Macroarea di Scienze MMFFNN
Dipartimento di Matematica

Progetto didattico
“Il Principio di minima azione di Maupertuis”

Liceo Scientifico Statale “Augusto Righi”
a.s. 2024/2025

Laboratorio. ***Le leggi della rifrazione.***
Scheda di lavoro 2. **Fermat e la legge della rifrazione.**

In una lettera a Marin Cureau de la Chambre del 1657, Pierre de Fermat enuncia il principio secondo cui la luce segue percorsi che minimizzano il tempo; pochi anni dopo, deduce la legge della rifrazione della luce a partire da questo principio, assumendo che l’indice di rifrazione di un mezzo sia inversamente proporzionale alla velocità della luce in quello stesso mezzo.
Il calcolo relativo al fenomeno della rifrazione è parzialmente contenuto nel testo *Œuvres de Fermat* a cura di Paul Tannery, tomo III, di cui si riportano di seguito le pagine dalla 149 alla 151 con la traduzione in italiano.

lèle à la tangente et rencontrant le diamètre en G. Ce point G tombera entre les points F et D, autrement la parallèle GI ne rencontrerait pas le demi-cercle. En raison du parallélisme, on a $\frac{FB}{BE} = \frac{GN}{NI}$; mais $FB = 2BE$; donc $GN = 2NI$ et, par suite, $GD = DN + 2NI$. Mais comme $GD(= DN + 2NI)$ est inférieure à $DF(= DB + 2BE)$, il s'ensuit que $DB + 2BE$ est un maximum et que le cylindre cherché aura pour base DE et pour côté EA.

On prouvera, d'après ce qui précède, que le rapport $\frac{DE}{EA}$ est celui du plus grand au plus petit segment d'une droite divisée en moyenne et extrême raison.

Nous pouvons d'ailleurs par le même procédé *trouver et construire un cylindre de surface donnée.*

On ramènera en effet la question à l'égalité entre la somme $DN + 2NI$ et une droite donnée, soit DG, qui, d'après la valeur trouvée pour le maximum, devra être au plus égale à DF. Menez GI parallèle à FE; le point I satisfera à la question et l'on pourra ainsi avoir tantôt deux cylindres, tantôt un seul répondant à la condition posée.

Si, en effet, le point G tombe entre F et A, deux cylindres différents satisferont au problème; mais si G tombe en A ou plus près de D, la solution sera unique.

VIII.

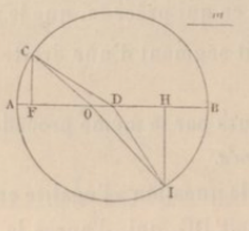
ANALYSE POUR LES RÉFRACTIONS.

Soit ACBI (*fig.* 108) un cercle dont le diamètre AFDB sépare deux milieux de nature différente, le moins dense étant du côté ACB, le plus dense du côté AIB.

Soient D le centre du cercle et CD le rayon incident tombant sur ce centre du point C donné; on demande le rayon réfracté DI, ou autrement le point I par où passera le rayon après la réfraction.

Abaissez sur le diamètre les perpendiculaires CF, IH. Le point C étant donné ainsi que le diamètre AB et le centre D, le point F et la droite FD seront également donnés. Supposons que le rapport de la résistance du milieu plus dense à celle du milieu moins dense soit celui de la droite donnée DF à une autre droite m donnée en dehors de la figure. On devra avoir $m < \mathrm{DF}$, la résistance du milieu moins dense devant être inférieure à celle du milieu plus dense, par un axiome plus que naturel.

Fig. 108.



Nous avons maintenant à mesurer, au moyen des droites m et DF, les mouvements suivant les droites CD et DI; nous pourrons ainsi représenter comparativement l'ensemble du mouvement sur ces deux droites par la somme de deux produits : $\mathrm{CD}.m + \mathrm{DI}.\mathrm{DF}$.

Ainsi la question est ramenée à partager le diamètre AB en un point H de telle sorte que si en ce point on élève la perpendiculaire HI, puis qu'on joigne DI, l'aire $\mathrm{CD}.m + \mathrm{DI}.\mathrm{DF}$ soit minima.

Nous emploierons à cet effet notre méthode, déjà répandue parmi les géomètres et exposée depuis environ vingt ans par Hérigone dans son *Cursus mathematicus*. Appelons n le rayon CD ou son égal DI, b la droite DF, et posons $\mathrm{DH} = a$. Il faut que la quantité $nm + nb$ soit minima.

Soit, pour l'inconnue e, une droite arbitraire DO; joignons CO, OI. En notations analytiques : $\mathrm{CO}^2 = n^2 + e^2 - 2be$, et $\mathrm{OI}^2 = n^2 + e^2 + 2ae$; donc

$$\mathrm{CO}.m = \sqrt{m^2n^2 + m^2e^2 - 2m^2be}, \qquad \mathrm{IO}.b = \sqrt{b^2n^2 + b^2e^2 + 2b^2ae}.$$

La somme de ces deux radicaux doit être *adégalée*, d'après les règles de l'art, à la somme $mn + bn$.

Pour faire disparaître les radicaux, on élèvera au carré, on supprimera les termes communs et l'on transposera de façon à ne laisser dans un des membres que le radical qui subsistera; puis on élèvera de nouveau au carré; après nouveau retranchement des termes communs de part et d'autre, division de tous les termes par e et suppression de ceux où e entrera encore, selon les règles de notre méthode généralement connue depuis longtemps, on arrivera, en ôtant les facteurs communs, à l'équation la plus simple possible entre a et m, c'est-à-dire qu'après avoir fait disparaître les obstacles opposés par les radicaux, on trouvera que la droite DH de la figure est égale à la droite m.

Par conséquent, pour trouver le point de réfraction, il faut, ayant mené les droites CD et CF, prendre les droites DF et DH dans le rapport de la résistance du milieu plus dense à celle du milieu moins dense, soit dans le rapport de b à m. On élèvera ensuite en H la perpendiculaire HI au diamètre; elle rencontrera le cercle en I, point où passera le rayon réfracté; et ainsi d'ailleurs le rayon, passant d'un milieu moins dense dans un plus dense, s'infléchira du côté de la perpendiculaire : ce qui concorde absolument et sans exception avec le théorème découvert par Descartes; l'analyse ci-dessus, dérivée de notre principe, donne donc de ce théorème une démonstration rigoureusement exacte.

IX.

SYNTHÈSE POUR LES RÉFRACTIONS.

Le savant Descartes a proposé pour les réfractions une loi qui est, comme on dit, conforme à l'expérience; mais, pour la démontrer, il a dû s'appuyer sur un postulat absolument indispensable à ses raisonnements, à savoir que le mouvement de la lumière se ferait plus facilement et plus vite dans les milieux denses que dans les rares; or ce postulat semble contraire à la lumière naturelle.

VIII

ANALISI PER LE RIFRAZIONI

Sia ACBI (fig. 108) un cerchio il cui diametro AFDB separa due mezzi di natura diversa, il meno denso nella parte ACB, il più denso nella parte AIB.

Siano D il centro del cerchio e CD il raggio incidente che cade nel centro dal punto C dato: si chiede il raggio rifratto DI, o equivalentemente il punto I per cui passerà il raggio dopo la rifrazione.

Abbassate sul diametro le perpendicolari CF, IH. Essendo il punto C, così come il diametro AB e il centro D, dati, il punto F e la retta FD saranno ugualmente determinati. Supponiamo che il rapporto della resistenza del mezzo più denso con quella del mezzo meno denso sia uguale al rapporto tra il segmento dato DF e un altro segmento m indicato fuori dalla figura. Dovrà essere $m < \mathrm{DF}$, dovendo essere la resistenza del mezzo meno denso minore di quella del mezzo più denso, grazie ad un assioma più che naturale.

Ora dobbiamo misurare, per mezzo dei segmenti m e DF, come variano i segmenti CD e DI; potremo così rappresentare in modo comparato l'insieme delle variazioni di questi segmenti attraverso la somma di due prodotti: $\mathrm{CD} \cdot m + \mathrm{DI} \cdot \mathrm{DF}$.

In questo modo il quesito è equivalente a quello di dividere il diametro AB con un punto H tale che, se da questo punto si alza la perpendicolare HI, raggiungendo poi DI, l'area $\mathrm{CD} \cdot m + \mathrm{DI} \cdot \mathrm{DF}$ sia minima.

Per questo scopo, utilizzeremo il nostro metodo, già diffuso tra i geometri ed esposto circa vent'anni fa da Hérigone nel suo *Cursus mathematicus*. Chiamiamo n il raggio CD o, che è lo stesso, DI, b il segmento DF, e poniamo $\mathrm{DH} = a$. E' necessario che la quantità $nm + nb$ sia minima.

Sia, come incognita e, un segmento arbitrario DO; tracciamo CO e OI. In notazione analitica: $\mathrm{CO}^2 = n^2 + e^2 - 2be$, e $\mathrm{OI}^2 = n^2 + e^2 + 2ae$; dunque

$$\mathrm{CO} \cdot m = \sqrt{m^2n^2 + m^2e^2 - 2m^2be}, \qquad \mathrm{IO} \cdot b = \sqrt{b^2n^2 + b^2e^2 + 2b^2ae}$$

La somma di questi due radicali deve essere *adequata*, a regola d'arte, alla somma $mn + bn$.

Per far scomparire i radicali, si eleverà al quadrato, si elideranno i termini comuni e si trasformerà [l'espressione, N.d.T.] in modo da lasciare in uno dei due membri solo il radicale che rimarrà; poi si eleverà di nuovo al quadrato; dopo una nuova eliminazione dei termini comuni in un membro e

nell'altro, una divisione di tutti i termini per e e l'eliminazione di tutti i termini che ancora lo contengono, secondo le regole del nostro metodo conosciuto da tempo, si arriverà, semplificando i fattori comuni, all'equazione più semplice possibile tra a e m, cioè che, dopo aver eliminato gli ostacoli posti dai radicali, si troverà che il segmento DH della figura è uguale al segmento m.
Di conseguenza, per trovare il punto di rifrazione, è necessario, dopo aver tracciato i segmenti CD e CF, considerare i segmenti DF e DH nello stesso rapporto della resistenza del mezzo più denso e di quella del mezzo meno denso, cioè nel rapporto tra b ed m. Si traccerà da H la perpendicolare HI al diametro; essa incontrerà il cerchio in I, punto da cui passerà il raggio rifratto; e così infatti il raggio, passando da un mezzo meno denso a uno più denso, devierà verso la normale: questo concorda assolutamente e senza eccezioni con il teorema scoperto da Decartes; l'analisi qui di seguito, derivata dal nostro principio, dà dunque di questo teorema una dimostrazione rigorosamente corretta.

Nel 1657 non si parla ancora di 'funzione'; questo termine, nell'accezione che utilizziamo ancora oggi viene introdotto sette anni dopo da Leibniz. Le proprietà di estremalità sono attribuite a 'quantità', come il tempo di percorrenza, il tragitto seguito, etc..
Di là da venire anche il calcolo differenziale quale strumento per la ricerca di massimi e minimi. Il *metodo di adequazione*, pur contemplando tutti gli elementi che concorreranno alla definizione di derivata prima di una funzione, rimane uno strumento puramente algebrico, la cui validità è indubbia, nonostante evidenti forzature.

Come sua abitudine, Fermat imposta il problema introducendo le grandezze su cui lavorare ma poi descrive il metodo senza eseguire i calcoli nel dettaglio. A differenza dell'*Ultimo Teorema di Fermat*, in questo caso, siamo in grado di completare quanto solo accennato nel testo: bastano infatti gli strumenti di base dell'algebra.

→ Seguendo le indicazioni contenute nel testo di Fermat, applicando il *metodo di adequazione*, ricava il risultato da lui previsto (**da svolgere a casa**)

→ A partire dal risultato descritto da Fermat, ricava la II legge della rifrazione nella forma che conosci.

→ Quale relazione puoi ipotizzare tra l'indice di rifrazione relativo e le *resistenze* nei due mezzi, definite da Fermat?

→ Introducendo nella legge le velocità della luce nei due mezzi, quale relazione esiste tra queste grandezze e le *resistenze* definite da Fermat?
