



Ingranaggi e calcolo

Dagli ingranaggi alle calcolatrici meccaniche

Pomeriggi di primavera

Scuola di formazione in
Didattica della matematica e delle scienze

Marina Furlani¹

¹Ph.D. School, Dip. di Matematica, Università di Roma Tor Vergata

marina.furlani20@gmail.com

15 Marzo 2024



Introduzione

Gli ingranaggi sono presenti in oggetti di uso quotidiano e possono essere esaminati e compresi fin dai primi anni di vita, favorendo lo sviluppo di abilità esplorative, argomentative e metacognitive. Nelle attività proposte gli studenti sono incoraggiati a produrre e formulare ipotesi sul funzionamento di semplici sistemi di ingranaggi, consolidando l'acquisizione di importanti concetti matematici come il rapporto e la proporzionalità.

Capire i principi di base dei sistemi di ingranaggi può fornire una base per comprendere come funzionavano e operavano le calcolatrici meccaniche come la Pascalina. Questo tipo di conoscenza è importante per apprezzare lo sviluppo storico della tecnologia nel campo dei calcolatori e degli strumenti di calcolo.

La seconda parte del laboratorio avrà anche carattere storico: introdurremo brevemente la figura di Pascal e la sua macchina di calcolo, la pascalina, che egli progettò a 19 anni. Analizzeremo alcuni documenti in cui Pascal stesso presenta la sua invenzione e infine esamineremo una versione moderna della pascalina progettata a scopo didattico.

dalle “LINEE GUIDA PER LE DISCIPLINE STEM”

15 settembre 2023

Lo studio delle materie STEM permette di non “**subire**” la tecnologia che ci circonda: da Internet alla musica elettronica, dallo sport al cinema .

Tramite la cosiddetta “matematica del cittadino” si possono formare studenti capaci di interpretare i tempi moderni proiettandosi verso il futuro tecnologico.

La società attuale ci sommerge di informazioni non sempre veritiere. Compito della scuola è anche quello di far diventare tutti, nessuno escluso, cittadini consapevoli con un bagaglio di adeguate conoscenze scientifiche e capacità logiche-deduttive che li rendano in grado di distinguere il vero dal falso.

Si vuole raggiungere questo obiettivo, **insegnando la matematica in un modo non solo procedurale ma anche laboratoriale.**

Dalle Indicazioni Nazionali

Matematica

- Utilizzare il concetto di rapporto fra numeri o misure ed esprimerlo sia nella forma decimale, sia mediante frazione (Numeri)
- Esprimere la relazione di proporzionalità con un'uguaglianza di frazioni e viceversa (Relazioni e funzioni)

Tecnologia

- Valutare le conseguenze di scelte e decisioni relative a situazioni problematiche
- Utilizzare semplici procedure per eseguire prove sperimentali nei vari settori della tecnologia

Storia

- Usare fonti di tipo diverso (documentarie, materiali, orali, digitali...) per produrre conoscenze su temi definiti
- Formulare e verificare ipotesi sulla base delle informazioni prodotte e delle conoscenze elaborate
- Argomentare su conoscenze e concetti appresi usando il linguaggio specifico della disciplina

Descrizione delle attività



1

Ingranaggi

Costruzione e descrizione di sistemi di ingranaggi Lego



2

Pascal e la pascalina

Storia e descrizione della macchina addizionatrice di Pascal



3

New pascalina

Manipolazione e descrizione della pascalina a uso didattico

1) Gli ingranaggi

I meccanismi con ingranaggi sono molto comuni e costituiscono quindi un contesto noto per gli alunni. Per introdurre l'attività si invitano gli alunni a elencare oggetti di uso quotidiano il cui funzionamento dipende da questa tecnologia:

- strumenti da cucina come apriscatole, centrifuga per insalata, cavatappi, frullino
- bicicletta,
- correttore a nastro,
- mulini,
- orologi,
- giocattoli vari.

Un'attività introduttiva può consistere nel reperire strumenti di questo tipo, metterli a disposizione dei ragazzi e chiedere loro di descrivere la struttura e il funzionamento



Materiale per la costruzione degli ingranaggi



Ingranaggi con diverso numero di denti



Assi per inserire le ruote dentate



Braccia e connettori per l'assemblaggio degli ingranaggi

IN ALTERNATIVA:

1. avendo a disposizione una lasercut è possibile realizzare ingranaggi in legno o in materiale idoneo per la macchina progettando gli ingranaggi al sito https://woodgears.ca/gear_cutting/index.html
2. Ingranaggi georello

Attività 1a - ingranaggio di due ruote uguali

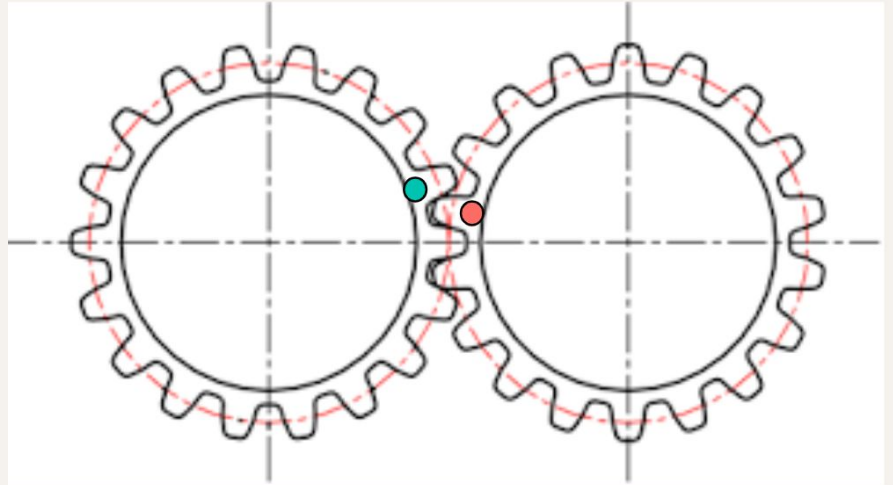
Animazione: https://woodgears.ca/gear_cutting/template.html



Perché la trasmissione del moto negli ingranaggi avvenga con continuità è necessario che i due denti di ciascuna coppia di ruote non si abbandonino prima che i due successivi siano venuti a contatto.

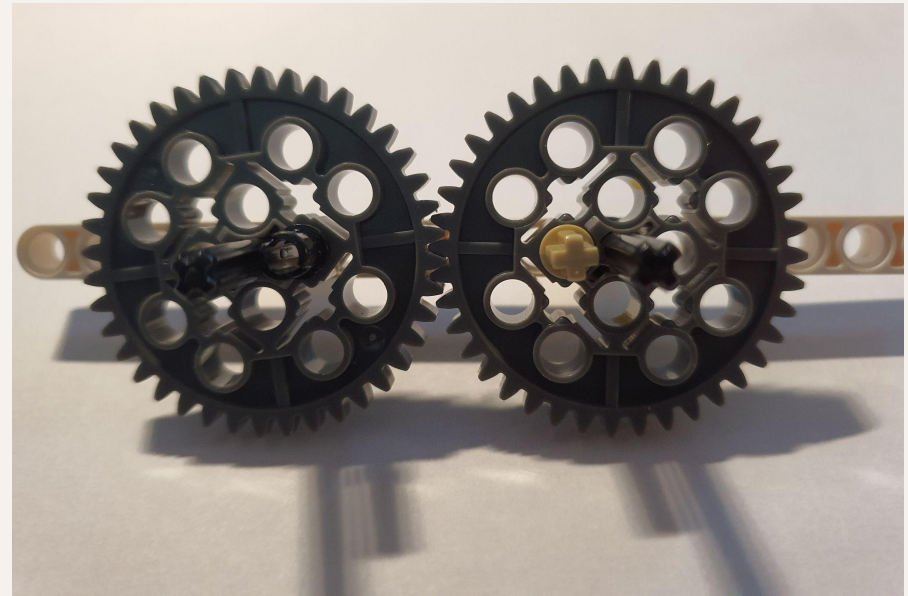
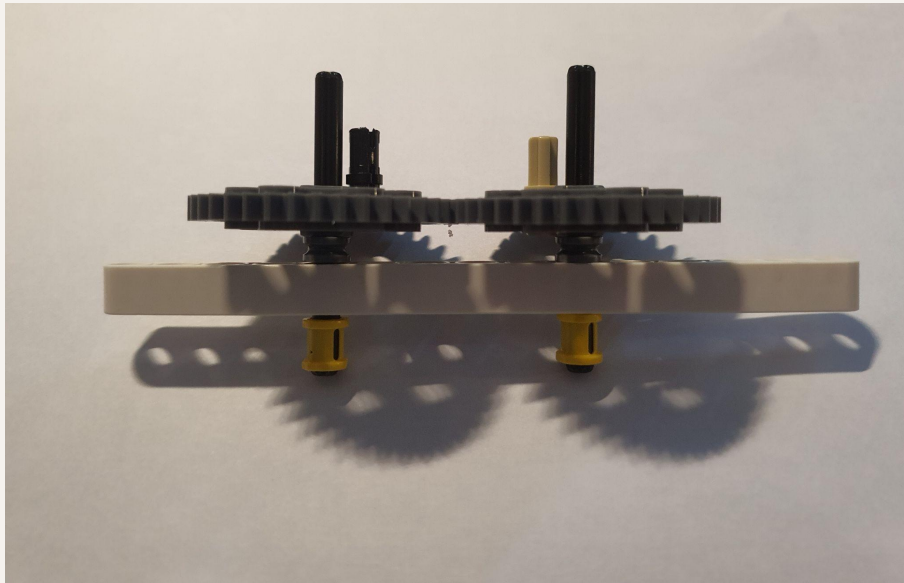
Attività 1a - ingranaggio di due ruote uguali

1. Descrizione della procedura di assemblaggio e del funzionamento del sistema
2. Osservazioni sulla velocità
3. Osservazioni sul verso
4. Cambiando verso alla ruota motrice cosa osservi?



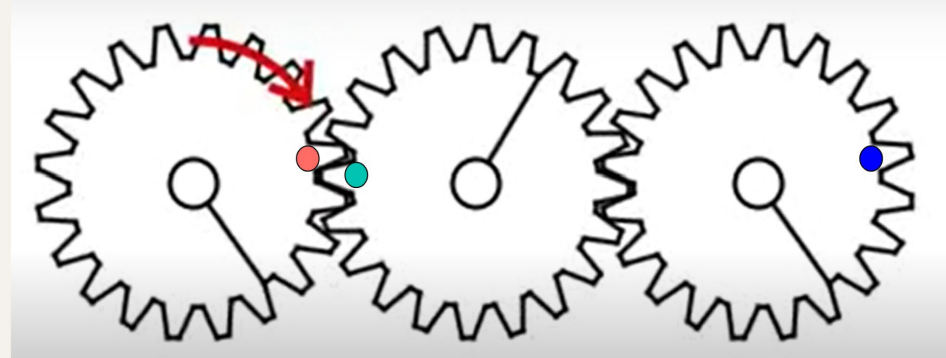
Suggerimento: per l'osservazione del moto reciproco evidenziare un dente per ciascuna ruota

Attività 1a - ingranaggio di due ruote uguali



Attività 1b - ingranaggio di 3 ruote uguali

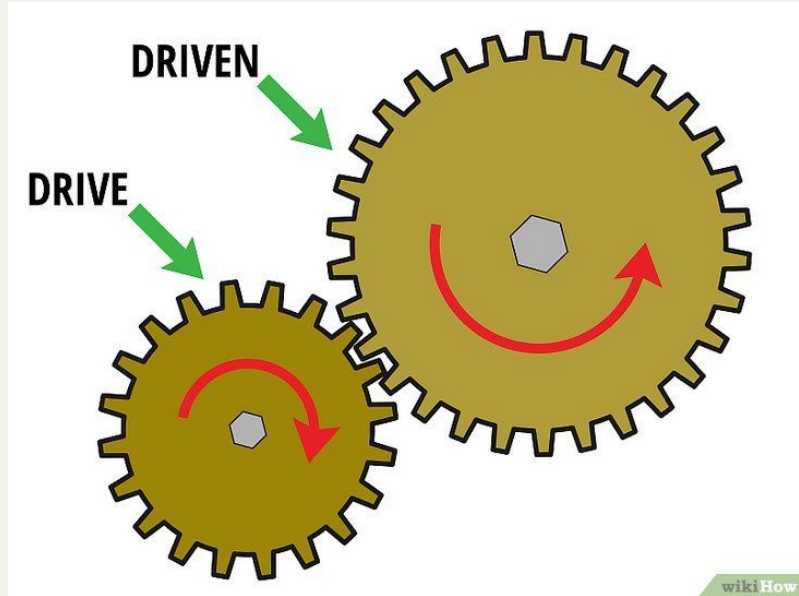
1. Descrizione della procedura di assemblaggio e del funzionamento del sistema
2. Osservazioni sulla velocità
3. Osservazioni sul verso
4. Cambiando verso alla ruota motrice, cosa succede?
5. Esiste una posizione reciproca delle ruote in cui il sistema si blocca: trovalo e spiega perché
6. Prova a generalizzare il comportamento osservato in funzione di un sistema di n ruote identiche allineate



Suggerimento: per l'osservazione del moto reciproco evidenziare un dente per ciascuna ruota

Attività 2 - ingranaggio di due ruote diverse

1. Scegliere una coppia di ruote diverse
2. Osservazioni sulla velocità
3. Osservazioni sul verso
4. Come fare per descrivere quantitativamente il moto reciproco di una ruota rispetto all'altra
5. Ripetere le osservazioni cambiando la coppia di ruote



Suggerimento: per l'osservazione del moto reciproco evidenziare un dente per ciascuna ruota

La trasmissione del moto in un sistema di ruote dentate

Gli ingranaggi, basati sull'accoppiamento di ruote dentate possono essere usati per aumentare o diminuire le velocità di rotazione e invertire il senso di rotazione o anche per superare le distanze tra l'azionamento e l'uscita.

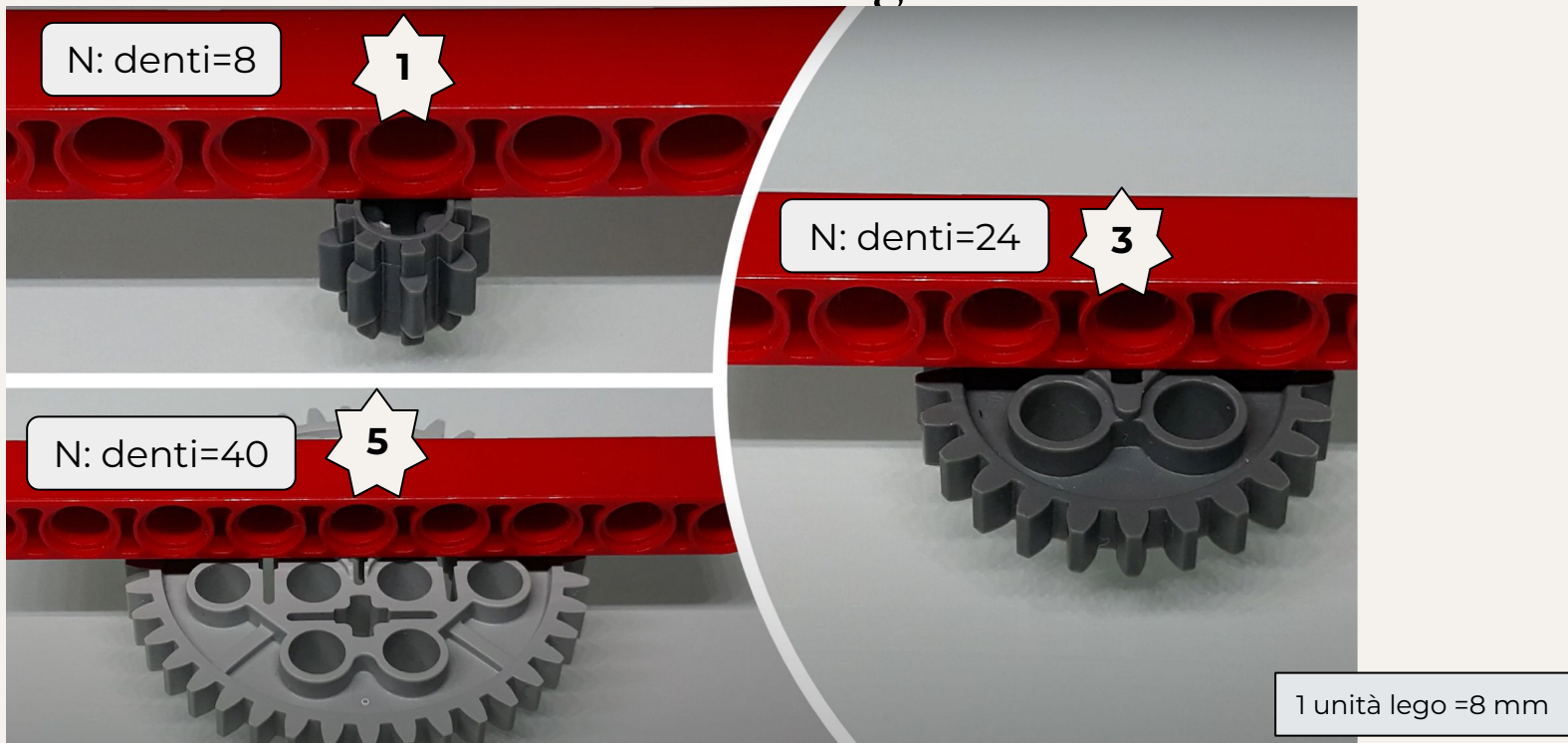
In una ruota dentata i denti sono distribuiti uniformemente su tutta la circonferenza: ogni dente occupa un arco della stessa lunghezza. Maggiore è il diametro e più denti ci sono. Per ogni ruota dentata vale la relazione

$$nd = 2\pi r$$

- n = numero di denti
- d = lunghezza arco associato a ogni dente
- r = raggio della ruota dentata

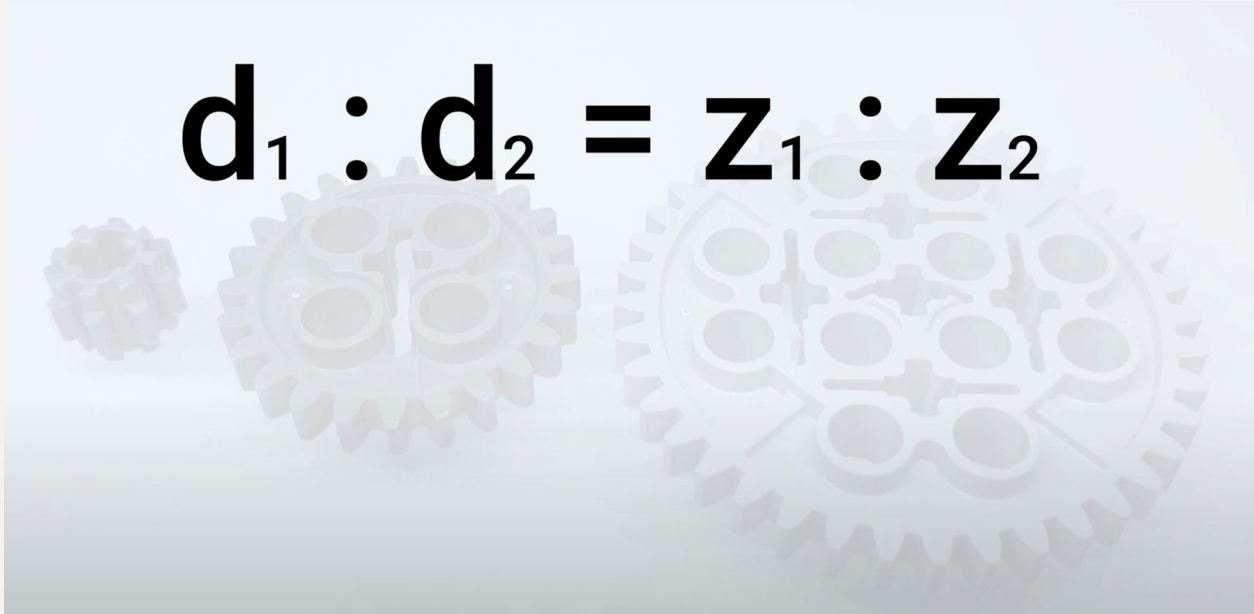
Esiste una proporzionalità diretta tra numero di denti e raggio della ruota, perchè per permettere l'ingranaggio fra una ruota e l'altra la larghezza di un dente deve essere sempre la stessa.

Proporzionalità diretta tra numero di denti e diametro in ruote dentate Lego



Proporzionalità **diretta** tra **diametro d** e **numero di denti z**

$$d_1 : d_2 = z_1 : z_2$$



La trasmissione del moto in un sistema di ruote dentate

Quando due ruote dentate si ingranano, i denti di una ruota si inseriscono nei vuoti tra i denti dell'altra ruota, permettendo il trasferimento del moto.

Questo fenomeno è definito attraverso il rapporto di trasmissione cioè il rapporto tra il numero di denti delle due ruote. Se le ruote sono diverse, la ruota con meno denti girerà più velocemente. Per esempio, se abbiamo un ingranaggio con una ruota A con 20 denti e una ruota B che ha 40 denti, il rapporto di trasmissione sarà di 2 : 1. Ciò significa che per ogni giro completo della ruota A, la ruota B compirà solo la metà di un giro.

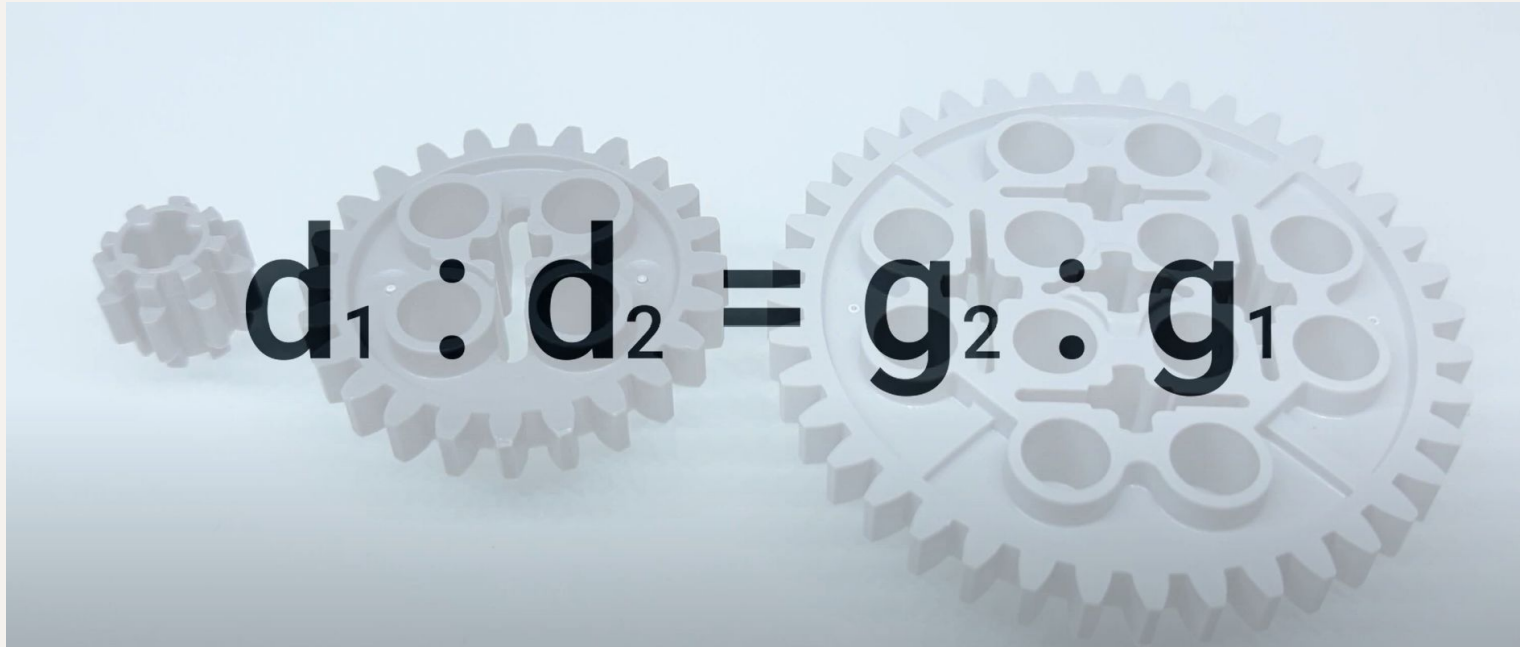


Proporzionalità INVERSA tra numero di denti e numero di giri in ruote dentate Lego

<https://www.youtube.com/watch?v=1K1CDD9Yggo>



Proporzionalità **inversa** tra **diametro d** e **numero di giri g**



.. complessivamente

Proporzionalità diretta

$$d_1 : d_2 = z_1 : z_2 = g_2 : g_1$$

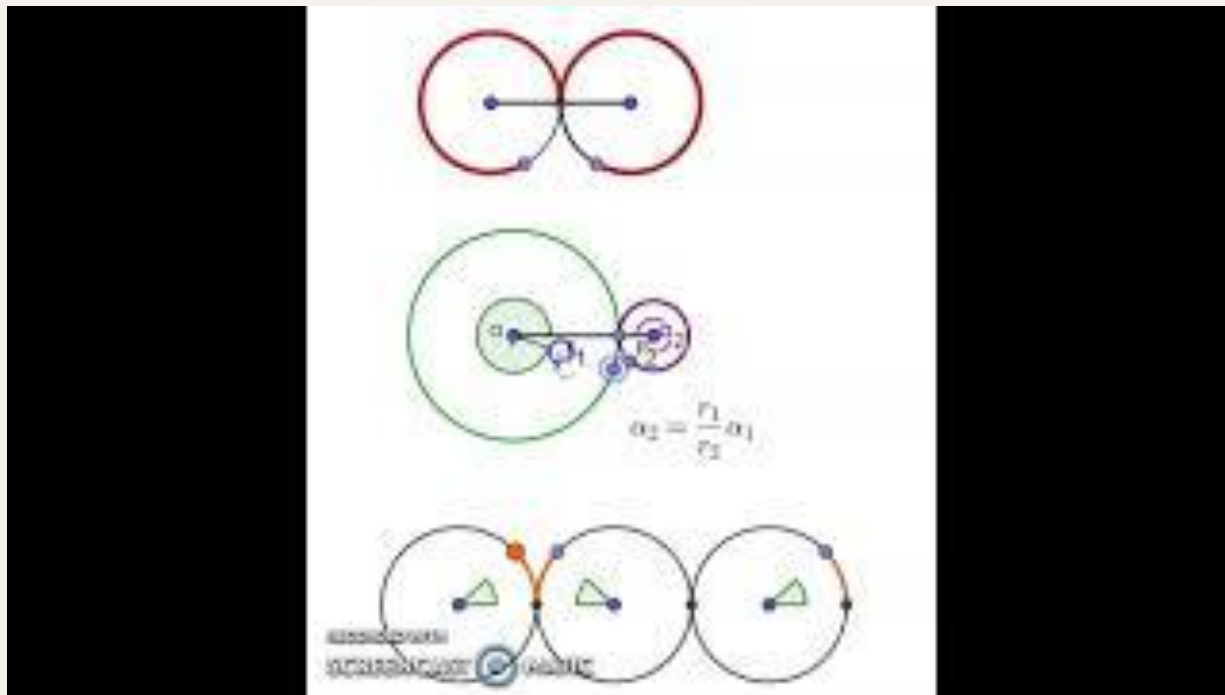
diametri

Numero di denti

Numero di giri

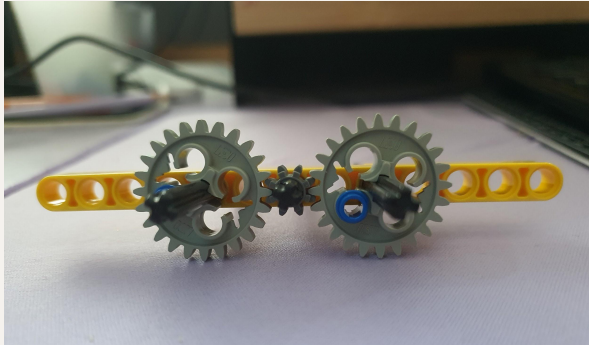
Proporzionalità inversa

.....con
geogebra

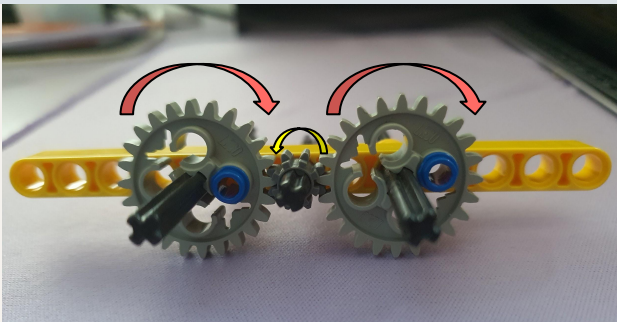


Ingranaggi sul piano
<https://www.geogebra.org/classic/tjavvgfp>

Attività 1b - ingranaggio di 3 ruote diverse



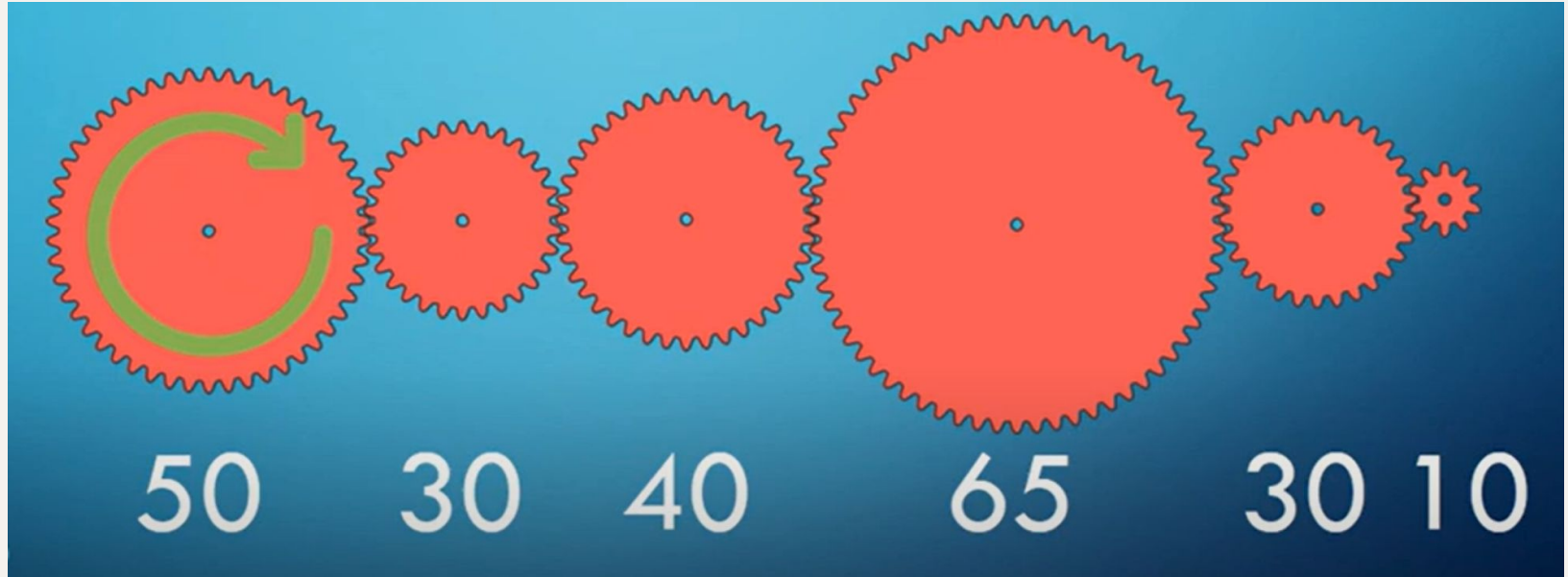
Dopo mezzo giro della ruota grande...



Quando si lavora con un sistema di trasmissione che prevede più di due ingranaggi, si devono considerare sola prima e l'ultima ruota; gli ingranaggi di rinvio non influenzano il rapporto di trasmissione finale, ma influenzano solamente il verso di rotazione

$$\frac{8}{24} \times \frac{24}{8} = 1$$

Indovinello



- In quale verso si muove l'ultima ruota?
- Quando la prima ruota compie un intero giro, quanti giri ha fatto l'ultima?

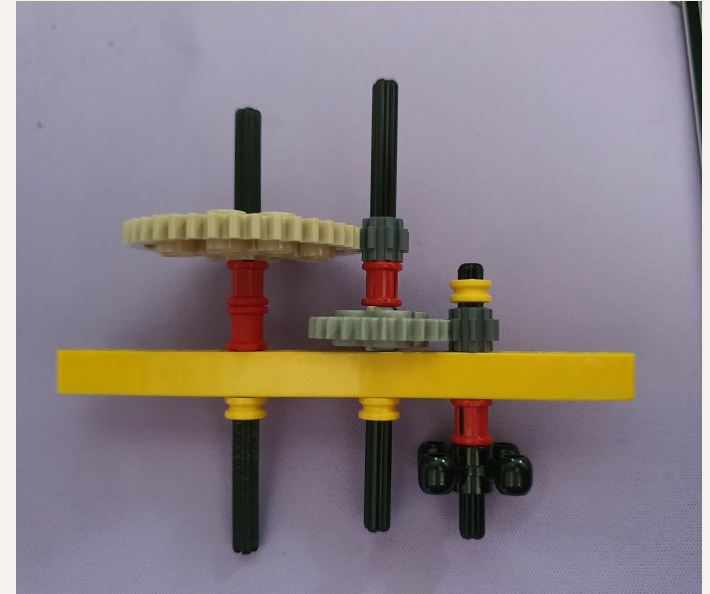
Attività 3: ingranaggio con cambio a più stadi

Scopo della costruzione: amplificare la variazione di velocità nel sistema di ruote.

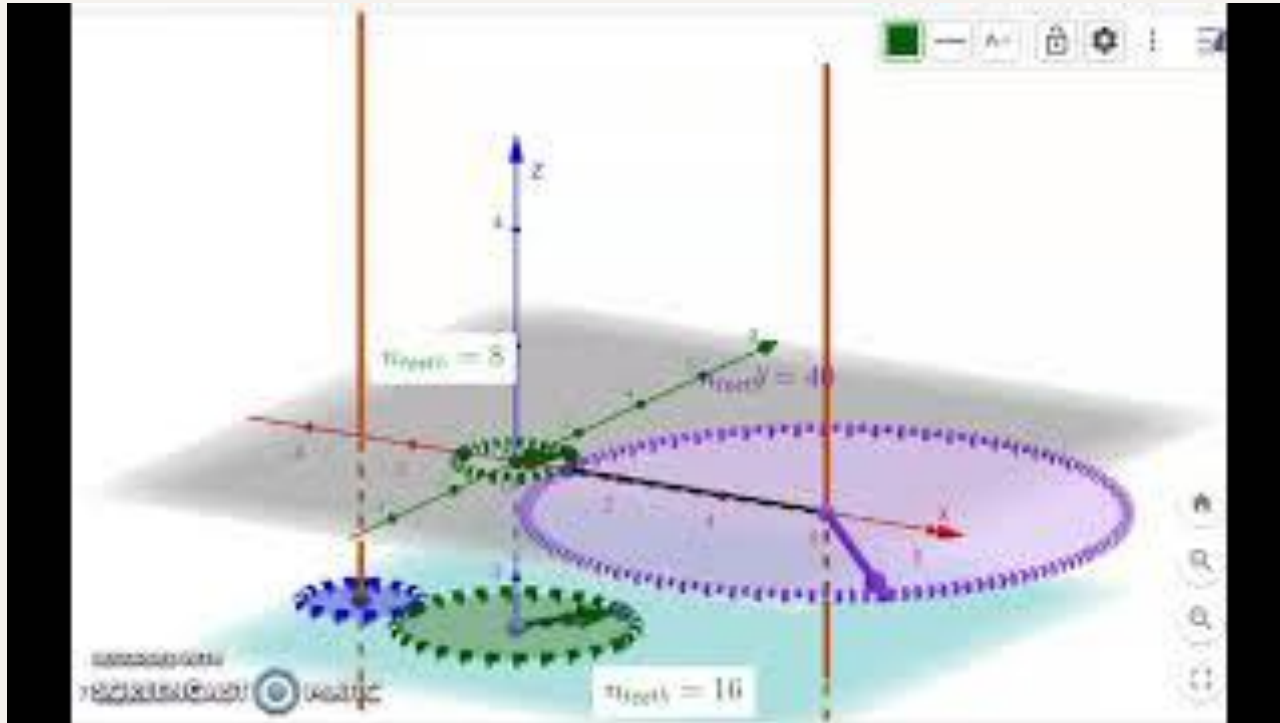
I rapporti di trasmissione tra due ruote non possono essere arbitrariamente grandi. Di solito non sarà maggiore di 1 : 6. Se si desidera un rapporto di trasmissione più elevato si utilizza almeno un secondo stadio.

Il cambiamento di velocità realizzato nella prima coppia di ruote dentate si trasmette inalterato alla piccola ruota inserita nello stesso asse che trasmette poi un secondo cambio di velocità alla ruota grande che si trova sullo stesso piano in alto.

$$\frac{8}{24} \times \frac{8}{40} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{15}$$



Attività 3: ingranaggio con cambio a più stadi



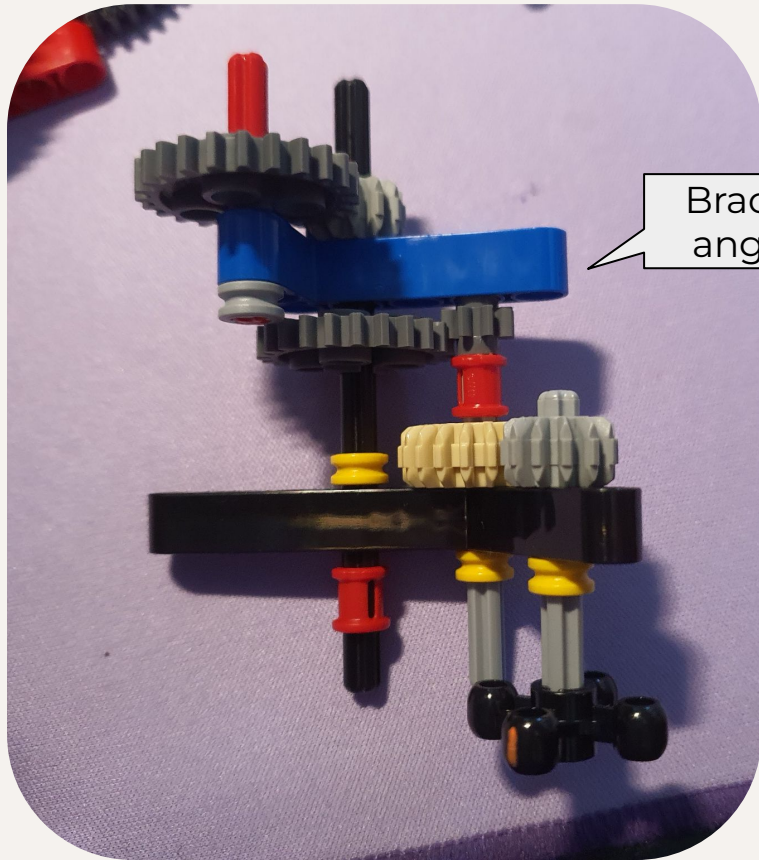
Simulazione
con
geogebra 3D

Rapporti di trasmissione con ruote dentate Lego Technic

n. der	8	12	16	20	24	36	40	su braccio lungo	n. der	8	12	16	20	24	36	40	su braccio 90°	n. dent	8	12	16	20	24	36	40	su braccio 120°
8	1 a 1				1 a 3		1 a 5		8			1 a 2*						8	1 a 1			2 a 5	1 a 3	2 a 9	1 a 5	
12			3 a 5		1 a 3				12				1 a 2			3 a 10**		12		3 a 4	3 a 5			1 a 3		
16		1 a 1							16	1 a 2*		4 a 5		4 a 9**				16		3 a 4	1 a 1			4 a 9**	2 a 5	
20	3 a 5								20		4 a 5				1 a 2**			20	2 a 5	3 a 5			5 a 6	5 a 9	1 a 2	
24	1 a 3			1 a 1		3 a 5			24	1 a 2								24	1 a 3			5 a 6	1 a 1	2 a 3	3 a 5	
36	1 a 3								36		4 a 9**		2 a 3**					36	2 a 9	1 a 3	4 a 9**	5 a 9	2 a 3	1 a 1	2 a 3**	
40	1 a 5			3 a 5		1 a 1			40		3 a 10**	1 a 2*	2 a 3**					40	1 a 5		2 a 5	1 a 2	3 a 5	2 a 3**		

* gira con difficoltà

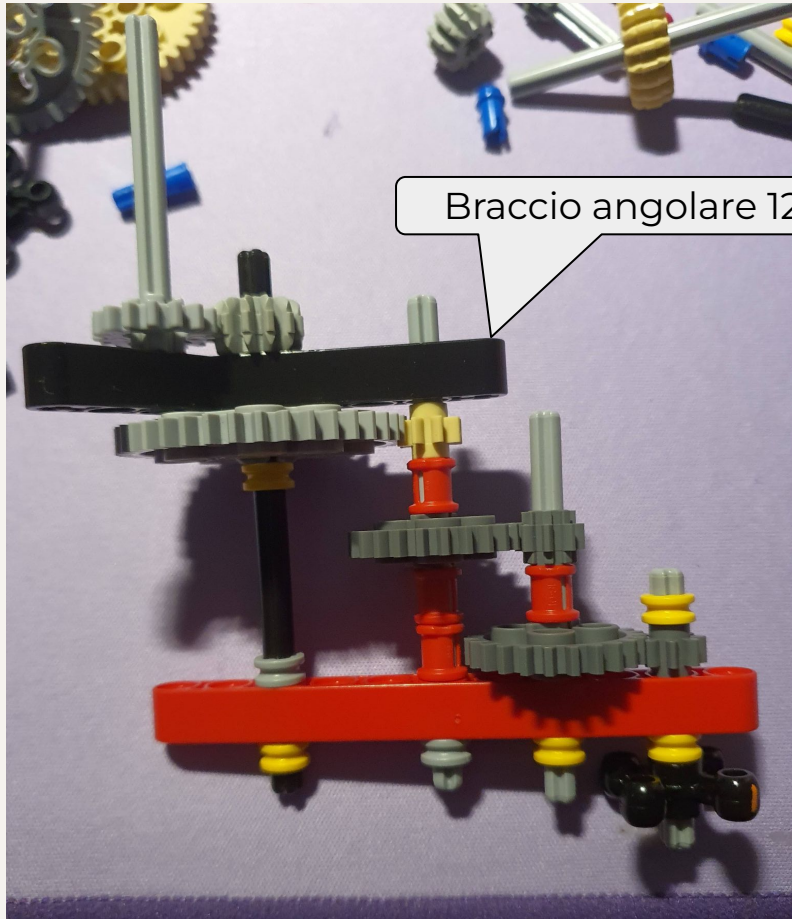
** la ruota meno spessa va alzata con 1/2 bush



Braccio con
angolo 90°

Treno di ingranaggi per realizzare il rapporto 1:10

$$\frac{12}{20} \times \frac{8}{24} \times \frac{12}{24} = \frac{3}{5} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{10}$$



Treno di ingranaggi per realizzare il rapporto 1:60

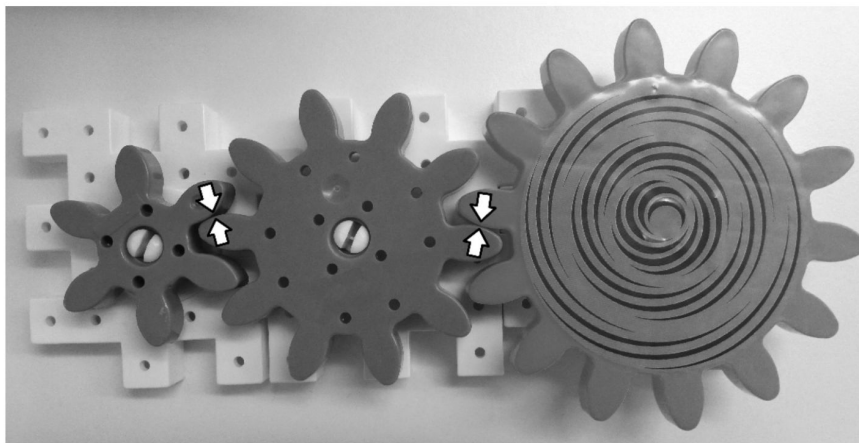
$$\frac{8}{24} \times \frac{8}{24} \times \frac{8}{40} \times \frac{12}{16} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{60}$$

Un problema dal RMT

15. RUOTE DENTATE (Cat. 7, 8, 9, 10)

Marcello ha un gioco di costruzioni con alcune ruote dentate. Sperimenta il montaggio di tre ruote: una piccola, una media e una grande.

All'inizio del suo esperimento segna con una freccia quattro denti di queste ruote (come si vede nella figura)



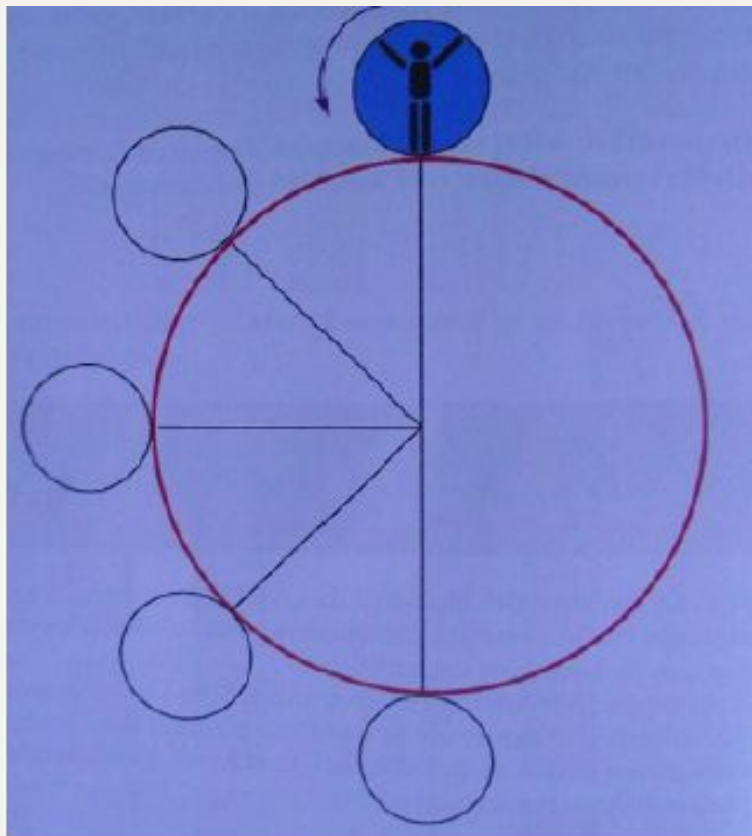
Marcello comincia poi a girare la ruota dentata media.

Di quanti giri, al minimo, Marcello dovrà girare la ruota dentata media affinché le coppie di frecce siano di nuovo riunite come si vede nella figura qui sopra?

Spiegate il vostro ragionamento.

<https://www.icsedegliano.it/sezioni/rmt/prove/1718/1/26RmtProva1Udine.pdf>

Un problema dalla raccolta Kangourou della Matematica



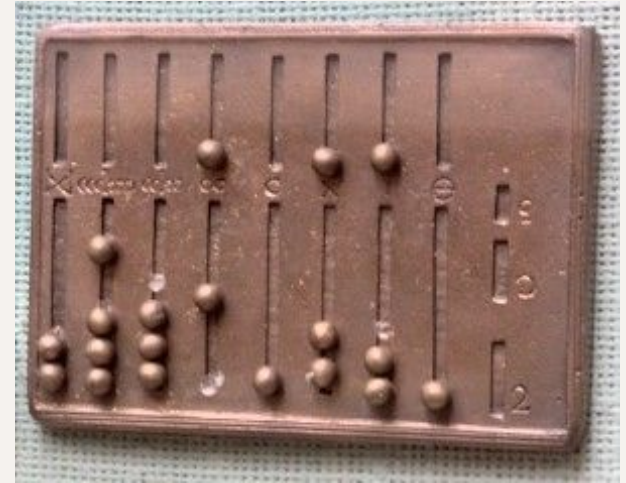
In una giostra un acrobata è attaccato a una piccola ruota dentata di 1 metro di raggio: la piccola ruota gira attorno a una grande ruota di raggio 4 metri.

- Disegna il corpo dell'acrobata stilizzato in ogni dei 4 piccoli cerchi rappresentati nella figura.
- Quanti giri su se stesso l'acrobata avrà fatto, per tornare con la ruota nella posizione iniziale?

La storia degli strumenti di calcolo - l'abaco

Fin dall'antichità, sia scienziati che mercanti hanno dovuto affrontare calcoli aritmetici, spesso ripetitivi. La necessità di accelerare tali operazioni e minimizzare gli errori ha stimolato lo sviluppo di tecniche e strumenti per il calcolo.

Inizialmente, uno strumento comune utilizzato a tal fine era l'abaco, risalente al V secolo a.C. I numeri venivano rappresentati tramite la posizione dei gettoni in diverse colonne, ciascuna delle quali corrispondeva alle unità, alle decine o alle centinaia di un numero. Le operazioni di somma e sottrazione venivano eseguite spostando i gettoni, con il risultato rappresentato dalla nuova disposizione di questi ultimi.



La storia degli strumenti di calcolo l'abaco giapponese - soroban

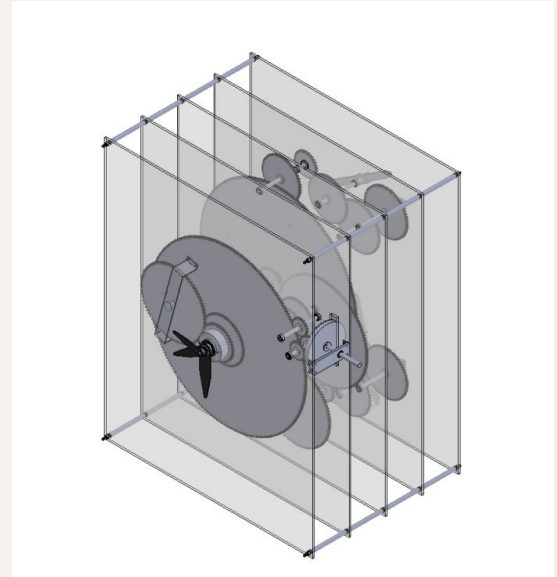


Un'entusiasmante gara tra l'abaco giapponese (Soroban) e la calcolatrice elettrica (Friden ST 10) si tenne a Tokyo il **12 novembre 1946**, sotto il patrocinio del quotidiano dell'esercito americano, Stars and Stripes. Kiyoshi Matsuzaki, impiegato presso l'Amministrazione postale con il suo abaco superò il contabile americano Thomas Nathan Wood che usò la calcolatrice ed era stato selezionato in un concorso di aritmetica come l'operatore più esperto sui calcolatori elettrici.

Macchine di calcolo a ingranaggi

La macchina di Anticitera è il più antico calcolatore meccanico conosciuto risalente al **II secolo a.C.**; poteva calcolare importanti dati astronomici: le fasi lunari, i movimenti dei cinque pianeti allora conosciuti, gli equinozi, e le date dei giochi olimpici, che iniziavano con la luna piena più prossima al solstizio estivo.

La macchina presentava un complicato sistema di ingranaggi le cui ruote dentate potevano riprodurre un rapporto vicino a quello necessario per ricostruire il moto della Luna in rapporto al Sole (la Luna compie 254 rivoluzioni siderali ogni 19 anni solari).

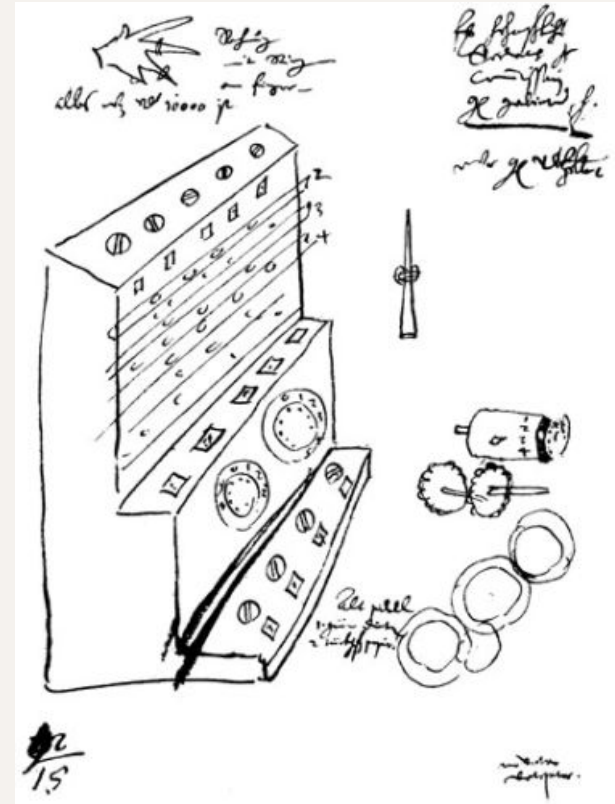


Macchine di calcolo a ingranaggi 1600

Nel XVII secolo, fu sfruttata la tecnica degli ingranaggi, già utilizzata nell'orologeria, per sviluppare le prime calcolatrici meccaniche.

Lo scienziato tedesco Wilhelm Schickard inventò nel 1623 una calcolatrice meccanica che poteva sommare e sottrarre numeri fino a sei cifre. La macchina venne distrutta in un incendio e non più costruita fino al 1960; rimangono tracce della sua esistenza in un carteggio fra Schickard e Keplero.

A causa della Guerra dei Trent'Anni questa ingegnosa invenzione rimase sconosciuta a molti contemporanei compreso Pascal.



Blaise Pascal: la vita

Nasce a
Clermont-Ferrand
. All'età di tre anni
muore la madre

1623

1639

1642

1654

1662

1670

Primo prototipo
della pascalina

Muore per
malattia il 19
agosto a 39 anni

A 16 anni scrive il suo
primo trattato di
geometria:
"Sulle coniche"

Si ritira in
convento a
Port-Royal

"Pensieri di Pascal sulla
religione e su alcuni altri
argomenti" viene
pubblicato postumo



Pascal e la pascalina

Nel 1642, all'età di diciannove anni, Blaise Pascal costruì la sua prima macchina addizionatrice, chiamata la Pascalina, oggi esposta al museo Conservatoire National des Artes et Métiers di Parigi . Questo dispositivo, costituito da un complesso sistema di ingranaggi, consentiva di eseguire somme e sottrazioni, introducendo automaticamente il riporto. Fu creato da Pascal per assistere suo padre, Etienne, nel lavoro di contabile presso la Cancelleria di Stato.

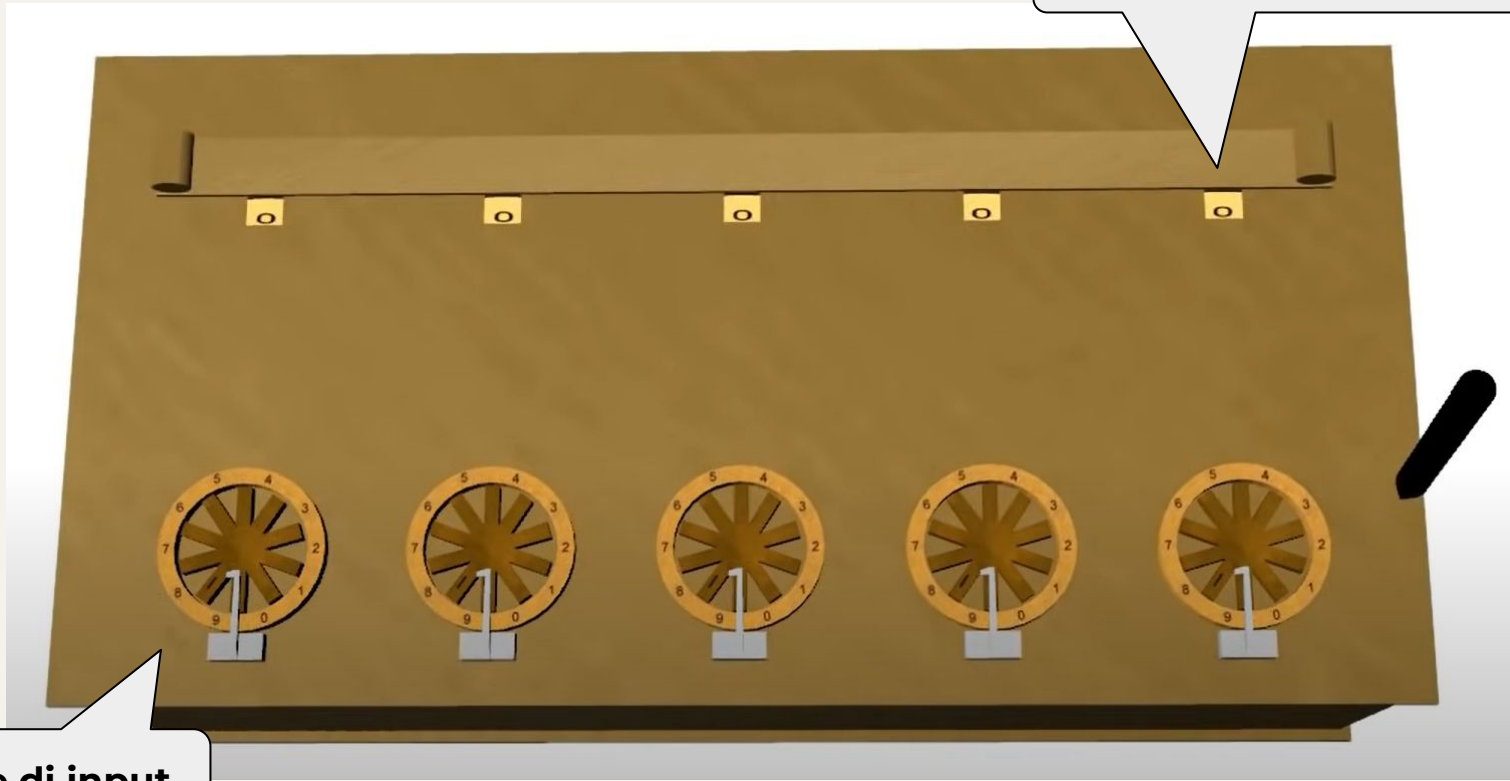


Come funziona la pascalina

How the pascaline works

<https://www.youtube.com/watch?v=3h71HAJWnVU>





Finestre di output

Ruote di input

28

Girando le ruote
nella parte
inferiore il
corrispondente
numero appare
nelle finestre
superiori



0

0

2

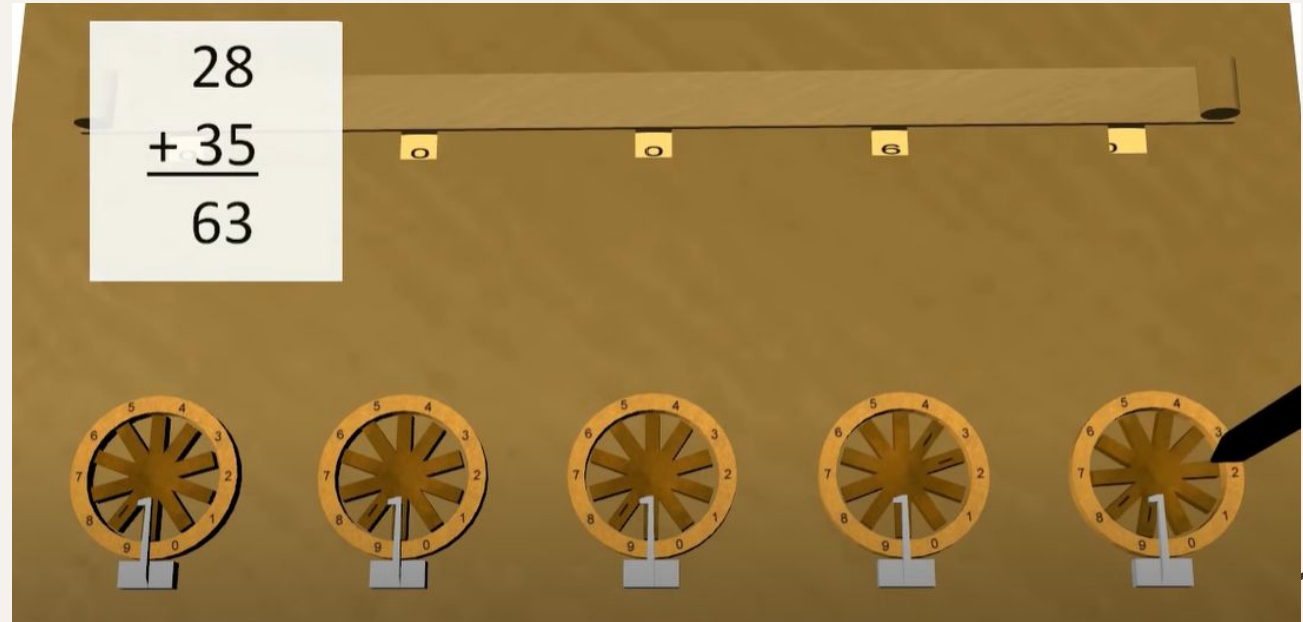
8

Addizioni

Per calcolare una somma si inseriscono successivamente gli addendi girando le ruote inferiori in senso orario.

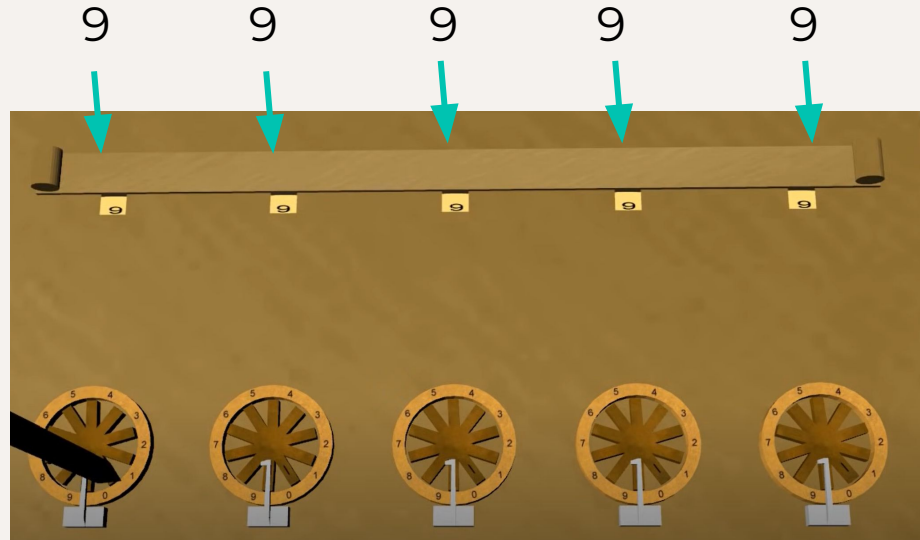
Il risultato appare nelle finestre superiori.

La macchina registra in modo automatico un eventuale riporto.



Azzeramento della pascalina

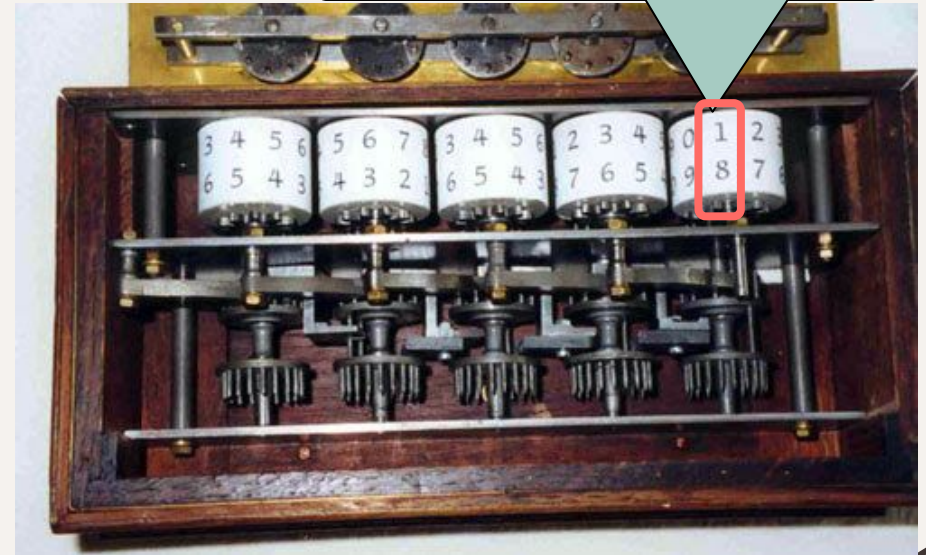
Prima di ogni operazione la macchina deve essere riportata alla situazione iniziale in cui nelle finestre superiori compaiono tutti 0; tuttavia poichè le ruote inferiori possono avanzare solo in senso orario, le finestre superiori devono essere portate tutte a nove e poi con l'aggiunta di 1 unità la macchina verrà azzerata



Le sottrazioni con la pascalina: la tecnica del complemento a nove

Le ruote dentate della pascalina potevano muoversi solo in verso orario, perciò non era possibile realizzare sottrazioni ruotando gli ingranaggi al contrario.

Pascal utilizzò perciò un metodo indiretto per eseguire la sottrazione: il metodo del complemento a 9. I complementi a 9 dei numeri erano riportati sulla parte superiore dei rulli: una barra mobile permetteva di visualizzare i numeri sulla parte inferiore o sulla parte superiore del rullo a seconda dell'operazione da fare.



Le sottrazioni con la pascalina: la tecnica del complemento a nove

Supponiamo di dover eseguire la sottrazione

$$72 - 23$$

Calcolo il complemento a 9 del minuendo 72

$$99 - 72 = 27$$

il numero che appare automaticamente nelle finestre superiori della pascalina

è il complemento a 9 di 27, cioè 72 che è esattamente il minuendo

aggiungo il minuendo al risultato

$$27 + 23 = 50$$

Calcolo il complemento a 9 dell'ultimo risultato

$$99 - 50 = 29$$

che coincide con

$$72 - 23 = 29$$

il numero appare automaticamente nelle finestre superiori della pascalina

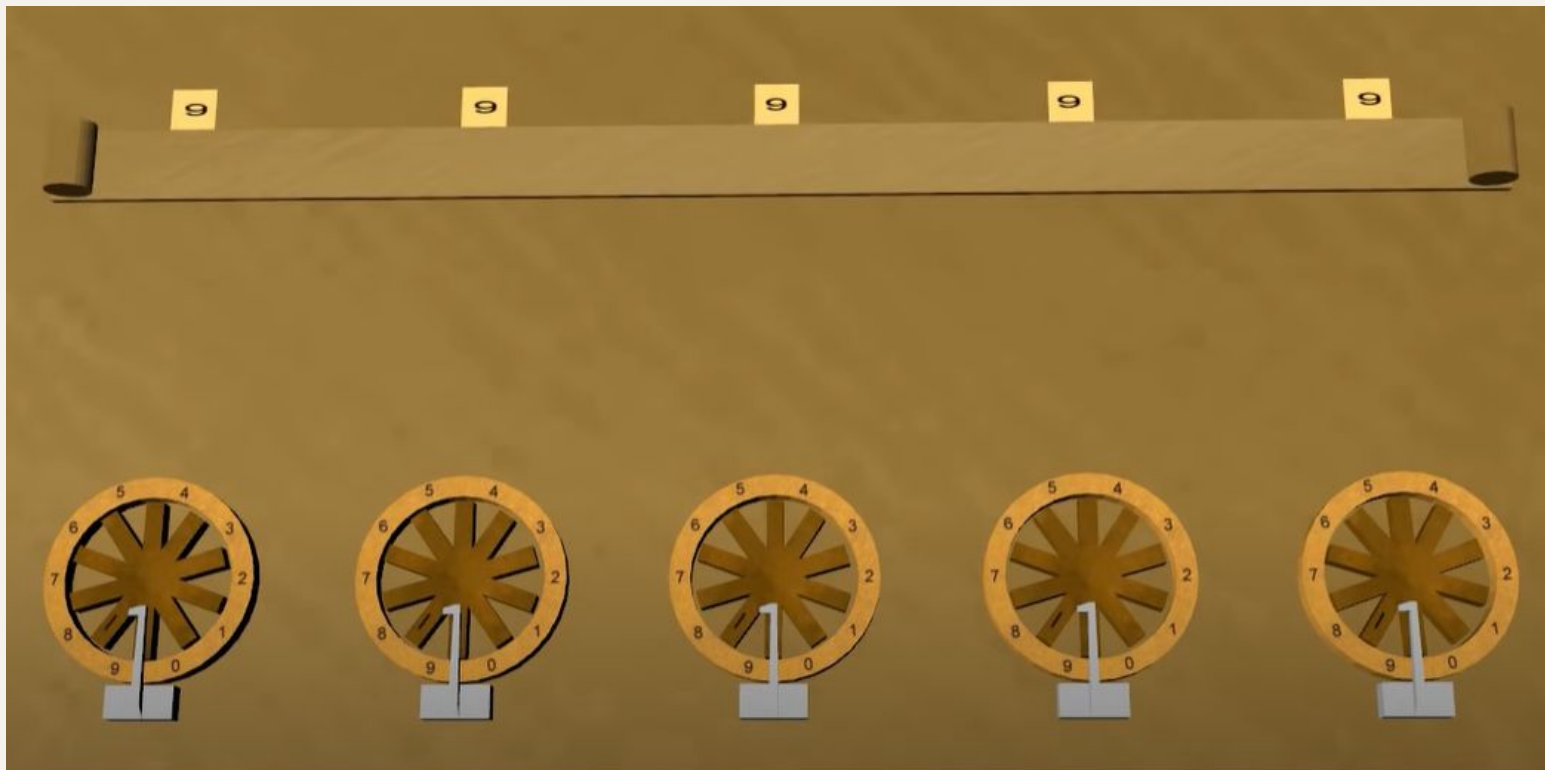
In generale

$$a - b = C_9 (C_9 a + b)$$

....un esempio sulla pascalina: 31-16

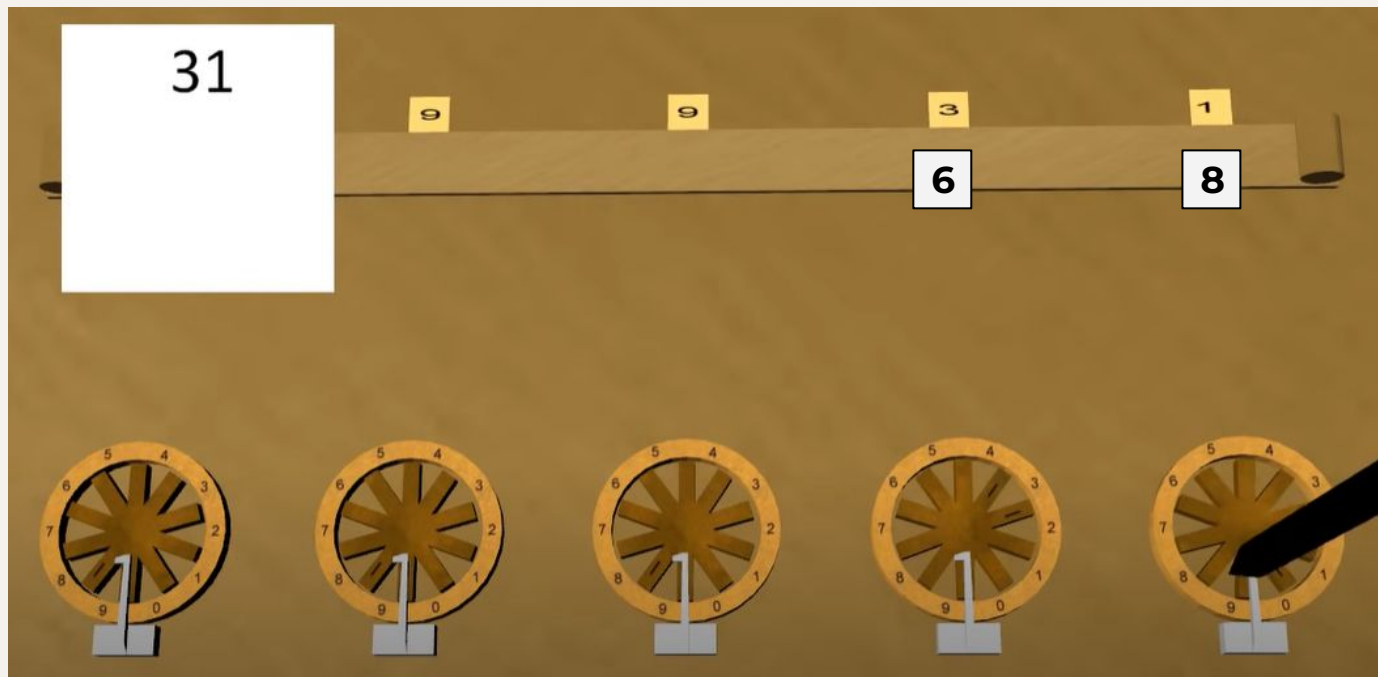
Muovere la barra superiore e scoprire il registro dei complementi a 9

a)



....un esempio sulla pascalina: 31-16

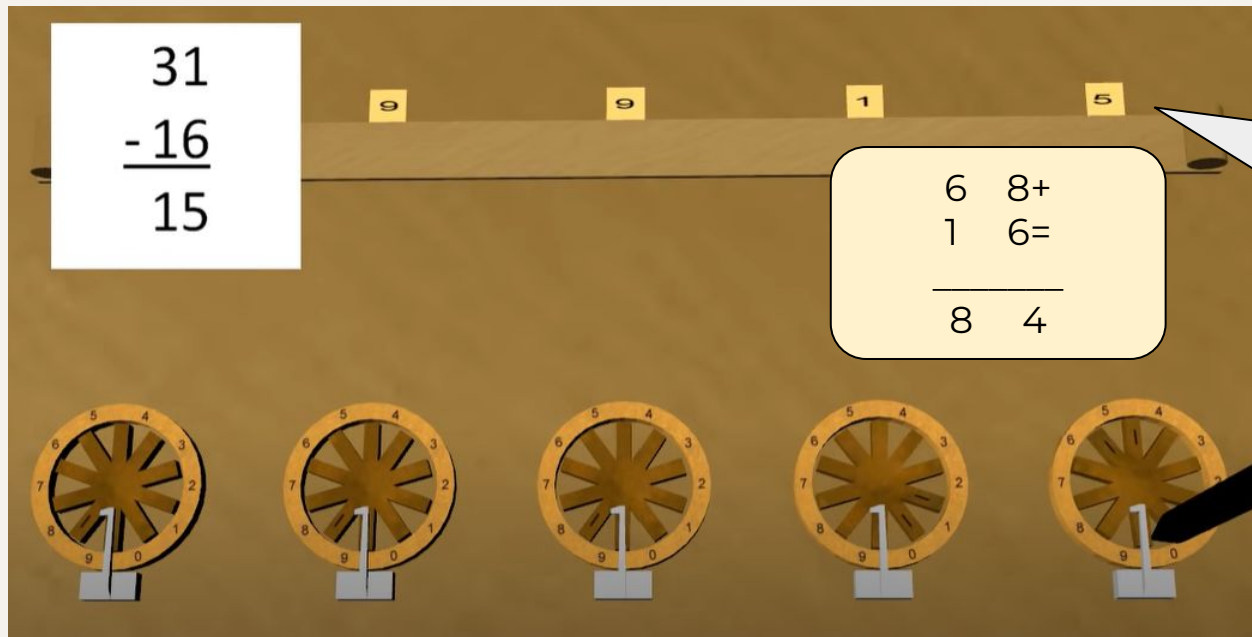
b)



Nella parte inferiore del display, ora coperta è scritto il complemento a 9 di 31 cioè 68

Girare le ruote inferiori finché nel display appare il minuendo

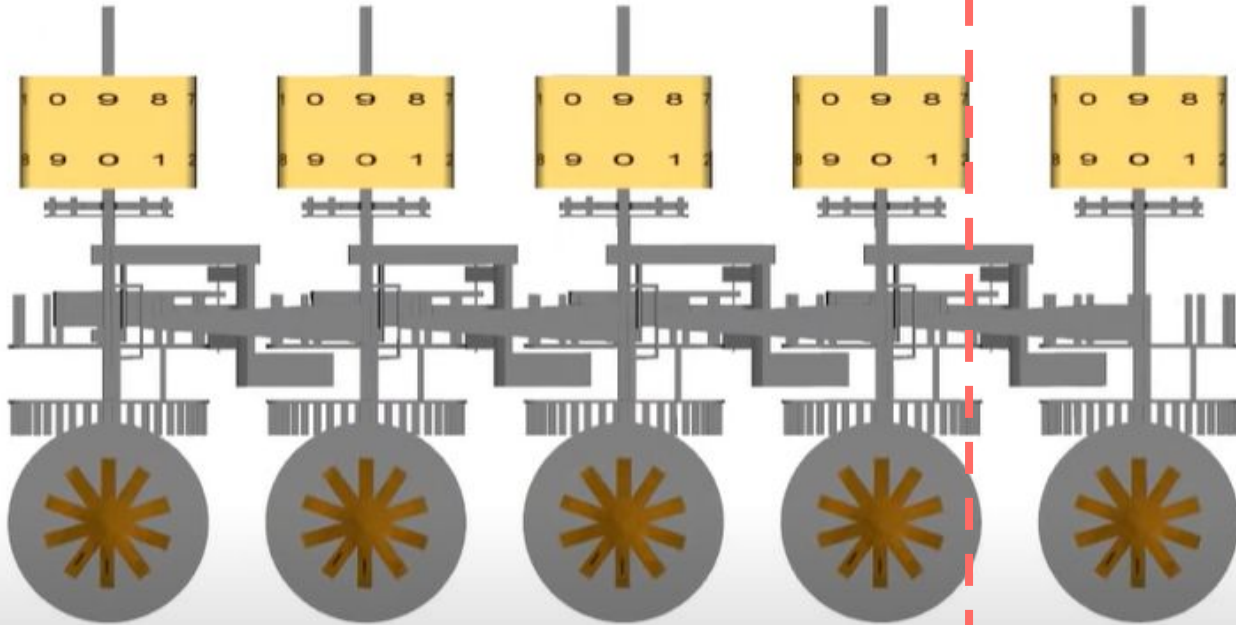
....un esempio sulla pascalina: 31-16



Il sottraendo viene introdotto nel modo usuale facendo avanzare in senso orario di 1 unità la ruota delle decine e di 6 unità la ruota delle unità: nel display superiore appare direttamente la differenza.

Vanno considerate ovviamente solo le prime due cifre del display a partire a destra

L'interno della pascalina



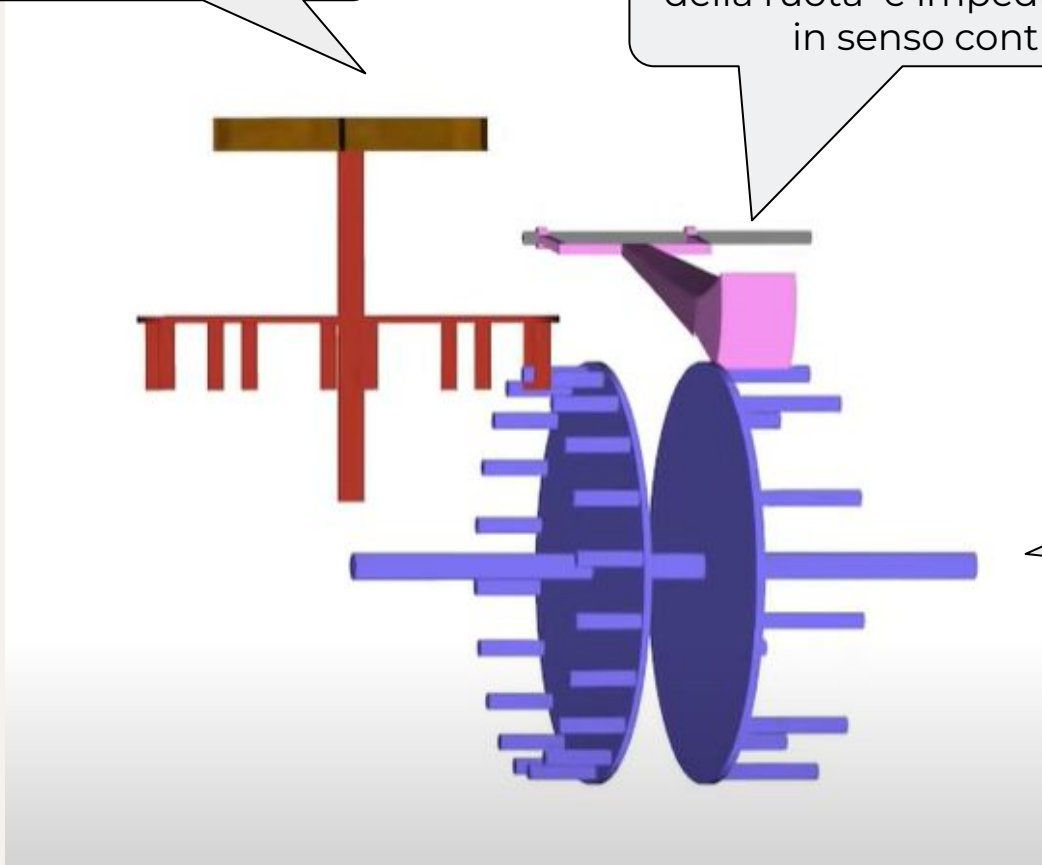
6 insieme uguali di ingranaggi

Ruota di input

Dente che discretizza il moto della ruota e impedisce il moto in senso contrario

L'interno della pascalina

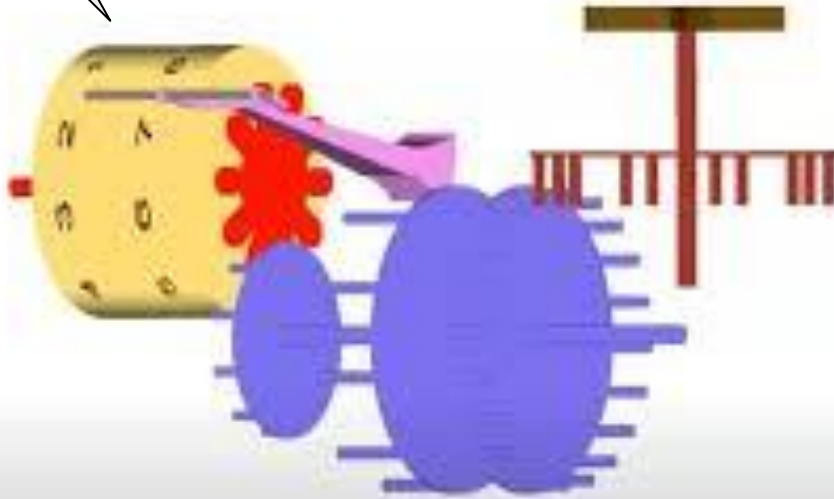
Sistema di ruote dentate che trasmettono il moto della ruota di input; le ruote sullo stesso asse ruotano alla stessa velocità



Registro di
output

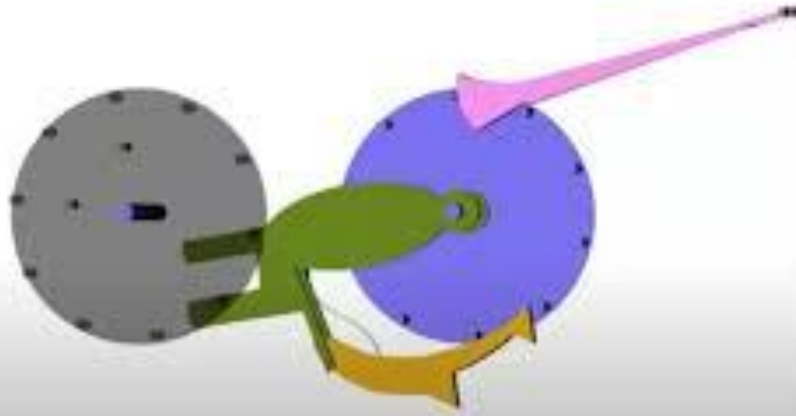
input

L'interno della pascalina



UNIVERSITÀ
VERDI
MILANO

L'interno della pascalina: il meccanismo di riporto



Il meccanismo del riporto è formato da due perni posti su una delle ruote verticali di trasmissione, una leva che viene montata sulla ruota di trasmissione dell'ordine successivo e un dente di riporto. La leva aggancia il primo perno nel passaggio della ruota di input dalla cifra 9 allo zero; il secondo perno segna la durata dell'aggancio e fa sì che la leva torni alla posizione iniziale, mentre la ruota di ordine superiore compie un passo in avanti

Documenti storici relativi alla pascalina

- LETTERA DI DEDICA AL MONSIGNOR CANCELLIERE RELATIVA ALLA MACCHINA RECENTEMENTE INVENTATA DAL SIGNOR B. P. PER ESEGUIRE OGNI TIPO DI OPERAZIONE ARITMETICA CON UN MOVIMENTO SENZA PENNA NÉ GETTONI (1645) con
- AVVISO NECESSARIO A TUTTI COLORO CHE AVRANNO LA CURIOSITÀ DI VEDERE LA MACCHINA ARITMETICA E DI SERVIRSENE (1645)
- PRIVILEGIO DEL RE, PER LA MACCHINA ARITMETICA (1649).
- LETTERA DI PASCAL ALLA REGINA CRISTINA, in accompagnamento alla macchina aritmetica (1650).

Pascal presenta la pascalina

B. Pascal, Oeuvres complètes, Texte établi, présenté et annoté par Jacques
Chevalier, Paris Gallimard, 1954, pp. 349-358 e 502-504

**LETTERA DI DEDICA AL MONSIGNOR CANCELLIERE RELATIVA ALLA MACCHINA
RECENTEMENTE INVENTATA DAL SIGNOR B. P. PER ESEGUIRE OGNI TIPO DI
OPERAZIONE ARITMETICA CON UN MOVIMENTO SENZA PENNA NÉ GETTONI**

CON

un avviso necessario a coloro che avranno la curiosità di vedere la suddetta macchina e di servirsene

1645

AL MONSIGNOR CANCELLIERE

Lettera al Monsignor Cancelliere

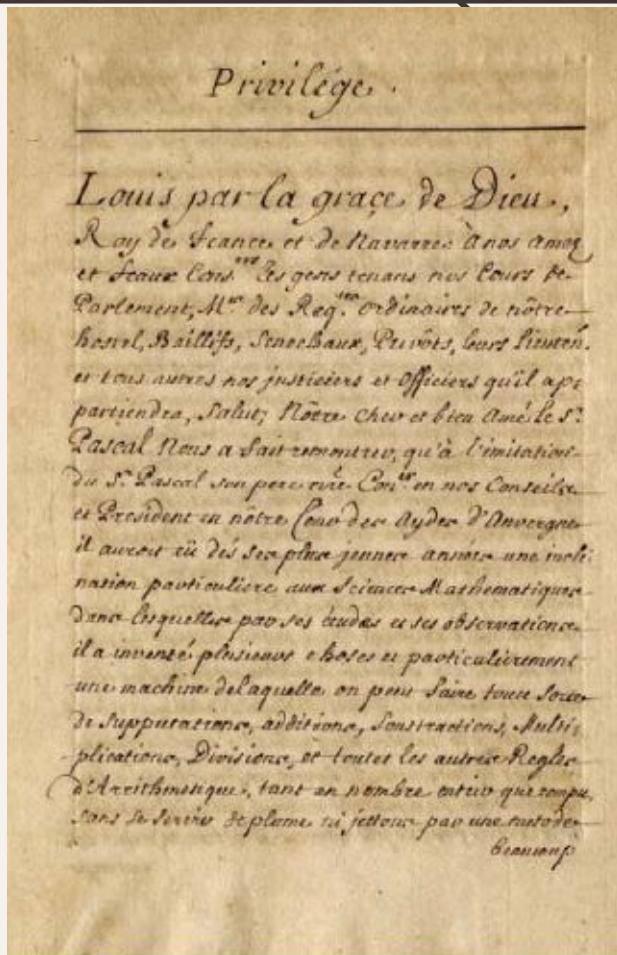
La lentezza e le difficoltà dei mezzi di cui ci si serve ordinariamente mi fecero pensare ad un qualche sussidio di più rapido e facile utilizzo, che potesse aiutarmi nei grandi calcoli che mi impegnano da diversi anni in molti affari, e che dipendono dalle occupazioni con cui avete avuto la compiacenza di onorare mio padre per il servizio di Sua Maestà nell'Alta Normandia;

.....

Le invenzioni sconosciute trovano sempre più detrattori che estimatori: i loro artefici vengono biasimati, poiché non se ne ha una perfetta comprensione; e un pregiudizio iniquo, secondo cui le cose fuori dall'ordinario portano difficoltà, fa sì che, invece di esaminarle per valutarle, le si accusi di impossibilità, per poi rifiutarle tacciandole di non pertinenza.

Privilegio del Re per la macchina aritmetica

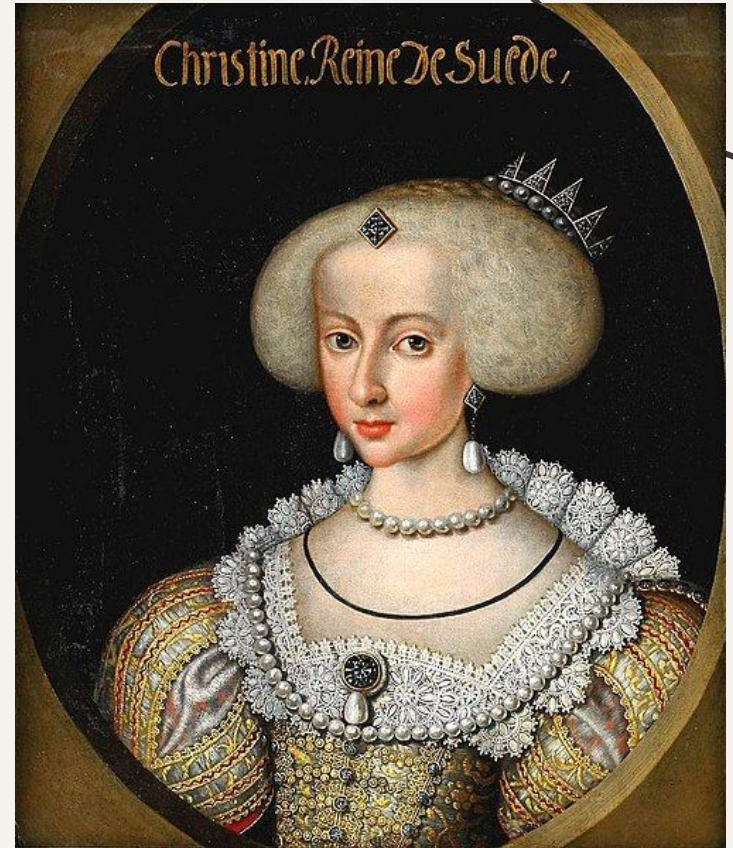
Facciamo espresso divieto di esporre, vendere, in codesto regno, qualsiasi contraffazione anche a tutti gli stranieri, mercanti o di altra professione, e anche nel caso in cui [lo strumento] sia stato prodotto oltre i confini. Tutti i contravventori saranno puniti con un'ammenda di tremila "lire".



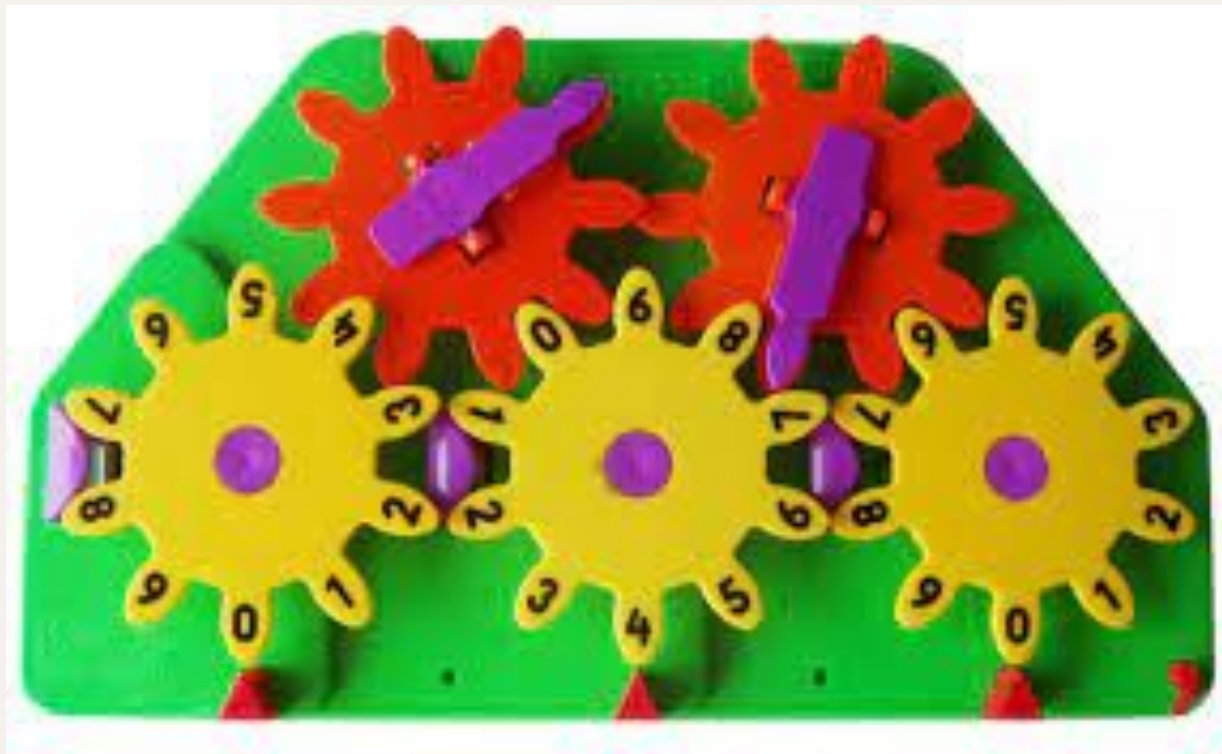
Pascal presenta la pascalina

**LETTERA DI PASCAL
ALLA REGINA CRISTINA,
in accompagnamento alla
macchina aritmetica (1650).**

È la Vostra Maestà, MIA SIGNORA, che offre all'universo quell'esempio unico che gli mancava; in lei il potere viene dispensato dai lumi delle scienze, e la scienza elevata dallo splendore dell'autorità



Una moderna versione didattica della pascalina



- Come è fatta?
- A cosa serve?
- Come funziona?
- Quali significati matematici può mettere in evidenza?

Come e perchè usare la pascalina con i ragazzi più grandi?



- Per sperimentare un'interessante attività di argomentazione: i ragazzi divisi in gruppo provano a scrivere un "manuale d'uso" rispondendo alle domande
 - Come è fatta?
 - A cosa serve?
 - Come funziona?
- Per spiegare come la macchina traduce gli algoritmi di calcolo per
 - L'addizione
 - La sottrazione
 - La moltiplicazione come somma ripetuta
 - La divisione come differenza ripetuta
- Per avvicinare gli studenti alla storia della matematica attraverso la lettura diretta delle fonti (in lingua originale se studiano il francese)

Sitografia

- Tovenà F., Lamberti L., (2019) Frazioni, Ingranaggi e orologi lunari, <https://art.torvergata.it/retrieve/e291c0d8-e554-cddb-e053-3a05fe0aa144/DIFIMA.pdf>
- Arzarello F., Casella P., Pretelli F., Savioli K., (2015) Ruote e ingranaggi, Proposte per la formazione continua dei docenti, http://www.scuolavalore.indire.it/nuove_risorse/ruote-e-ingranaggi/
- An engineer's approach to Woodworking; https://woodgears.ca/gear_cutting/template.html
 - Progettazione e animazione di ingranaggi: https://woodgears.ca/gear_cutting/index.html
- Sveliamo le proporzioni nascoste nei LEGO Technic <https://www.youtube.com/watch?v=rrVISnlGYlo>
- Tutti i rapporti di trasmissione con Lego technic - <https://www.youtube.com/watch?v=Ow0kZZGjWtQ>

Sitografia

- https://it.wikipedia.org/wiki/Macchina_di_Anticitera
- Lucio Russo, La rivoluzione dimenticata, VII edizione, Milano, Feltrinelli, 2013, ISBN 978-88-07-88323-1
- Graziani P., Sangoi M., (2005) “La_Macchina_Aritmetica_di_Blaise_Pascal”
<https://www.researchgate.net/publication/264416873>
- Carlo Felice Manara (2002) “Blaise Pascal matematico”<https://www.carlofelicemanara.it/public/file/File/Biografia/Blaise%20Pascal%20Matematico%201.pdf>
- L. Giacardi “Pascal e Macchina Aritmetica”
<http://php.math.unifi.it/convegnostoria/materiali/Giacardi-PascaleMacchinaAritmetica.pdf>