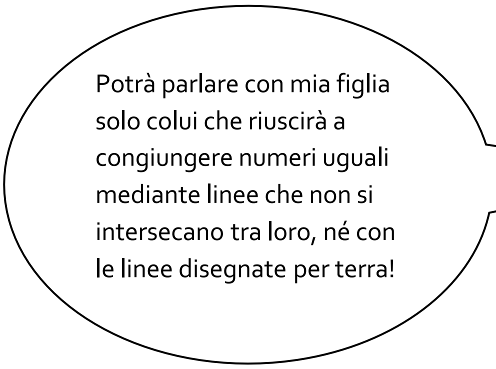
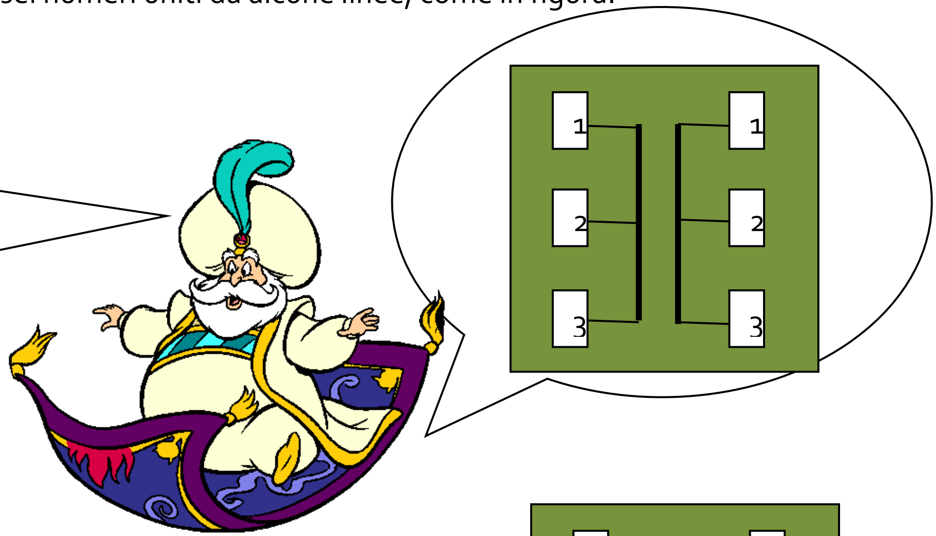
Roma- Università Tor Vergata- 24 settembre 2025

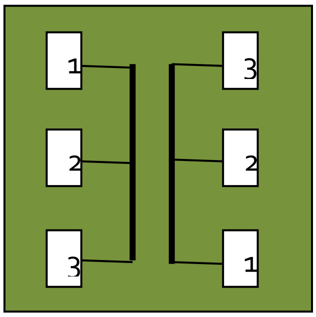
La ciambella che si credeva un toro

C'era una volta un sultano con una figlia bellissima che aveva tanti pretendenti. Egli allora prese, andò in giardino e disegnò per terra sei numeri uniti da alcune linee, come in figura.





Qualche tempo dopo…



Come si può facilmente immaginare, tutti i giovanotti riuscirono nell'impresa e continuarono ad intrattenersi con la principessa. Il padre, allora, stabilì che avrebbe sposato la principessa colui che avesse risolto di nuovo lo stesso problema nella situazione qui a fianco.

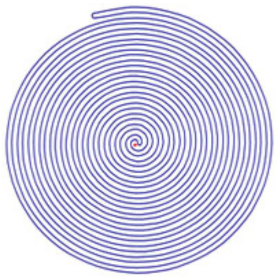
Volete provare voi?

Cosa credete succederà? **La figlia del sultano si sposerà o resterà *zitella***?

UN PO' Di TEORIA: il teorema di Jordan

C'è un teorema che ci viene in aiuto per risolvere le situazioni analizzate sopra. A prima vista il suo enunciato è abbastanza semplice.

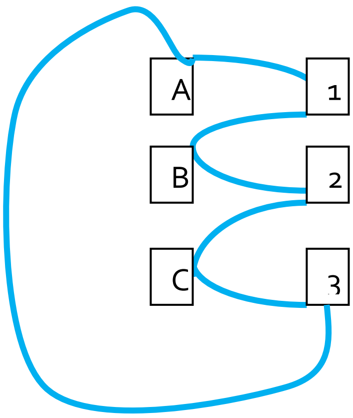
Teorema*: data una curva chiusa e semplice nel piano, essa divide il piano in due parti connesse. Per congiungere un punto della prima parte con uno della seconda bisogna attraversare la curva.* L'enunciato del teorema della curva di Jordan sembra ovvio, ma la sua dimostrazione non lo è per nulla. Il primo matematico che tentò di fornire una dimostrazione del teorema fu Bernard Bolzano, dopo di lui moltissimi altri matematici tentarono di darne una dimostrazione, incluso lo stesso Camille Jordan, ma nessuno riuscì a dare una dimostrazione soddisfacente; solo nel 1905 il matematico Oswald Veblen riuscì nell'intento. Dopo quella data furono trovate altre dimostrazioni.

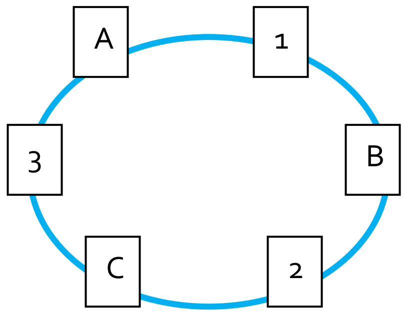


Nel problema del sultano sembra cruciale il fatto di **avere solo due dimensioni per passare**. Proviamo allora a vedere se la situazione migliora in tre dimensioni.

Le scamiciate

Una persona del gruppo indossa la scamiciata. Dovete poi collegare ognuno dei tre prof. a ognuno dei suoi obiettivi (caffè, orario, e studente interessato) senza che le linee si intersechino. Ricordatevi che avete anche la possibilità di passare dietro la schiena e, volendo, sulle bretelle dell'abito di carta. State attenti però: nel passare dietro, i tragitti non si debbono incrociare.
Per capire che cosa succede, e per quale motivo il problema è analogo a quello del sultano, considerate la seguente figura, dove ci sono disegnati sei dei nove collegamenti richiesti:

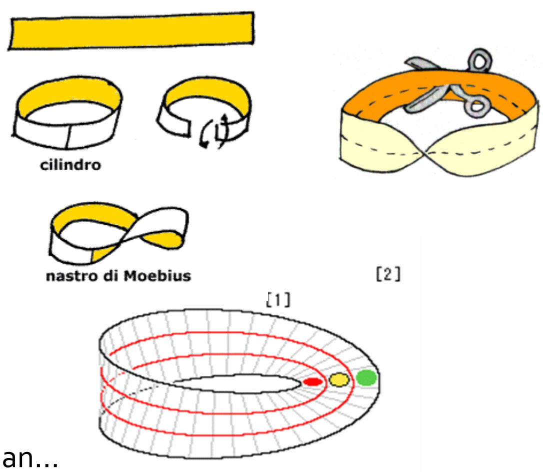




La scamiciata resta sempre suddivisa in due zone da una curva chiusa. Ora se colleghiamo A con 2 possiamo passare dentro, se colleghiamo B con 3 possiamo passare fuori, ma poi non c'è alcun modo di collegare C con 1. Vale ancora il teorema di Jordan

Ma allora il teorema di Jordan vale sempre??

Costruiamo una striscia di Moebius…



Prendete due cartoncini e incollateli come in figura. Tagliate poi in due entrambi i cartoncini.

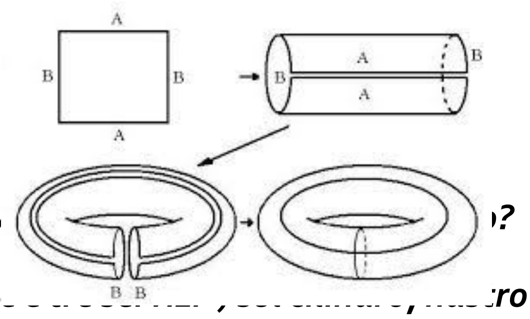
Che succede?

Ora proviamo a tagliare in tre pezzi la striscia Moebius così:

Che succede?

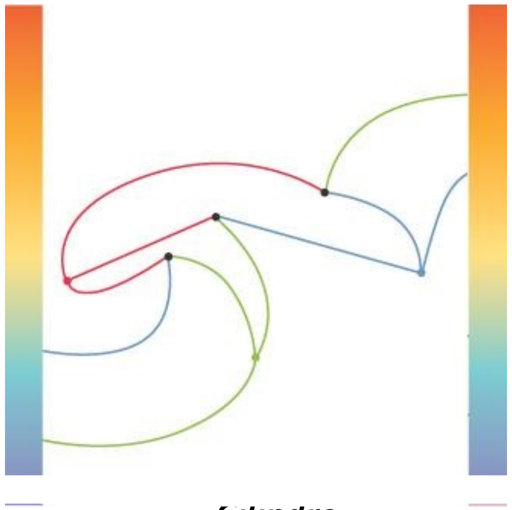
Per la striscia di Moebius NON vale il teorema di Jordan…

Potreste pensare che ciò dipenda dalla NON orientabilità, ma il teorema di Jordan NON vale neanche sul toro (che è la superficie costruita qui a lato)

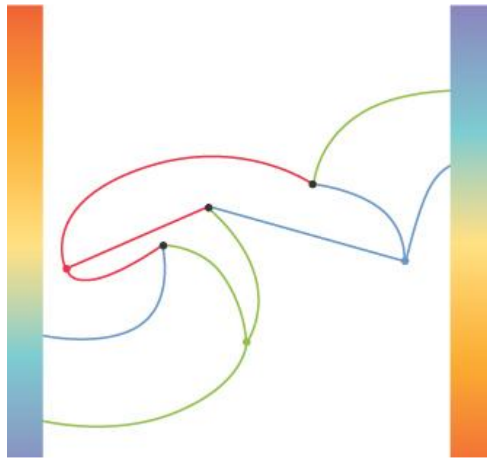


E che cosa succede ai professori sulla striscia di M ?

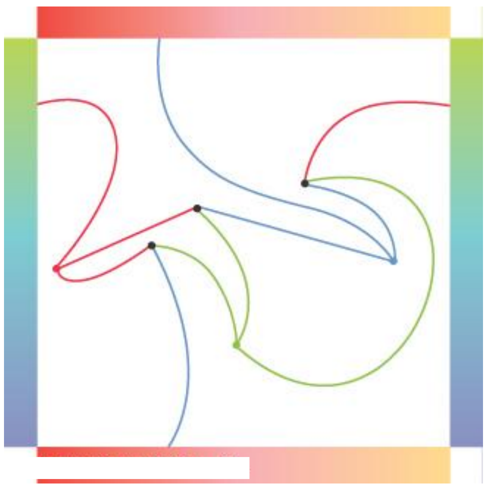
Interpretazione problema dei Professori ("tre cas ro di Moebius e toro. I bordi vanno pensati come se fossero incollati seguendo il colore indicato



Cilindro

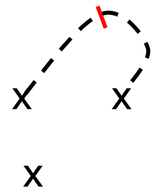


Nastro di Moebius



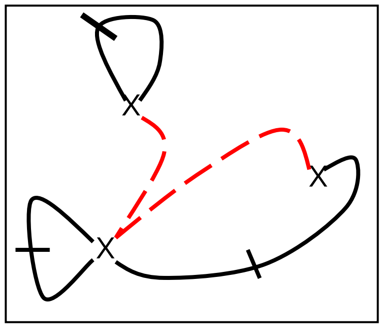
Toro

Ancora un gioco…



In questo gioco si parte da un certo numero di croci disegnate sul piano. Ogni croce ha quattro rami liberi e chi fa una mossa deve congiungere un ramo libero di una croce con un altro ramo libero (della stessa croce o di un'altra), come disegnato in figura (linea tratteggiata). In mezzo al tratto di penna disegnato si traccia poi un trattino che rappresenta altri due rami liberi (come quello in rosso in figura). La mossa passa all'altro giocatore. Perde chi non ha più rami liberi da collegare (ovviamente i rami non possono intersecare altri rami).

Il gioco è finito? C'è sempre qualcuno che vince o può finire in parità? C'è una strategia per vincere? (Queste sono sempre domande interessanti per un gioco: in matematica si parla di "teoria dei giochi").



Prima osservazione: il numero dei rami liberi resta sempre lo stesso.

Seconda osservazione: chiamiamo isola un insieme di croci collegate tra di loro da vari tratti e separate dal resto; chiamiamo regione una zona connessa del piano separate dal resto da una curva chiusa. Un nuovo tratto ha due possibilità: o congiunge due isole separate o crea una nuova regione. Quindi ogni volta che tracciamo un nuovo tratto o sale il numero delle regioni o diminuisce il numero delle isole. **Quindi r-i cresce di 1 ad ogni mossa**

Terza osservazione: se un tratto crea una nuova regione, allora il trattino che vi si disegna sopra sta per un pezzo dentro e per un pezzo fuori quindi ogni nuova regione ha un trattino che sta dentro.

Quarta osservazione: quando il numero delle regioni è uguale al numero dei trattini, vuol dire che ogni regione ha un trattino nel suo interno e quindi i trattini non sono più collegabili tra loro.

Dalla seconda osservazione e dal fatto che all'inizio ci sono n isole ed un'unica grande regione, si ha che dopo m mosse $r-i=1-n+m$ (da cui $r-i+n-m=1$=costante). Dalla terza osservazione si deduce che il numero dei bracci liberi deve essere maggiore o uguale a quello delle regioni: $4n\geq r$ e, poiché $i\geq 1$, si ha $r-i\leq 4n-1$ e quindi $1-n+m\leq 4n-1$ da cui $m\leq 5n-2$: il gioco termina sempre in massimo 5n-2 mosse!

Si può dimostrare che in effetti il gioco termina sempre in esattamente 5n-2 mosse (basta considerare il fatto che alla fine ci deve essere una sola isola ($i=1$) con un braccio libero all'interno di ciascuna regione ($r=4n$) e applicando la formula $r-i=1-n+m$).

Quindi…