Roma Tor Vergata
24 settembre 2025

Toccare la trascendenza: *macchine per l'analisi infinitesimale*

Pietro Milici
Università di Messina
pietro.milici@unime.it

Progetto PRIN 2022 "*Touching the transcendentals by tractional constructions: historical and foundational research, educational and museal applications by new emerging technologies*", codice: 2022E8PZ3F, CUP: B53C24008180001

Macchine matematiche

- Possono incorporare concetti e promuovere una comprensione più profonda (*didattica e divulgazione*)

- Hanno giocato un ruolo fondazionale **in geometria** (Euclide, Descartes): *semplici* macchine possono essere idealizzate per divenire l'essenza di concetti fondamentali continuando a mantentere uno stretto contatto con esperienze concrete e permettendo la manipolazione

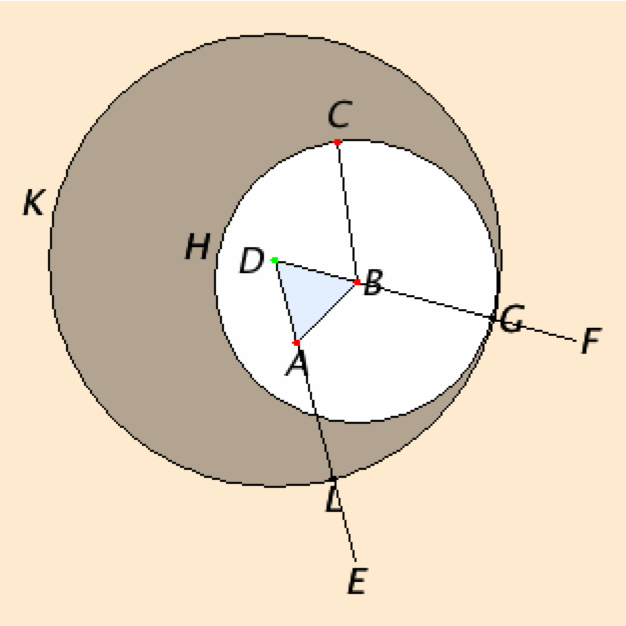
…ma le macchine possono costituire una fondazione della matematica avanzata evitando concetti astratti irraggiungibili come oggetti e processi infiniti?

Una lunga tradizione

Definizione degli strumenti leciti= ***problema esattezza***

Esempio: *300 a.C. - Elementi di Euclide*

Riga (non graduata) e compasso (che non tiene l'apertura)

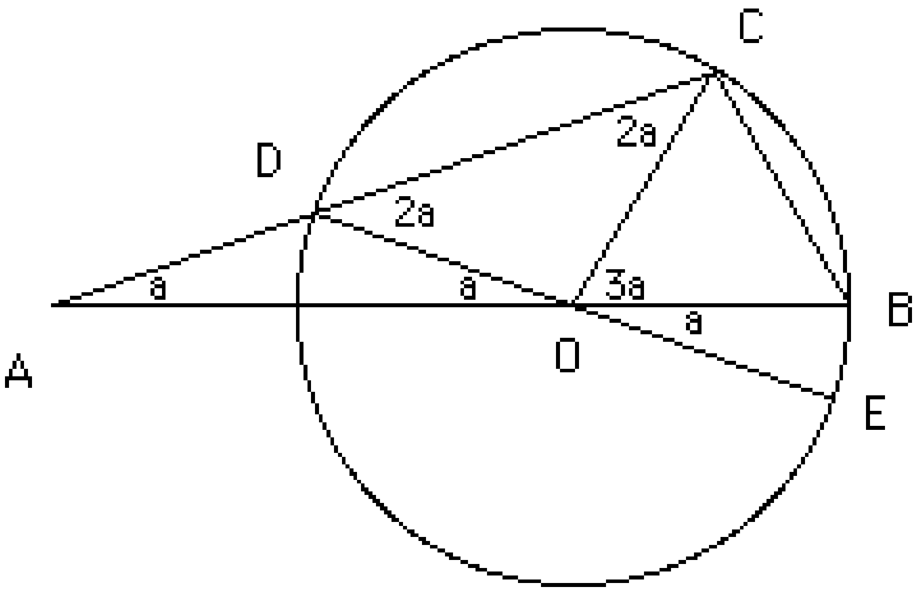


Compasso che tiene apertura: libro 1, prop. 2 - costruire una circonferenza dato il centro e il raggio

Livelli di “esattezza” nella Grecia Classica

In ordine crescente di potenza (e decrescente di eleganza):

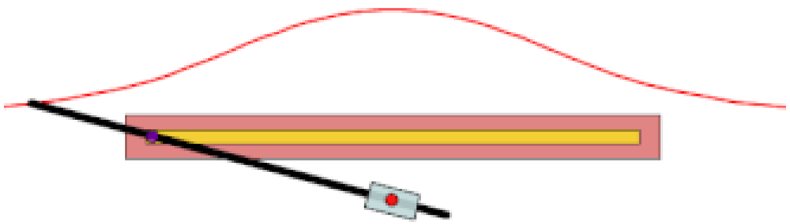
1. Strumenti di Euclide (Pappo: costruzioni “piane”)
2. Strumenti di Euclide + una conica (costruzioni “solide”)
3. Con altri strumenti, ad esempio una riga segnata (neusis)

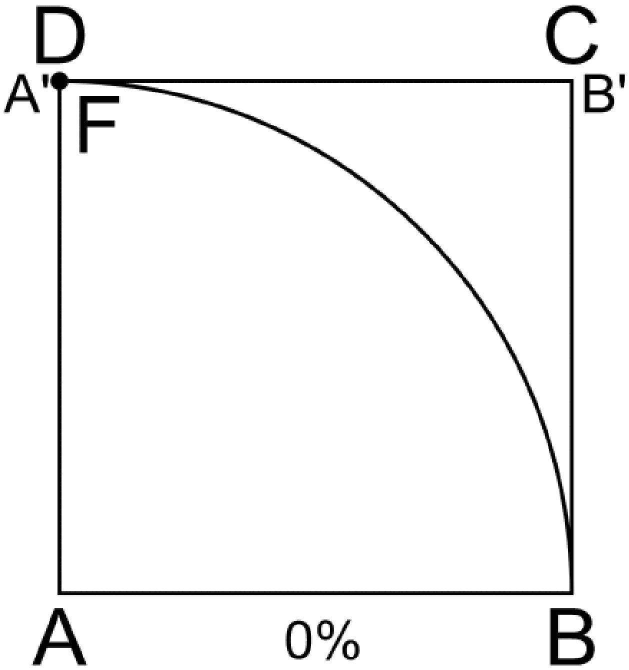


Archimede: trisezione dell’angolo con *neusis*

Costruzioni di nuove curve (non solo punti)

Concoide di Nicomede (trisezione angolo, duplicazione cubo): neusis per costruire curva





Quadratrice di Dinostrato (trisezione angolo, quadratura cerchio):

A’B’ trasla con velocità costante;

AF ruota con velocità angolare costante

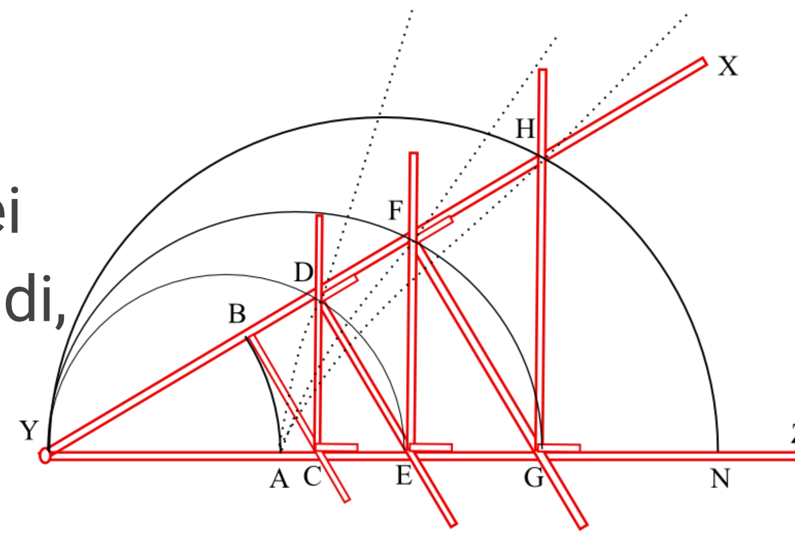
Millenni dopo...

17° secolo: curve definite come tracce di macchine ideali

Introduzione dell'algebra per la risoluzione di problemi geometrici

Descartes: *La Géométrie* 1637

Riprende la classificazione classica dei problemi di Pappo (problemi piani, solidi, lineari)



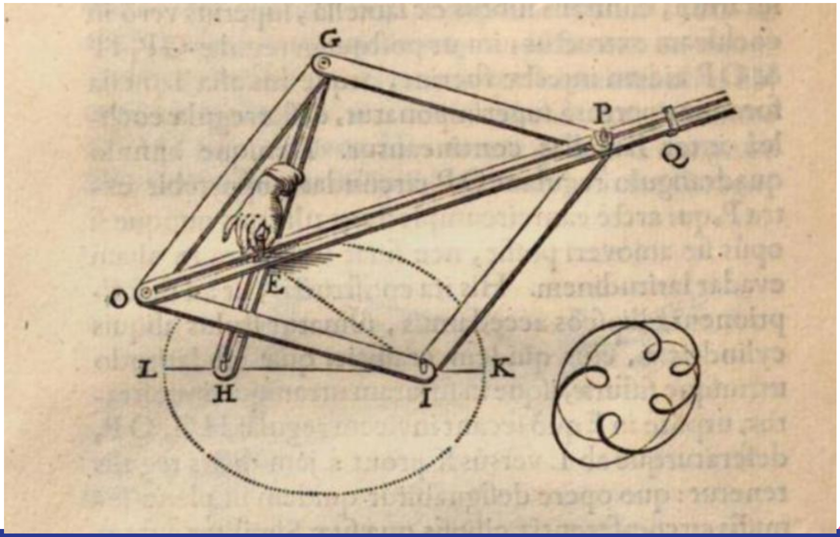
Possibilità di costruire infinite nuove curve grazie al linguaggio dell'algebra (prima ogni curva era introdotta da una specifica costruzione)

Il concetto di esattezza ne *La Géométrie*

Convergenza tra i mezzi *sintetici* di costruzione di curve (macchine ideali) e gli strumenti *analitici* finiti di manipolazione di simboli (algebra)

Dualismo curve geometriche (algebriche) e meccaniche

Es. Differenza tra concoide (lecita) e quadratrice (illecita): come costruzione la seconda usa movimenti da coordinare



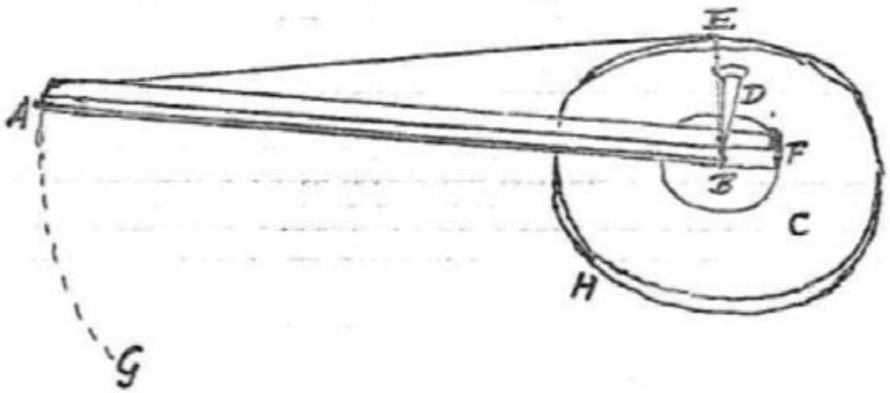
Giustificazione di curve trascendenti

Diffusione del canone Cartesiano (seconda metà XVII sec.)

Abituazione: equazioni come definizione di curve algebriche e perdita di importanza delle relative costruzioni

Problema di giustificare curve note escluse (spirali) e nuove (cicloide) per cui manca il linguaggio analitico

Studio di nuove macchine per tracciare tali curve

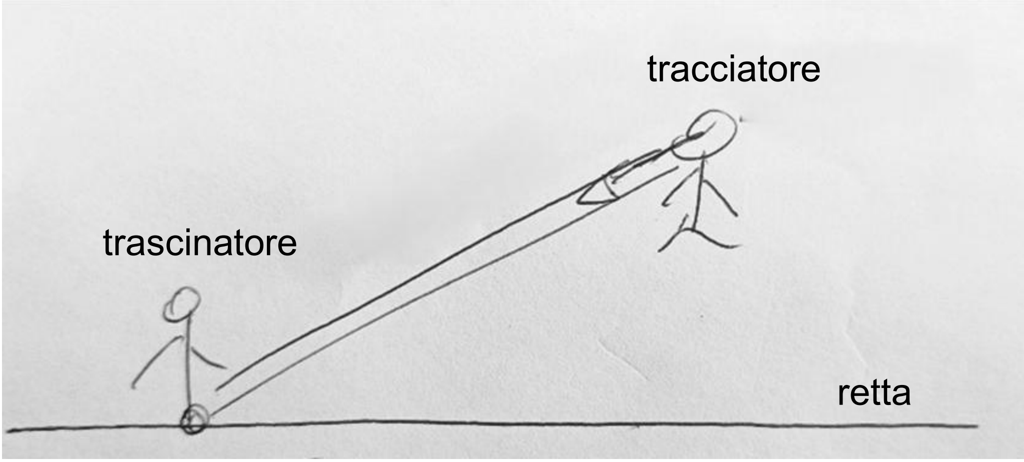


Il problema di Perrault (Paris, 1670 ca.)

Un peso attaccato ad un filo è trascinato muovendo l’estremità del filo lungo una retta.

Che curva descrive il peso?

Attività 1:
La curva di Perrault



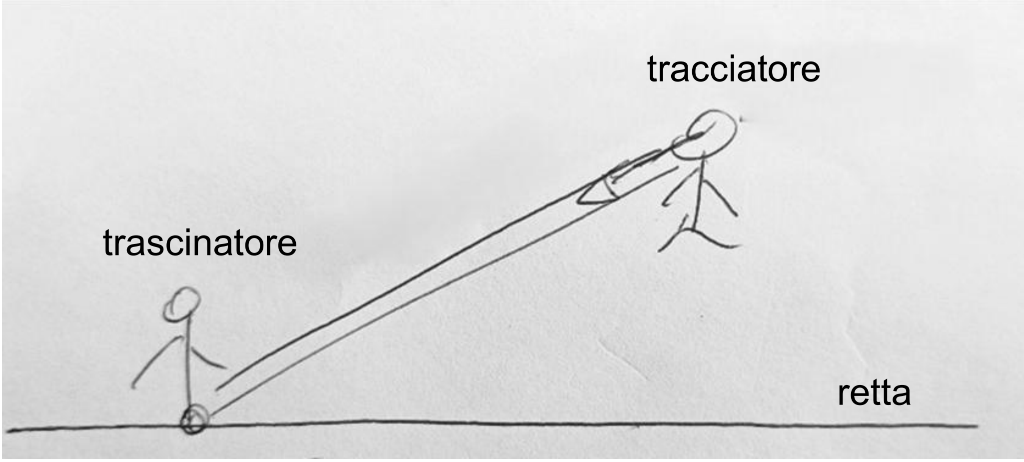
Materiale: carta e penna, filo, righello

Nomenclatura: ***tracciatore***, ***trascinatore***, ***retta***

In 3 fogli diversi:

1. Scelta una lunghezza del filo, tracciate la curva posizionando il «trascinatore» sul lato lungo del foglio e il «tracciatore» sul lato corto. Tenendo il filo ben teso, muovete lentamente il «tracciatore», che inizialmente è da posizionare all'angolo del foglio.
2. Modificate la lunghezza del filo e ripetete la costruzione, fermando la traccia circa a metà foglio.
3. Modificate la lunghezza del filo e ripetete la costruzione con il tracciatore che, nella posizione iniziale, non parte dall'angolo del foglio. Fermate la traccia circa a metà foglio.

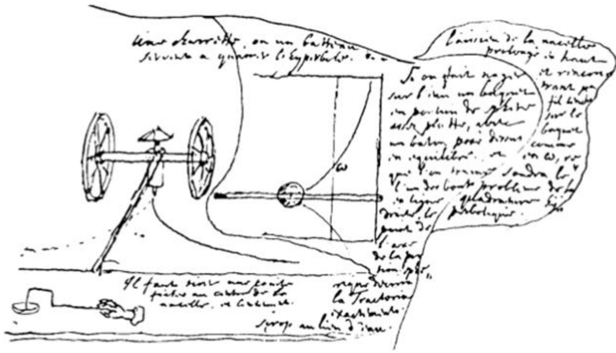
Attività 1:
La curva di Perrault



Scambiate i fogli dei punti 2 e 3 con un altro gruppo e non date informazioni sulla lunghezza del filo utilizzata.

1. Come potete continuare la traccia della curva 2 in modo continuo? Perché?
2. Come potete proseguire la curva 3? Perché?
3. Secondo voi, la curva, continuando, toccherà la retta? Perché?
4. Quali proprietà geometriche definiscono la curva? Come sono collegate ai materiali utilizzati? Notate qualche concetto matematico impiegato in modo insolito?

Risoluzione del problema: *la trattrice*



Huygens/Leibniz 1693

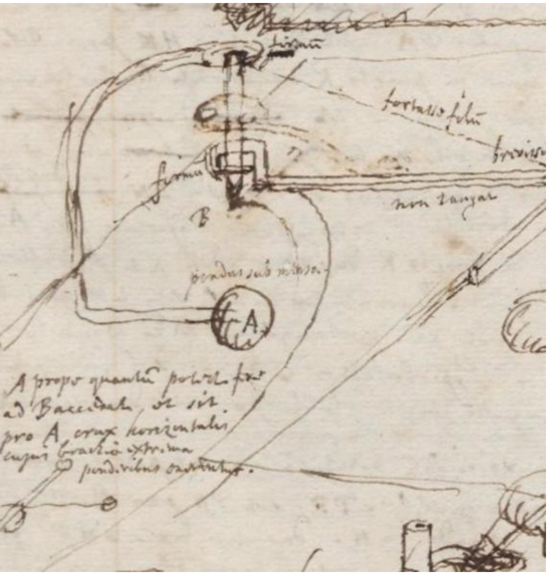
L’asta è sempre tangente alla curva tracciata, quindi è un **problema inverso della tangente** (date le proprietà della tangente, trovare la curva che le soddisfa)

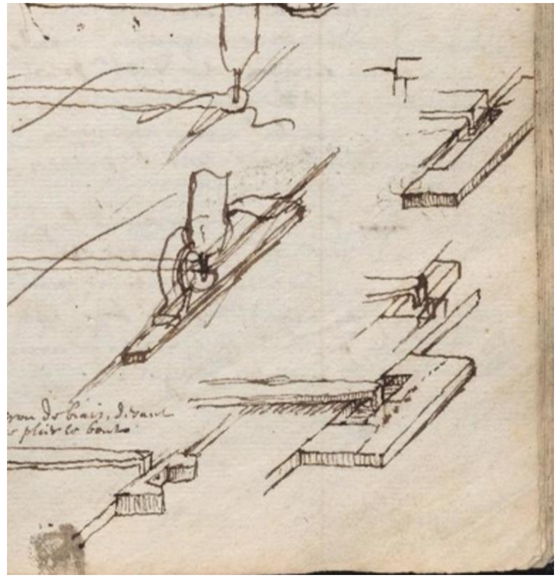
Tangente come proprietà *locale* (direzione della curva, microlinearità) e non *globale* (retta che interseca in un punto)

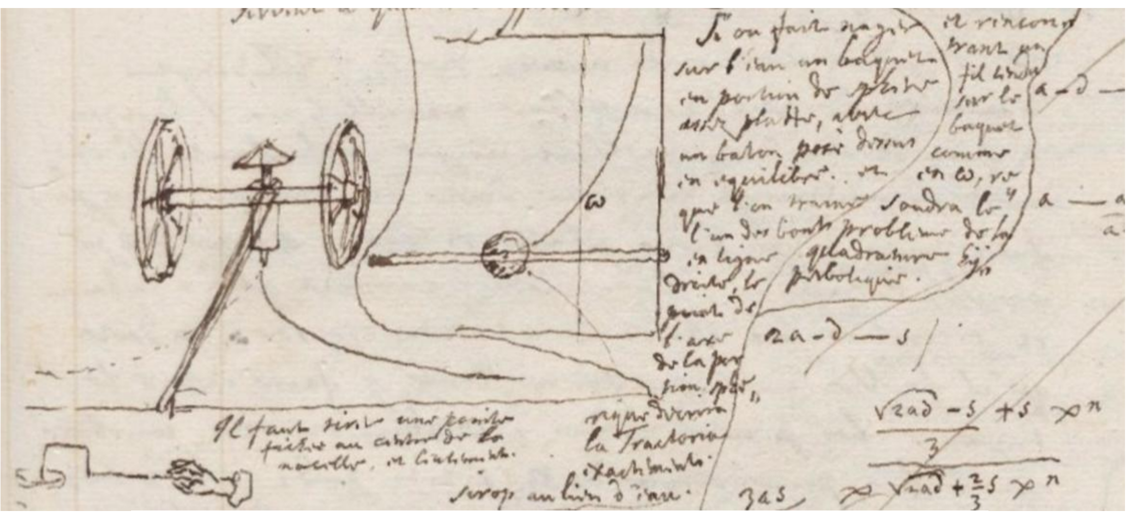
Controparte meccanica: **moto trazionale** (trazione del peso sul piano), all’infuori del canone cartesiano

Legittimazione *puramente geometrica*

Huygens e la trattrice







"La costruzione della macchina si basa sulla suddetta proprietà della tangente e su un principio o legge del movimento:
se trasciniamo un punto su un piano orizzontale, che per mezzo di un peso o in qualsiasi altro modo esercita una certa resistenza, e questo peso viene fissato a una corda o a un'asta inestensibile la cui estremità libera viene fatta avanzare, ***questo punto descrive una curva, alla quale la corda o l'asta saranno sempre tangenti***"

Hyugens, Lettre a Basnage de Bauval, Histoire des ouvrages Des Scavans, Février 1693, pp. 244-257.

Attività 2: Tagliare con forbici

Materiale: solo carta e penna
(esperimento mentale)

DEF. La «***direzione delle forbici***» è l'intersezione tra il piano del foglio e il piano delle forbici

Movimenti ammissibili per tagliare con le forbici: <u>**cambio direzione**</u> e <u>**chiusura lame**</u> (anche solo parziale). Non consideriamo l'apertura delle lame.

1. Disegna una curva da ritagliare in cui, in varie parti, si verifichino quante più possibili delle 4 combinazioni di movimenti della tabella. Evidenzia i punti/tratti in cui si verifica l'una o l'altra combinazione di movimenti e spiega perché.

Cambio direzione	Chiusura lame
NO	NO
NO	SI
SI	NO
SI	SI

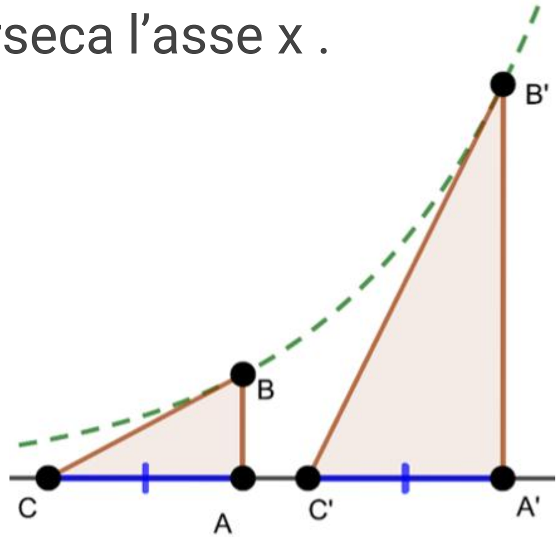
2. Cos'è la direzione delle forbici rispetto alla curva? Perché?

È nata prima la curva o la tangente?

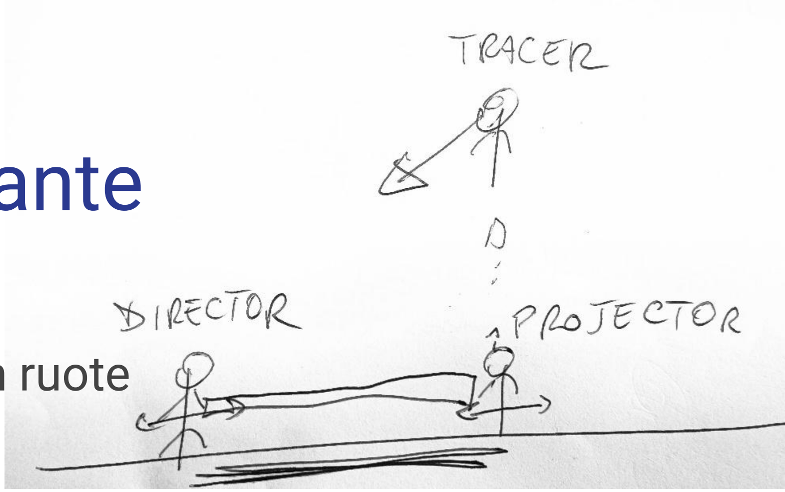
Prima di Perrault: **qual è la curva la cui sottotangente rimane costante**? (1638, de Beaune a Descartes)

Problema inverso della tangente teorico, senza controparte meccanica per generare la curva.

In un piano cartesiano, la *sottotangente di una curva in un punto B=(x,y)* è la distanza orizzontale tra la proiezione del punto sull'asse delle ascisse, cioè A=(x,0), e il punto C in cui la retta tangente alla curva in (x,y) interseca l'asse x .



Attività 3: Sottotangente costante

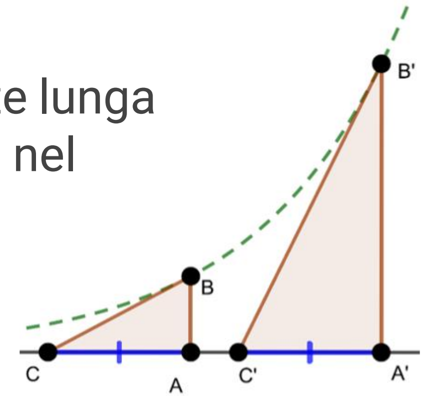


Materiale: carta e penna, filo, righello, puntatore con ruote

- **Traccia una curva con sottotangente costante lunga 10cm. Usa come ascissa il lato lungo del foglio e come tracciatore il puntatore con le ruote** *(lo schema per tracciare è in alto a destra)*


puntatore con ruote

1. Proseguendo, la curva interseca l'ascissa? Perché?
2. Considera le ordinate della curva quando le ascisse sono a 10cm di distanza (lunghezza della sottotangente). Quanto vale all'incirca il rapporto tra le ordinate? E' costante?
3. Se consideriamo un sistema di riferimento con sottotangente lunga una unità, quanto vale il coefficiente angolare della tangente nel punto della curva (x,f(x))?
4. Qual è la curva e perché?



La curva esponenziale

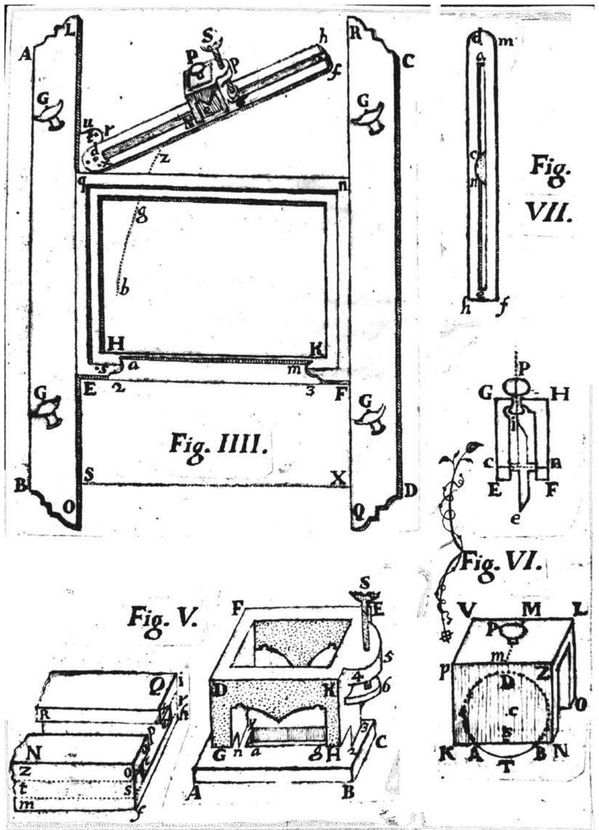
Descartes determinò correttamente la curva esponenziale, ma la escluse dalla geometria, ritenendo che si potesse costruire solo meccanicamente e con un procedimento soltanto approssimativo.

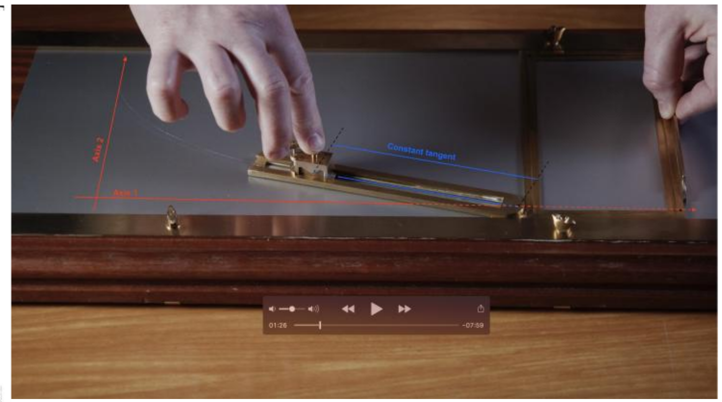
Leibniz criticò Descartes per aver considerate «non geometriche» le curve trascendenti, e considerò il moto trazionale come componente di macchine ideali per giustificare il «calcolo infinitesimale»

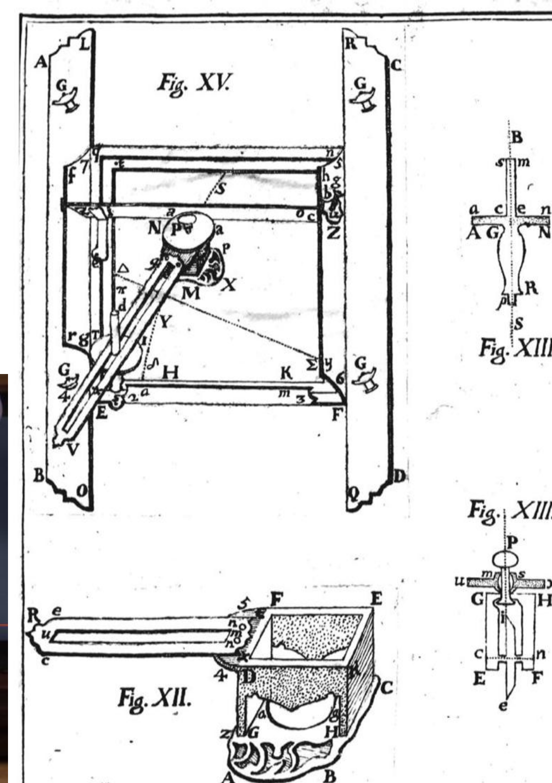
Macchine per trattrice e esponenziale

Passaggio dal peso alla ruota

Poleni (1729): Gabinetto di Filosofia Sperimentale (Padova)



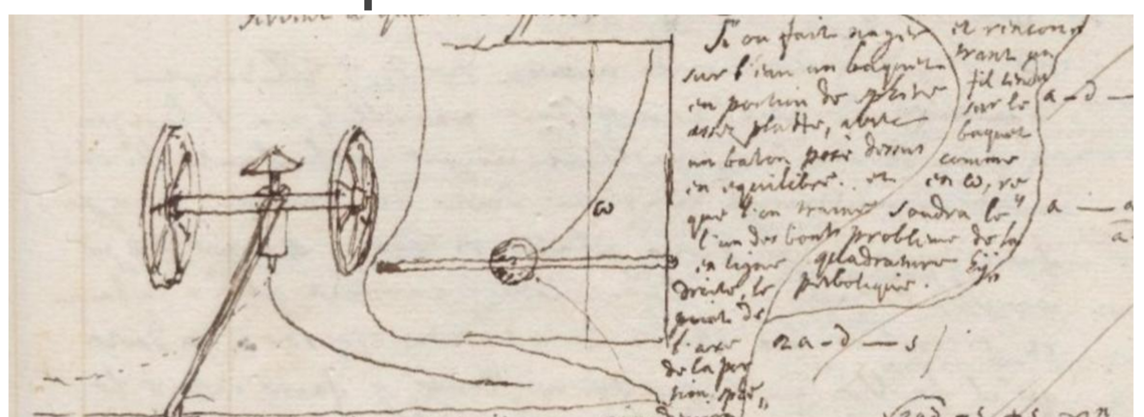




Riflessioni sulla ruota

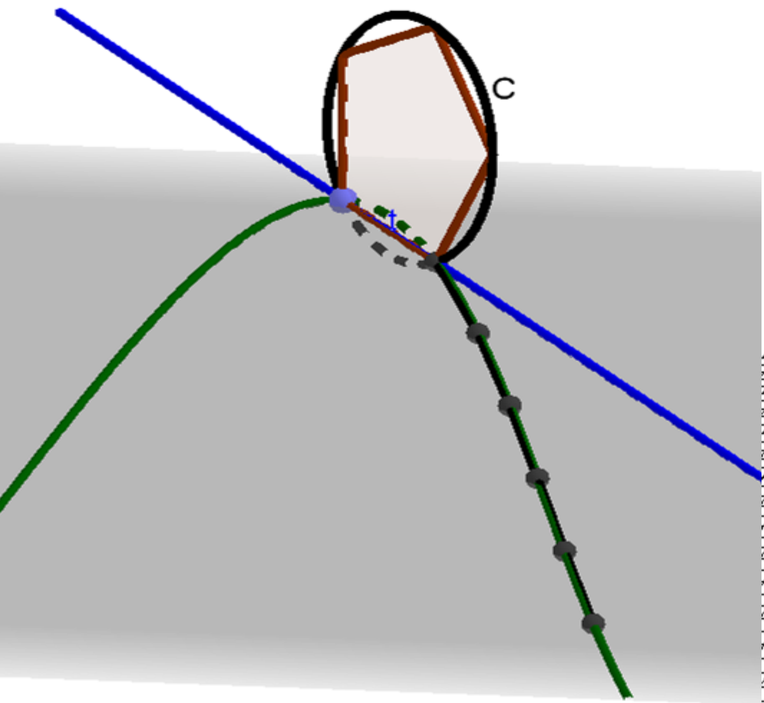
Data una ruota che rotola senza strisciare su un piano, la direzione della ruota è tangente alla curva tracciata dalla ruota

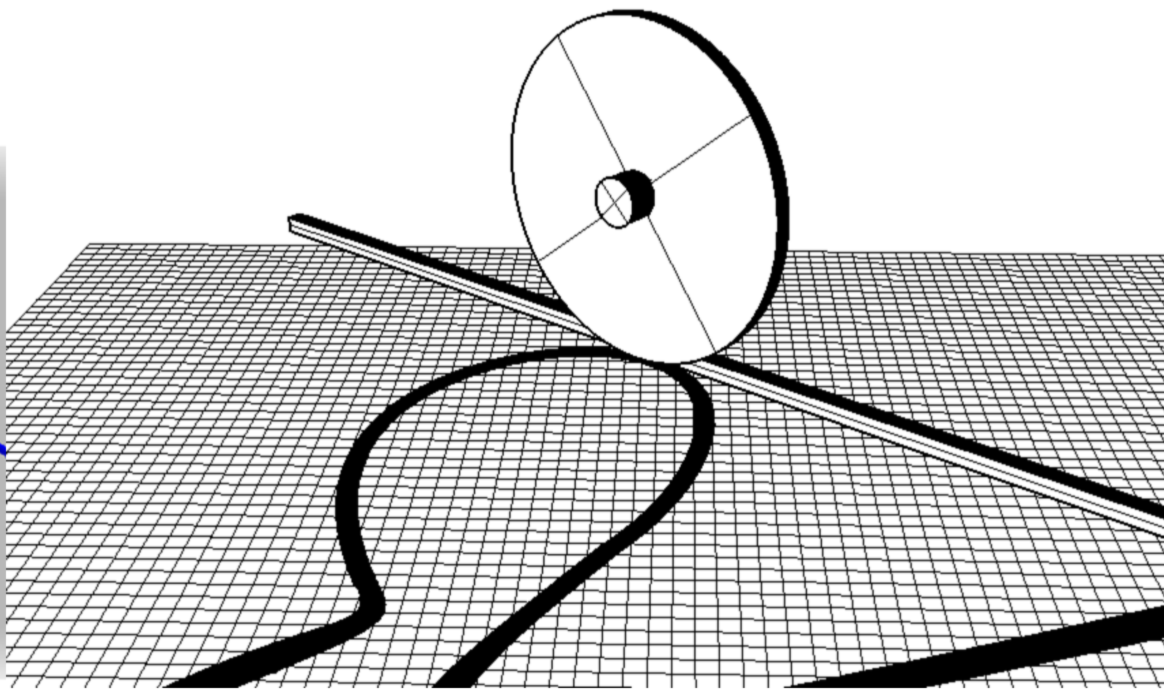
(Negli appunti di Huygens era visibile un “carretto”, ma era usato per tenere orizzontale il tracciatore, non per fare imporre la direzione alle ruote)



Considerando un poligono rotolare su una curva, sia la **direzione della figura** l’intersezione dei piani della curva e del poligono

Quando il cerchio (limite del poligono) rotola, la sua direzione sarà tangente alla curva in quanto limite delle secanti

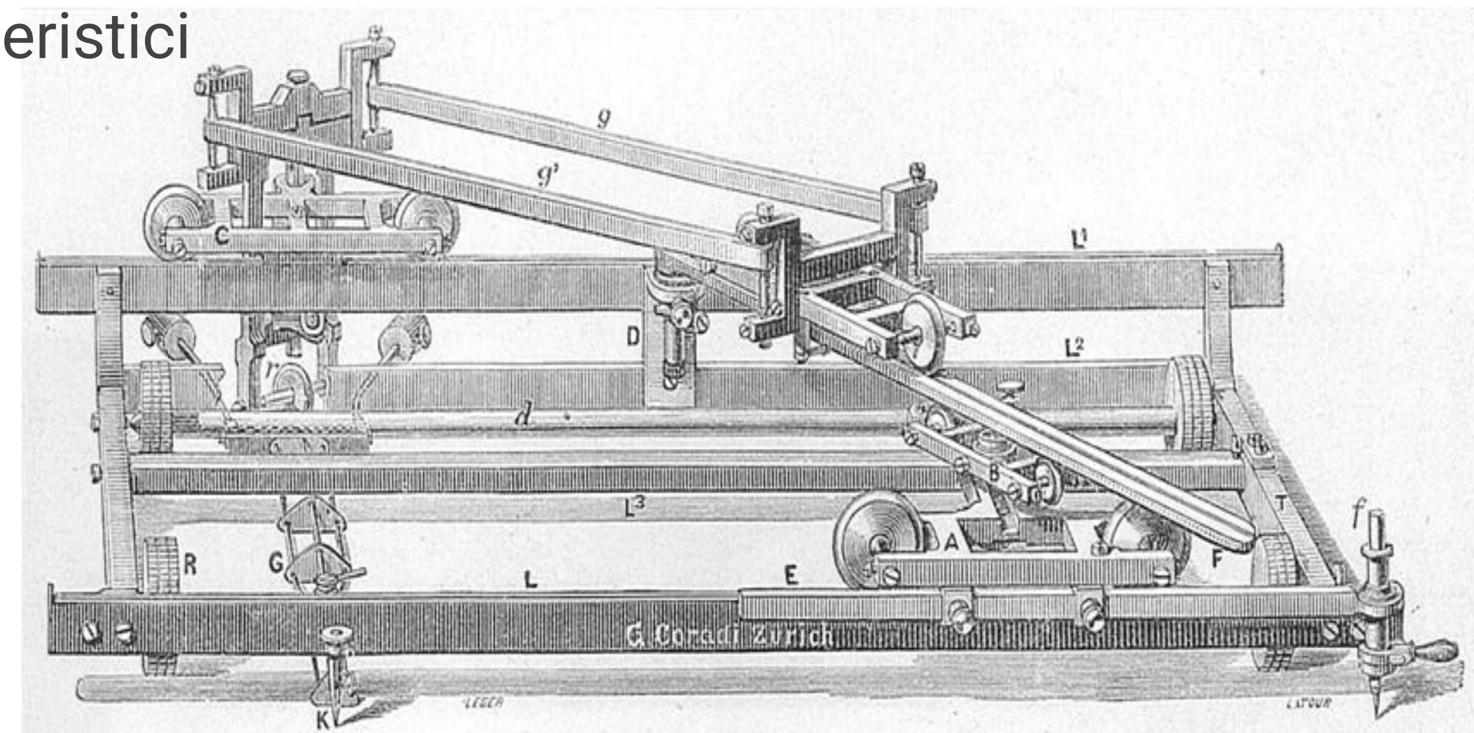




Oblio e rinascita

Dopo 1750: oblio del movimento trazionale (i matematici si abituano a definire anche gli oggetti trascendenti con equazioni)

Fine XIX sec. – inizi XX sec : rinascita indipendente degli strumenti trazionali (integrafi) - non per fini fondazionali ma pratico/ingegneristici



Oggi

uso didattico e divulgativo non solo di macchine esistenti ma anche nuove

- **attenzione alla semplicità del design** (per fare focalizzare sul *ruolo matematico delle componenti*)
- **nuove possibilità costruttive** (es. *stampa 3D*)

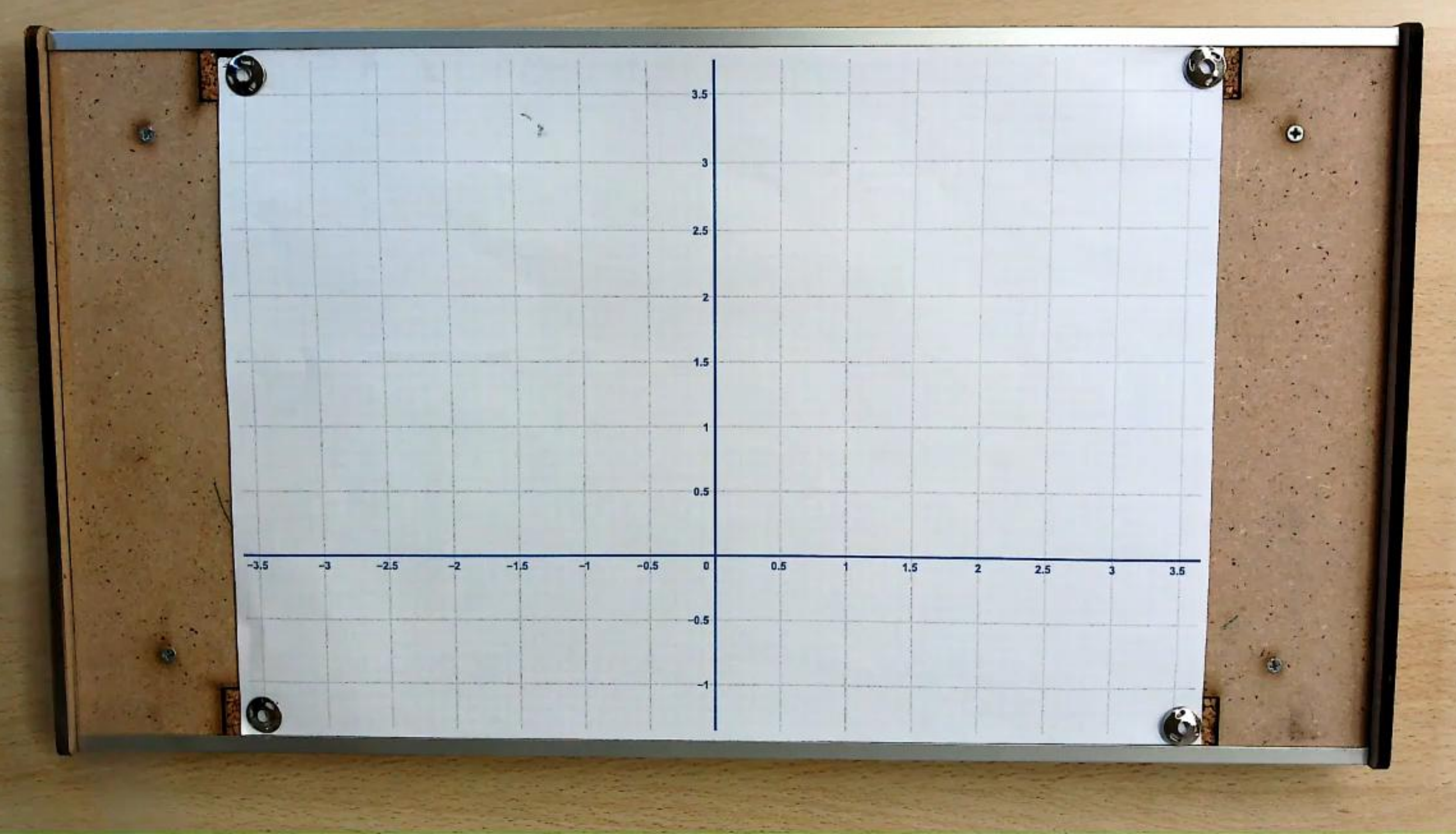
Una semplificazione e variazione degli integrafi per l'insegnamento dell'analisi (*brevettato*)

Attività 1: tangente (problema diretto/inverso)

https://www.youtube.com/watch?v=LMLt90R8zHA&list=TLGGUAQL-9C1Kt4yOTA5MjAyNQ

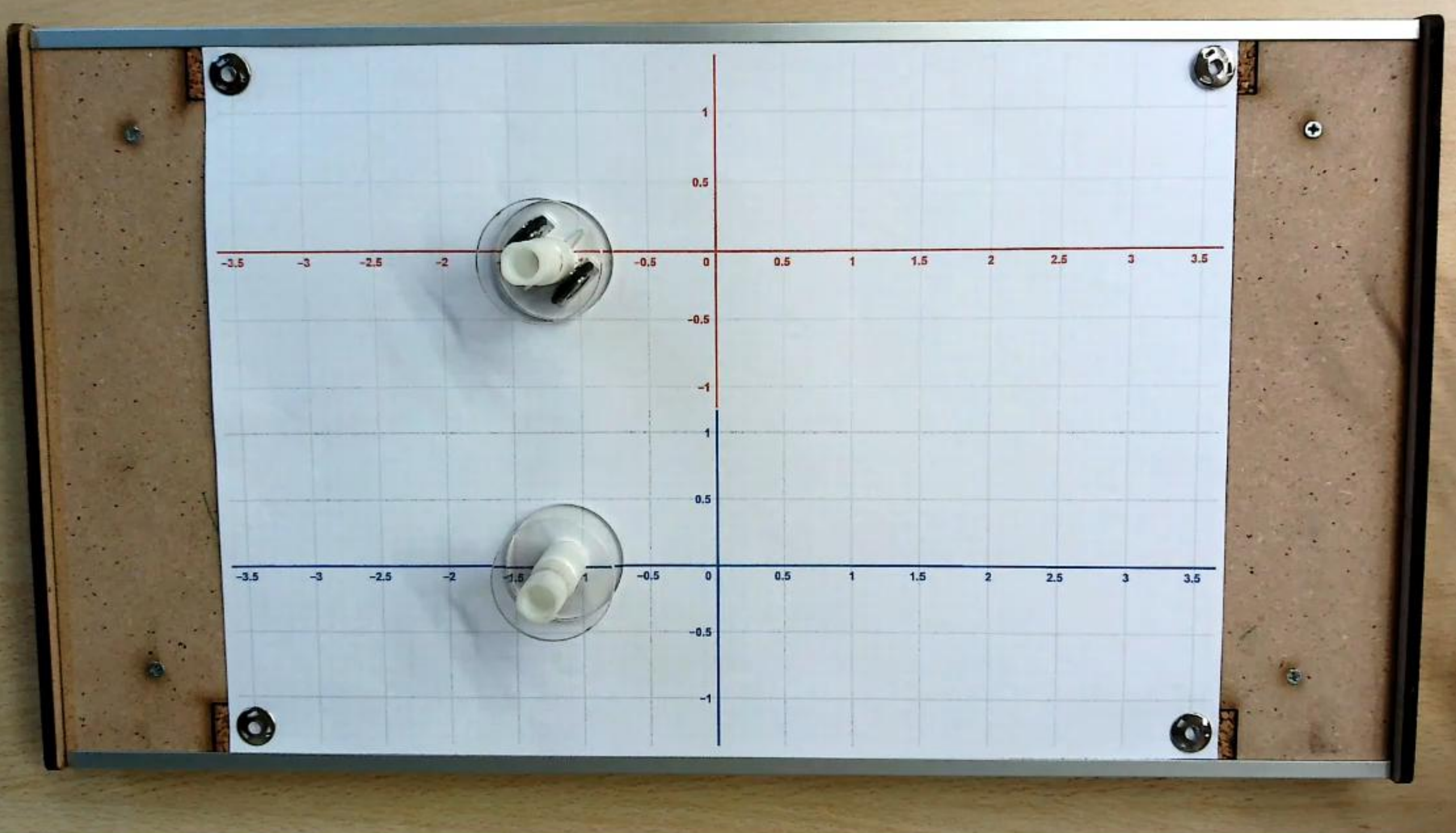
Attività 2: esponenziale

https://www.youtube.com/watch?v=kqtU9GpcN78&list=TLGGibiaQBVfpV0yOTA5MjAyNQ



Attività 3: derivate e primitive

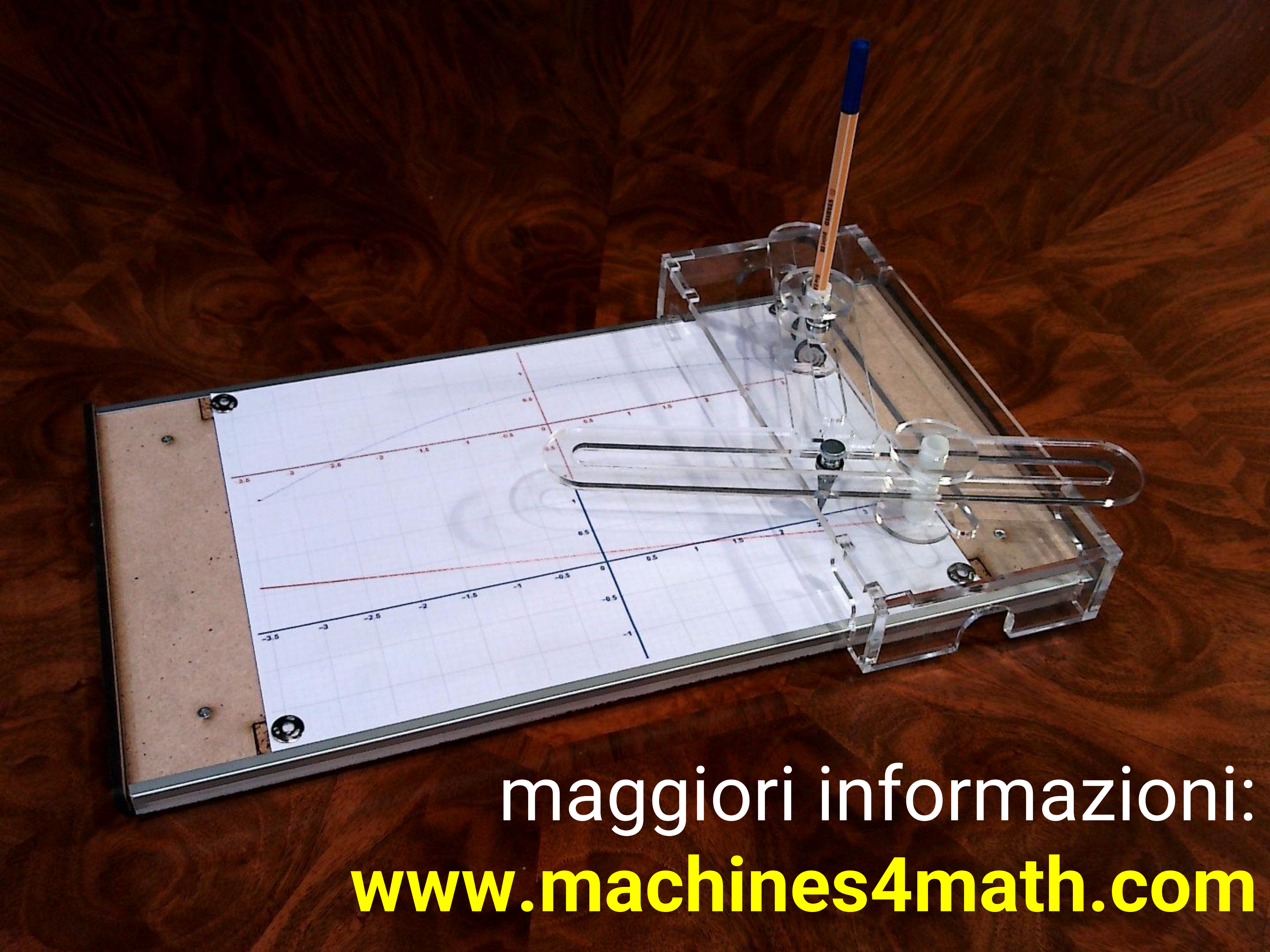
https://www.youtube.com/watch?v=TyxCAR317HE&list=TLGGCBPqYdNggTMyOTA5MjAyNQ



Riflessioni sul “nuovo” strumento

- Strumento che riunisce la visione del ’700 (tracciare curve) e degli integrafi
- Particolare attenzione alla *semplicità del design e a non nascondere nulla* (obiettivo didattico)
- Possibilità di percorsi che utilizzino solo alcuni pezzi del kit eventualmente assemblati in modi diversi – ***work in progress***

- Possibilità di integrare **storia**, **didattica** e **strumenti reali** per tematiche dell’*analisi infinitesimale*


maggiori informazioni:
www.machines4math.com