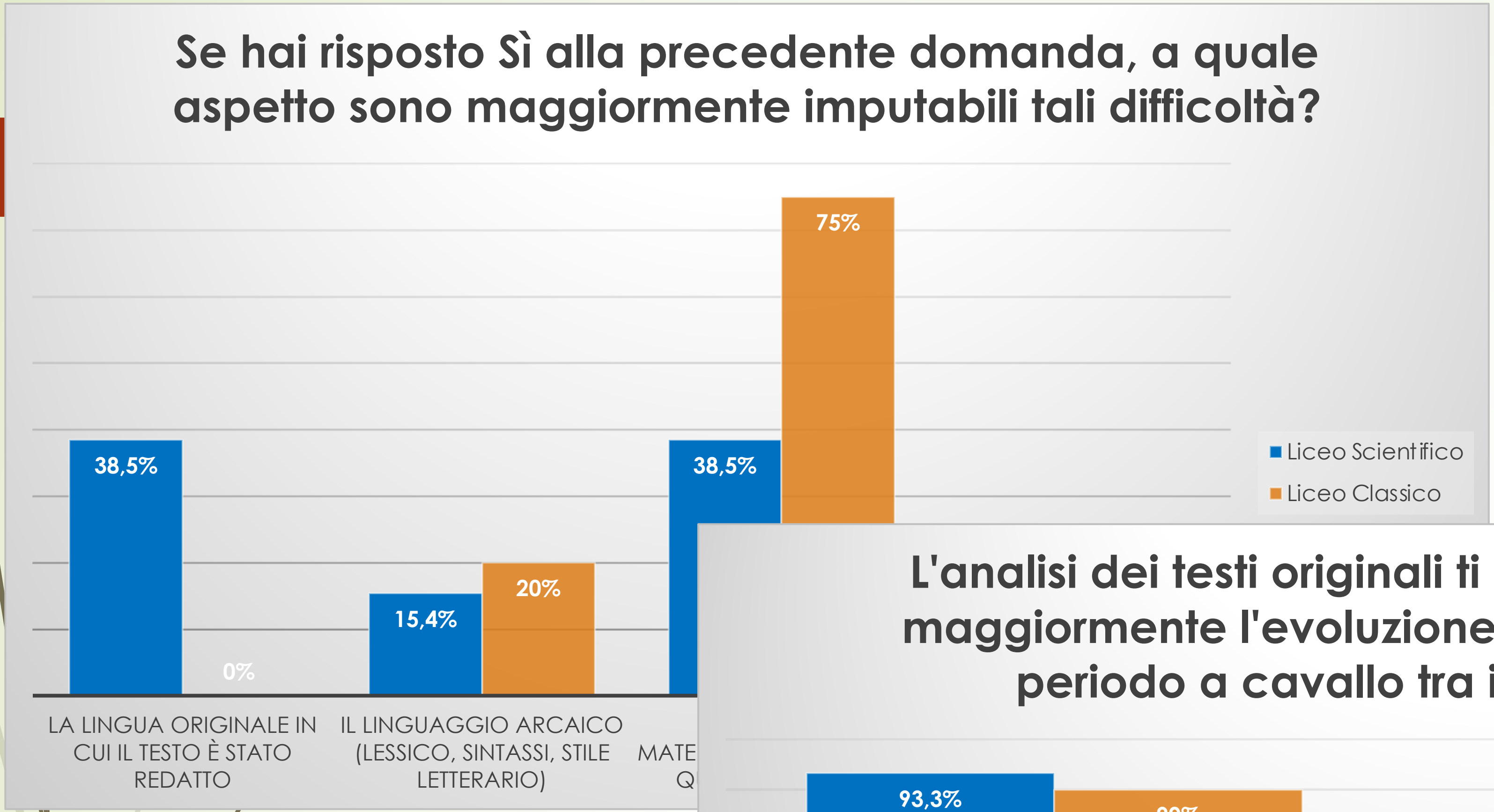
Il pensiero degli studenti al termine dei laboratori

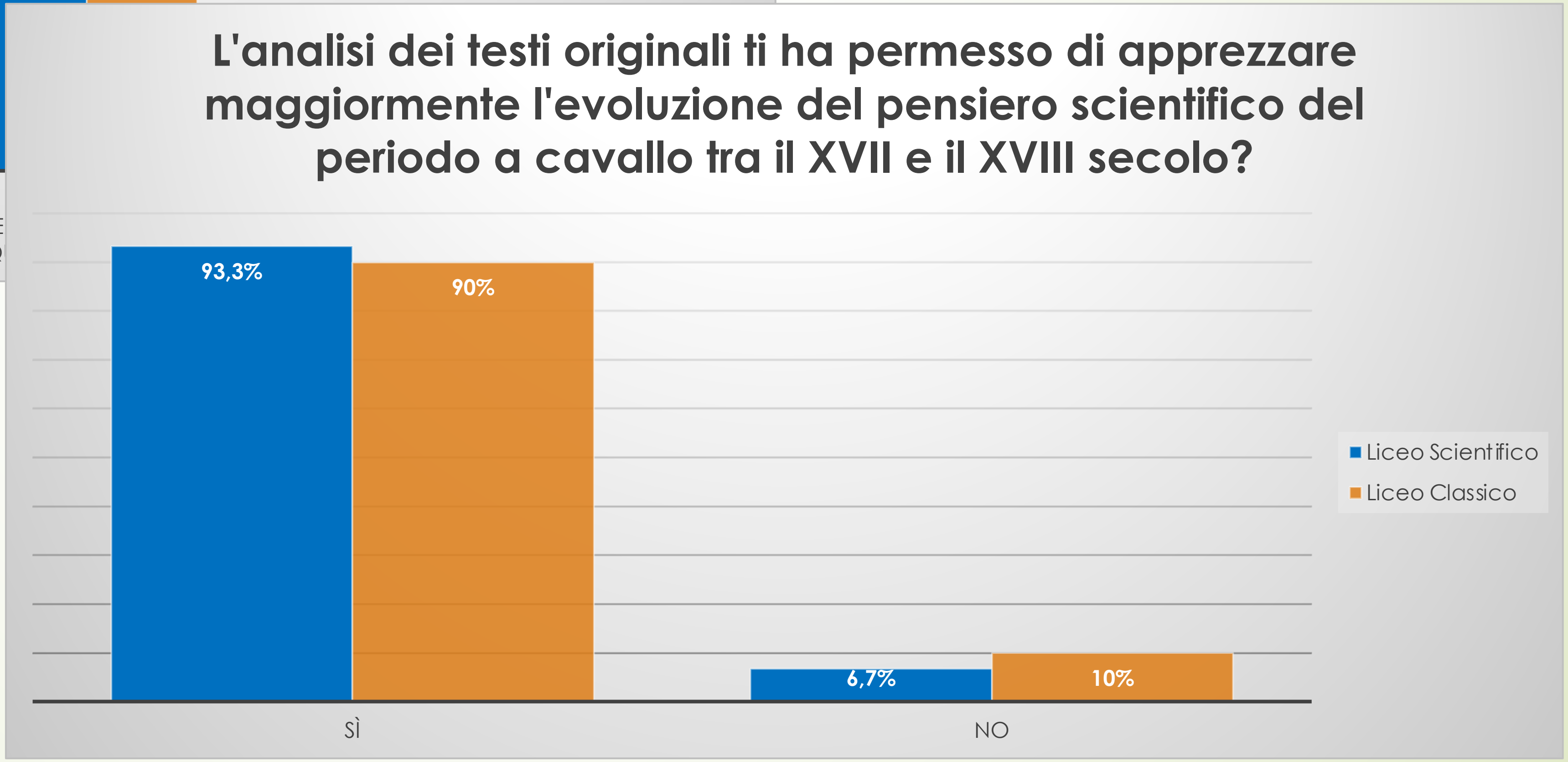


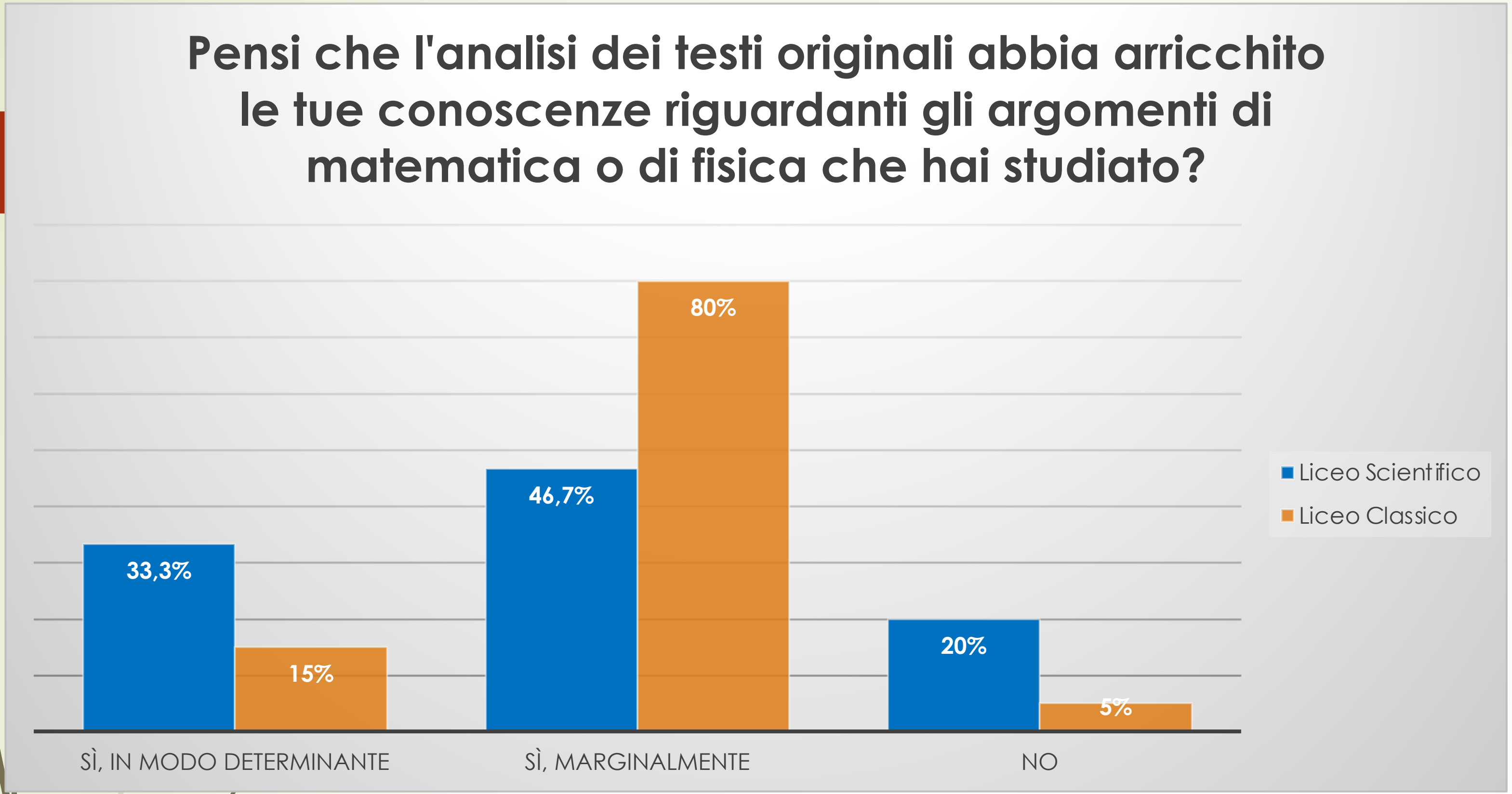


Se hai risposto Sì alla precedente domanda, a quale aspetto sono maggiormente imputabili tali difficoltà?

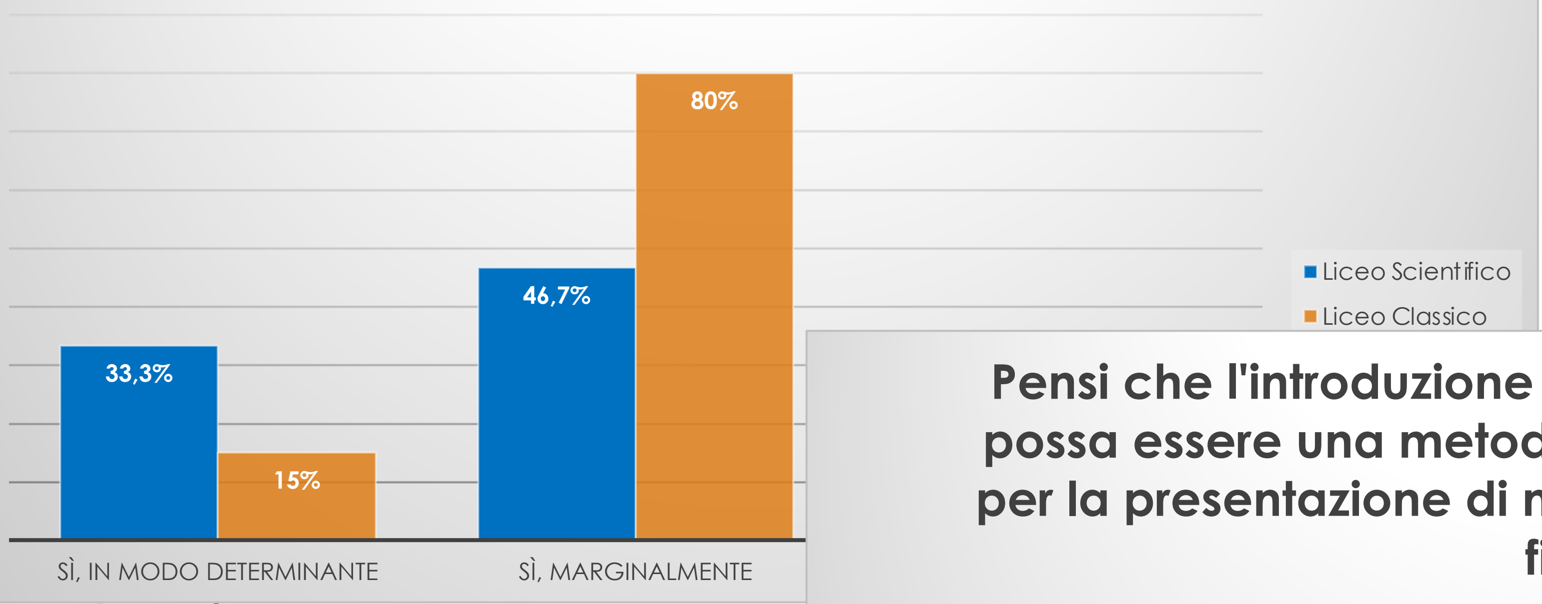



Se hai risposto Sì alla precedente domanda, a quale aspetto sono maggiormente imputabili tali difficoltà?
38,5%
0%
15,4%
20%
38,5%
75%
LA LINGUA ORIGINALE IN CUI IL TESTO È STATO REDATTO
IL LINGUAGGIO ARCAICO (LESSICO, SINTASSI, STILE LETTERARIO)
Liceo Scientifico
Liceo Classico

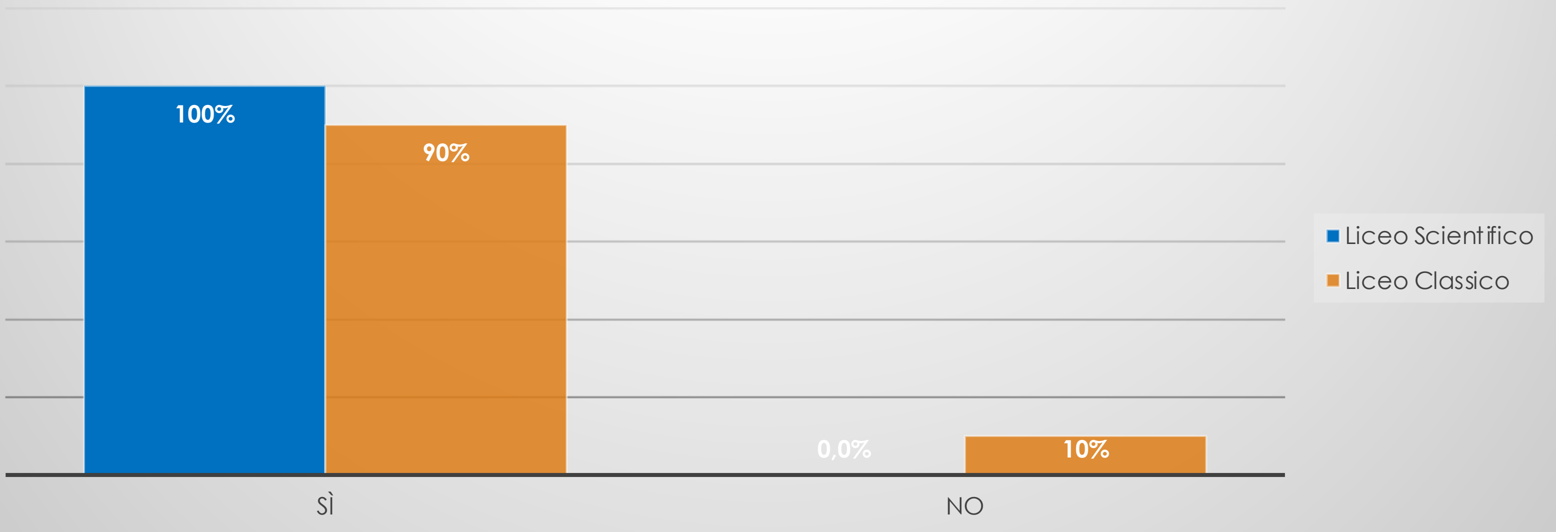

L'analisi dei testi originali ti ha permesso di apprezzare maggiormente l'evoluzione del pensiero scientifico del periodo a cavallo tra il XVII e il XVIII secolo?
93,3%
90%
6,7%
10%
SÌ
NO
Liceo Scientifico
Liceo Classico

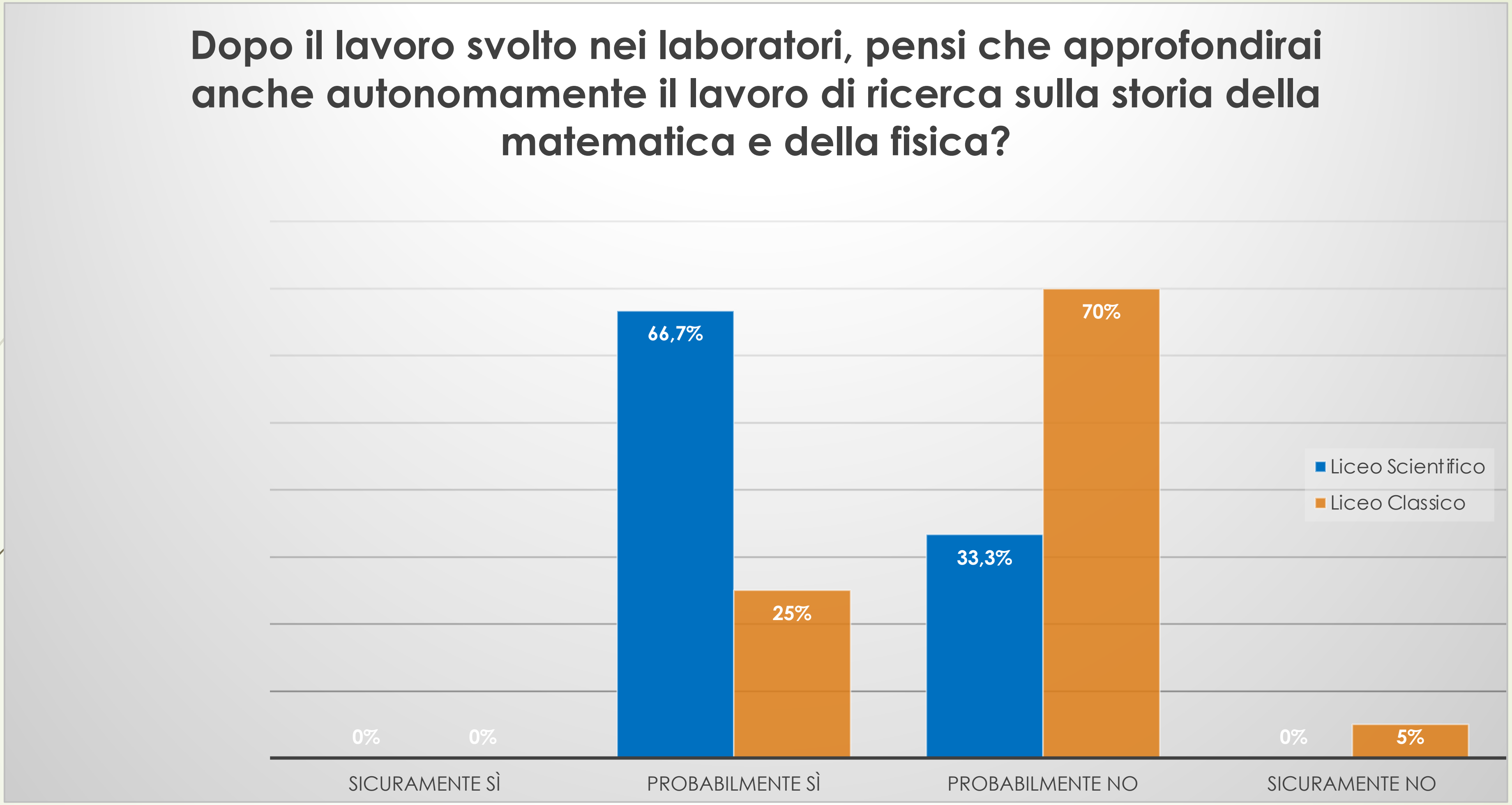

Pensi che l'analisi dei testi originali abbia arricchito le tue conoscenze riguardanti gli argomenti di matematica o di fisica che hai studiato?
33,3%
15%
46,7%
80%
20%
5%
SÌ, IN MODO DETERMINANTE
SÌ, MARGINALMENTE
NO
Liceo Scientifico
Liceo Classico

Pensi che l'analisi dei testi originali abbia arricchito le tue conoscenze riguardanti gli argomenti di matematica o di fisica che hai studiato?



Pensi che l'introduzione di laboratori sui testi originali possa essere una metodologia didattica interessante per la presentazione di nuovi temi di matematica e di fisica?





« La motivazione è passeggera, l'interesse è duraturo»

Evelyne Barbin, *Histoire et enseignement des mathématiques: Pourquoi ? Comment ?*, Bulletin AMQ, Vol. XXXVII, n°1 mars 1997, p.25

«Ne sous-estimons pas nos enfants!»

Monica Neagoy, *Comment cultiver le goût des mathématiques avec la méthode de Singapour ?*, conferenza al Collège de France, nell'ambito del ciclo *Réenchanter les maths à l'école,* 21 maggio 2025