

**IMMAGINA DI SOTTOPORRE AI TUOI STUDENTI IL SEGUENTE PROBLEMA TRATTO DAL LIBER ABACI (L.FIBONACCI):**

### **IL PROBLEMA DELLE COPPE**

#### **Dell'uomo che aveva cinque coppe d'argento (XII.7.60)**

Un tale dava a un altro per il suo lavoro quotidiano 1 marco d'argento, che saldava con le cinque coppe d'argento che aveva, a patto che non ne rompesse nessuna; e fece ciò per 30 giorni: il valore della prima coppa fu 1, il cui doppio, cioè 2 marchi, fu il valore della seconda; e il valore della terza fu 4, cioè il doppio della seconda. Poi il valore della quarta fu il doppio della terza, cioè 8, sommati insieme i valori delle quattro coppe fanno 15 marchi; sottratti questi dai 30 marchi restano 15 marchi per il valore della quinta coppa.

TALE PROBLEMA PUO' FORNIRE SPUNTO PER DIVERSE ATTIVITA' DIDATTICHE ( SPECIFICARE LA CLASSE A CUI RIVOLGERLE), CON OBIETTIVI FORMATIVI PER GLI STUDENTI. QUI DI SEGUITO SE NE PROPONGONO ALCUNE MA SE NE POSSONO SUGGERIRE ULTERIORI O ALTERNATIVE.

Si può pensare di proporre una versione più esplicativa e moderna del precedente problema, se il testo risultasse ostico per gli studenti designati ( ad esempio per la classe prima), come il seguente ( nel quale per praticità viene considerato un mese di 31 giorni):

*Un signore assume un operaio per fare dei lavori nella sua casa. L'operaio avrà come ricompensa 1 marco al giorno per 31 giorni e vuole essere pagato giorno per giorno. Il proprietario della casa non ha soldi in moneta ma solo 5 coppe d'argento: la più piccola vale 1 marco, la seconda è il doppio e vale due marchi, la terza 4, la quarta 8 e la quinta 16. In questo modo riesce a pagare l'operaio tutti i giorni a patto che l'operaio non rompa le coppe che via via riceve.*

#### **Attività 1**

La rappresentazione del problema potrebbe essere facilitata dapprima attraverso una:

- descrizione verbale;
- modalità grafica (con un disegno ad esempio)
- mediante una sceneggiatura;
- una rappresentazione teatrale.

Descrivi obiettivi e passi salienti della modalità scelta.

#### **Attività 2**

Risoluzione del problema: indicare come l'operaio viene pagato giorno per giorno.

- In particolare, stimolare i ragazzi a notare che il valore delle coppe può essere scritto come potenza di due;
- notare che le coppe sono in singola copia, quindi nell' espressione matematica relativa, il fattore che moltiplica le potenze di due, può essere 0 o 1.

Si può proporre, se ve ne sia necessità, un suggerimento per la soluzione direttamente dalle parole di Fibonacci:

“ E nel primo giorno gli diede la prima coppa. Nel secondo ebbe indietro da quello la prima e gli dette la seconda. Nel terzo il signore rese al lavoratore la prima. Nel quarto giorno il signore prese dall’operaio la prima e la seconda, e gli dette la terza; e così lo pagò ogni giorno nell’ordine predetto per 30 giorni.”

### Attività 3

Per stimolare una generalizzazione:

- Considera la scrittura di ogni numero da 1 a 31 come somma di potenze di 2;
- Evidenziare le analogie e le differenze tra basi e coefficienti utilizzati nei sistemi di scrittura polinomiale in base 10 ed in base 2.

Descrivi obiettivi e passi salienti della/e attività ideata/e.

### Attività 4

Proporre esercizi per sollecitare la scrittura dei numeri in potenze di 2 o somma di potenze di 2, come ad esempio:

- Se l’operaio dovesse essere pagato per due mesi e il datore di lavoro si potesse servire solo di coppe in copia unica di quale altra coppa avrebbe bisogno?
- Considerare la somma del valore delle prime due coppe, tre coppe, quattro coppe e così via e le corrispondenti potenze di due. Mettere in relazione il valore di tali somme con le rispettive potenze di 2.

Esempio

la somma del valore delle prime 3 coppe:

$$1+2+4=7$$

$$2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3 = 8$$

7 è la somma dei primi 3 termini pertanto  $7=2^3-1$

UNA VARIANTE DEL PROBLEMA APPENA CONSIDERATO, DELLO STESSO AUTORE, E’ IL SEGUENTE:

### IL PROBLEMA DEI PESI

“Un tale aveva 4 pesi [campione], con i quali pesava libbre intere della propria merce da una libbra fino a 40 libbre; si chiede quanto pesa ciascun peso [campione]: di certo occorre che il peso del primo sia di una libbra, affinché con esso fosse pesata una libbra, quello del secondo il suo doppio, più 1, cioè 3, o il triplo dello stesso primo; con questi due pesi [campione] si possono pesare da una libbra fino a 4. E ancora il peso del terzo è 1 più il doppio di ambedue, cioè il triplo del secondo, cioè 9; mentre il peso del quarto è 1 più il doppio del peso degli altri tre, cioè il triplo del terzo, cioè

27; questi 4 pesi [campione] messi insieme fanno 40. Di lì se vuoi sapere come con questi pesi possono essere pesate quante libbre vuoi, da 1 libbra fino a 40 libbre.”



i pesi campione da 1, 3, 9, 27 libbre

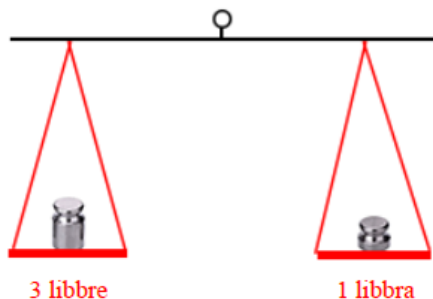
SI PROPONE DI ANALIZZARE IL PROBLEMA SECONDO UNO SCHEMA DI LAVORO SIMILE A QUELLO UTILIZZATO PER IL PRECEDENTE.

**In particolare:**

### Attività 1

- Proponi una rappresentazione grafica del problema attraverso un disegno di come potrebbero essere pesate le diverse quantità a partire da 1 libbra fino a 40 libbre; si fornisce un esempio:

2 libbre vengono pesate come sotto



Si può proporre, se ve ne sia necessità, un suggerimento per la soluzione così come dice Fibonacci:

*“diciamo per esempio 14, si ponga il quarto peso in un braccio [della bilancia] e il resto si ponga nell'altra. E ponendo quel quarto peso col primo, e dall'altra si pongono i rimanenti, cioè 9 e 3, allora si possono pesare 16 libbre; e quando si pone il quarto e il secondo e il primo da una parte, cioè 27 e 3 e 1, il peso dei quali è 31, e dall'altra si pone il terzo, cioè 9, allora si possono pesare 22 libbre che vanno da 9 fino a 31; 3 così comprendi il resto.*

### Attività 2

Risoluzione del problema: indicare numericamente come si possono realizzare le pesate.

- stimolare i ragazzi a notare che il valore dei pesi può essere scritto come somma di potenze di 3.

- notare che, in questo caso, i bracci della bilancia sono 2 ed i coefficienti che moltiplicano le potenze di 3 possono essere 0 o 1, ma si deve tener conto della posizione sulla bilancia.
- cosa suggeriresti per evidenziare la posizione destra o sinistra dei pesi?

### Attività 3

Per stimolare una generalizzazione:

- Considera la scrittura di ogni numero da 1 a 40 come somma di potenze di 3.
- Descrivi obiettivi e passi salienti della/e attività ideate.

### Attività 4

Proporre esercizi per sollecitare la scrittura dei numeri in potenze di 3 o somma di potenze di 3, come ad esempio :

"cosa succederebbe se aggiungessi un quinto peso triplo del primo?"

Si può seguire la risposta di Fibonacci, nel caso in cui vi fosse bisogno:

*“E se aggiungessi un quinto peso [campione], il cui peso fosse il triplo del quarto, cioè 81, si possono pesare con questi cinque pesi quante libbre vuoi, da una fino a 121 libbre; e così nello stesso ordine si possono aggiungere pesi all’infinito”*

- Quanto fa la somma dei primi due pesi e dei primi tre?

$$1+3=4$$

$$3^2=9=4 \cdot 2 + 1$$

$$1+3+9= 13$$

$$3^3=27=13 \cdot 2 + 1$$

Proponi la modalità con la quale far esplicitare ai ragazzi la relazione esistente tra la somma di n termini e la potenza relativa di base 3 ed esponente n.

1. VALUTA I POSSIBILI ASPETTI CULTURALI E LE COMPETENZE CHE POSSONO ESSERE SVILUPPATE CON QUESTO GENERE DI ATTIVITA', CONDIVISE EVENTUALMENTE CON MATERIE DIVERSE DALLA MATEMATICA.
2. QUALI METODOLOGIE POTREBBERO ESSERE UTILIZZATE PER SVOLGERE ATTIVITA' IN CLASSE COME QUELLA DEL PRECEDENTE PUNTO 1?