TOR VERGATA
UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI ROMA

Macroarea di Scienze MMFFNN
Dipartimento di Matematica

Progetto didattico
"Il Principio di minima azione di Maupertuis"

Liceo Scientifico Statale "Augusto Righi"
a.s. 2024/2025

Laboratorio. ***Il Principio di minima azione di Maupertuis.***

Scheda di lavoro 4. **Maupertuis e la legge della rifrazione.**

En méditant profondément ſur cette matiere, j'ai penſé que la lumiere, lorſqu'elle paſſe d'un milieu dans un autre, abandonnant déja le chemin le plus court, qui eſt celui de la ligne droite, pouvoit bien auſſi ne pas ſuivre celui du tems le plus prompt ; en effet quelle préférence devroit-il y avoir ici du tems ſur l'eſpace ? La lumiere ne pouvant plus aller tout à la fois par le chemin le plus court, & par celui du tems le plus prompt, pourquoi iroit-elle plûtôt par l'un de ces chemins que par l'autre ? auſſi ne ſuit elle aucun des deux ; elle prend une route qui a un avantage plus réel : *le chemin qu'elle tient eſt celui par lequel la quantité d'action eſt la moindre,*

Il faut maintenant expliquer ce que j'entens par la quantité d'action. Lorſqu'un corps eſt porté d'un point à un autre, il faut pour cela une certaine action : cette action dépend de la vîteſſe qu'a le corps, & de l'eſpace qu'il parcourt, mais elle n'eſt ni la vî- Eſ-

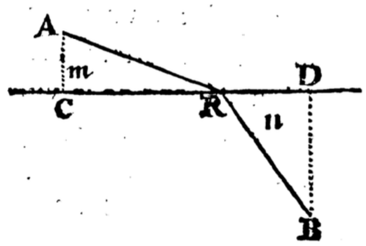
Comme il n'y a ici qu'un ſeul corps, on fait abſtraction de ſa Maſſe.

"Meditando profondamente su questa materia, ho pensato che la luce, quando passa da un mezzo all'altro, abbandonando il tragitto più corto, che è quello della linea retta, potesse comunque non seguire quello del tempo più breve; in effetti quale preferenza dovrebbe avere il tempo sullo spazio? La luce non potendo seguire contemporaneamente il cammino più corto e quello del tempo più breve, perché dovrebbe seguire l'uno piuttosto che l'altro? Così non segue nessuno dei due; essa prende una via che ha un vantaggio più reale: *il tragitto che [la luce] segue è quello per cui la quantità d'azione è minima.*

E' necessario ora spiegare cosa intendo per quantità d'azione. Quando un corpo viene portato da un punto ad un altro, è necessaria una certa quantità d'azione: questa azione dipende dalla velocità che ha il corpo, e dallo spazio che percorre, ma essa non è né la velocità

Poiché qui non c'è che un solo corpo, si trascura la sua Massa teſſe ni l'eſpace pris ſéparément. La quantité d'action eſt d'autant plus grande que la vîteſſe du corps eſt plus grande, & que le chemin qu'il parcourt eſt plus long; elle eſt proportionnelle à la ſomme des eſpaces multipliés chacun par la vîteſſe avec laquelle le corps les parcourt.

C'eſt cela, c'eſt cette quantité d'action qui eſt ici la vraie dépenſe de la nature, & ce qu'elle ménage le plus qu'il eſt poſſible dans le mouvement de la lumiere.

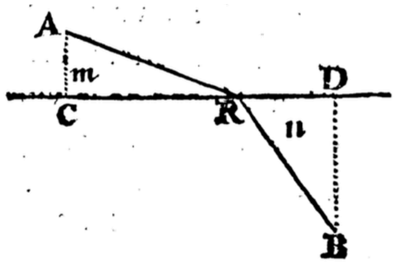


Soient deux milieux différens, ſéparés par une ſurface repréſentée par la ligne CD, tels que la vîteſſe de la lumiere, dans le milieu qui eſt au-deſſus, ſoit comme m, & la vîteſſe dans le milieu qui eſt au-deſſous, ſoit comme n.

Soit un rayon de lumiere qui, partant d'un point donné A, doit parvenir au point donné B: pour trouver le point R où il doit ſe briſer, je cherche le point où le rayon ſe briſant, *la quantité d'action eſt la moindre*: & j'ai $m . AR + n . RB$ qui doit être un *minimum*: ou, ayant tiré ſur la ſurface commune des deux milieux, les perpendiculaires AC, BD; $m\sqrt{(AC^2 + CR^2)} + n\sqrt{(BD^2 +}$

né lo spazio presi separatamente. La quantità d'azione è tanto più grande quanto lo è la velocità del corpo, e quanto il cammino che percorre è lungo; essa è proporzionale alla somma degli spazi moltiplicati ciascuno per la velocità con la quale il corpo li percorre.

E' questo, è questa quantità d'azione che qui è il vero dispendio della natura, e ciò che essa risparmia il più possibile nel moto della luce.



Siano dati due mezzi diversi, separati da una superficie rappresentata dalla linea CD, tali che la velocità della luce, nel mezzo che sta sopra, sia m, e la velocità nel mezzo che sta sotto, sia n.

Sia un raggio di luce che, partendo da un punto dato A, debba giungere al punto dato B: per trovare il punto R dove deve spezzarsi, io cerco il punto dove, spezzandosi il raggio, *la quantità d'azione è minima*: e ho $m \cdot AR + n \cdot RB$ che deve essere un *minimo*: o, avendo tracciato sulla superficie comune dei due mezzi, le perpendicolari AC, BD; $m\sqrt{AC^2 + CR^2} + n\sqrt{BD^2 + DR^2}$

$DR^2) =$ *minimum*, ou AC & BD étant constans,

$$\frac{m.\,CR\ d\,CR}{\sqrt{(AC^2+CR^2)}} + \frac{n.\,DR\ d\,DR}{\sqrt{(BD^2+DR^2)}} = 0.$$

Mais, CD étant constant, on a, $d\,CR = -d\,DR$. On a donc.

$$\frac{m.\,CR}{AR} - \frac{n.\,DR}{BR} = 0. \ \&$$

$$\frac{CR}{AR} : \frac{DR}{BR} :: n : m.$$

C'est-à-dire: *le sinus d'incidence, au sinus de réfraction, en raison renversée de la vîtesse qu'a la lumiere dans chaque milieu.*

Tous les phénomenes de la réfraction s'accordent maintenant avec le grand principe, que *la nature dans la production de ses effets agit toujours par les voies les plus simples.* De ce principe suit, que,

lorsque

lorsque la lumiere passe d'un milieu dans un autre, le sinus de son angle de réfraction est au sinus de son angle d'incidence en raison inverse des vîtesses qu'a la lumiere dans chaque milieu.

$= minimo$, o essendo AC e BD costanti,

$$\frac{m \cdot CR\, dCR}{\sqrt{AC^2 + CR^2}} + \frac{n \cdot DR\, dDR}{\sqrt{BD^2 + DR^2}} = 0$$

Ma, essendo CD costante, si ha, $dCR = -dDR$. Si ha quindi

$$\frac{m \cdot CR}{AR} - \frac{n \cdot DR}{BR} = 0 \ \text{ e}$$

$$\frac{CR}{AR} : \frac{DR}{BR} :: n : m$$

Cioè: *il seno d'incidenza e il seno di rifrazione stanno in rapporto inverso alle velocità che la luce ha in ciascun mezzo*.

Tutti i fenomeni della rifrazione concordano con questo grande principio, che *la natura nella produzione dei suoi effetti agisce sempre per le vie più semplici*. Da questo principio segue che,

quando

quando la luce passa da un mezzo all'altro, il seno del suo angolo di rifrazione sta al seno del suo angolo di incidenza in rapporto inverso alle velocità che la luce ha in ciascun mezzo".

Il testo sopra riportato è tratto dalla memoria *Accord de différentes loix de la nature qui avoient jusqu'ici paru incompatibles (Accordo di differenti leggi della natura che erano sembrate fino ad ora incompatibili)*, presentata da Maupertuis il 15 aprile 1744 all'Académie des Sciences di Parigi; queste righe trattano dell'applicazione del Principio di minima azione al fenomeno della rifrazione.

A differenza di quanto visto nella trattazione di Fermat, Maupertuis dispone degli strumenti del calcolo differenziale e li applica per trovare il minimo della quantità d'azione.

Attività proposta

La presentazione di un tema attraverso i testi originali permette il confronto del formalismo matematico e del lessico utilizzato da Maupertuis con quello 'moderno'. Si tratta di un vero e proprio lavoro di traduzione nel quale è possibile riconoscere aspetti e contenuti noti.

In questo laboratorio si esaminerà il linguaggio matematico agli albori del calcolo differenziale, esaminando con una corretta prospettiva storica gli studi sull'ottica geometrica.

→ Dopo aver letto il testo in cui Maupertuis esamina il fenomeno della rifrazione, scrivi la quantità d'azione $\mathcal{A}$ relativa a tale fenomeno, seguendo le indicazioni dell'autore.

→ Per tradurre quanto riportato nella fonte storica in un formalismo matematico moderno, poniamo $\mathrm{CR} = x$, $\mathrm{CD} = a$, $\mathrm{AC} = h$ e $\mathrm{BD} = k$; in questo modo possiamo scrivere la quantità d'azione come una funzione della variabile x:

→ Applichiamo la condizione per la ricerca dei punti stazionari, in particolare per determinare il minimo della funzione $\mathcal{A}(x)$:

→ Introducendo la definizione di seno di un angolo, possiamo ricavare la II legge della rifrazione:

→ Cosa possiamo osservare riguardo al risultato ottenuto, se confrontato con ciò che sappiamo dalla legge di Snell?