Raccordo con il percorso sulla risoluzione geometrica delle equazioni di II grado

I metodi geometrici per la risoluzione delle equazioni di secondo grado insegnati da Euclide continuano a essere tramandati per secoli.

L'eredità della cultura scientifica alessandrina viene raccolta dal mondo arabo. In particolare nella capitale Baghdad del Califfato abbaside viene fondata nel IX secolo la Casa della Sapienza, un'istituzione simile alla Biblioteca di Alessandria nella quale lavorano matematici di varia provenienza.

L'espansione del mondo arabo verso oriente fa sí che i matematici arabi sviluppino una matematica che coniuga i risultati della matematica indiana con quelli della matematica alessandrina.

Tra i libri che il matematico al-Khwārizmī scrisse in questo contesto, ricordiamo:

– *Liber algorismi de numero indorum*

– *Kitāb al-jabr wa al-muqābala*

Nell'opera di al-Khwārizmī l'incognita viene chiamata 'cosa' o 'radice' (di una pianta) e da questo deriva il nostro termine 'radice'.
(v. Kline, *Storia del pensiero matematico*, vol. I)

Al-Khwārizmī risolve tutte e cinque le forme in cui si può presentare un'equazione quadratica se si vuole che i coefficienti e le soluzioni dell'equazione siano tutti positivi:

- 2 forme a due termini

$$ax^2 = c$$
$$ax^2 = bx$$

- 3 forme a tre termini

$$ax^2 + bx = c$$
$$ax^2 + c = bx$$
$$ax^2 = bx + c$$

Risoluzione delle equazioni cubiche nella storia

1. **Risoluzione, con strumenti non euclidei, del problema della duplicazione del cubo.**

"Una versione dell'origine del problema della duplicazione del cubo, che si trova in un'opera di Eratostene (c. 284 - c. 192 a.C.), riferisce che gli abitanti di Delo (un'isola del Mar Egeo), colpiti da una pestilenza, consultarono l'oracolo il quale rispose di costruire un altare avente misura doppia di quello esistente. Gli abitanti di Delo si resero conto che la duplicazione del lato non avrebbe raddoppiato il volume e si rivolsero perciò a Platone il quale disse loro che il dio dell'oracolo non aveva risposto in tal modo perché volesse o avesse bisogno di un altare raddoppiato, ma per biasimare i Greci per la loro indifferenza nei confronti della matematica e per la loro mancanza di rispetto nei confronti della geometria. Anche Plutarco riferisce la stessa storia."
(v. Kline *Storia del pensiero matematico* vol. I p. 48)

"[…] i matematici ateniesi erano esperti nel trattare la trasformazione di aree e le proporzioni. In particolare, non trovavano evidentemente nessuna difficoltà a trasformare un rettangolo di lati a e b in un quadrato.
Ciò richiedeva che si trovasse un termine medio proporzionale o la media geometrica tra a e b.
Ossia, se a : x = x : b, i geometri del tempo erano in grado di costruire facilmente il segmento x."
(Carl B. Boyer, *Storia della matematica,* Mondadori)

"Era pertanto naturale che cercassero di generalizzare il problema inserendo due termini medi proporzionali tra due grandezze date a e b. Ossia, dati due segmenti lineari a e b, speravano di costruire due altri segmenti x e y tali che a : x = x : y = y : b. Si dice che Ippocrate di Chio (attivo verso il 430 a.C.) fosse consapevole del fatto che questo problema era equivalente a quello della duplicazione del cubo; infatti se b = 2a, le proporzioni continue, una volta eliminata la y, portano alla conclusione che $x^3 = 2a^3$."
(Carl B. Boyer, *Storia della matematica,* Mondadori)

Vediamo come, con l'aiuto del simbolismo moderno:

$$a : x = x : y = y : 2a \ (\text{con } x \neq 0 \text{ e } y \neq 0)$$

Dalla proporzione a : x = x : y otteniamo, applicando la proprietà fondamentale delle proporzioni,

$$ay = x^2 \leftrightarrow y = \frac{x^2}{a} \quad (a \neq 0)$$

Dalla proporzione x : y = y : 2a otteniamo, applicando la proprietà fondamentale delle proporzioni,

$$2ax = y^2$$

Per sostituzione si ottiene:

$$2ax = \frac{x^4}{a^2} \leftrightarrow x^4 - 2a^3x = 0$$

$$(x^3 - 2a^3)x = 0$$

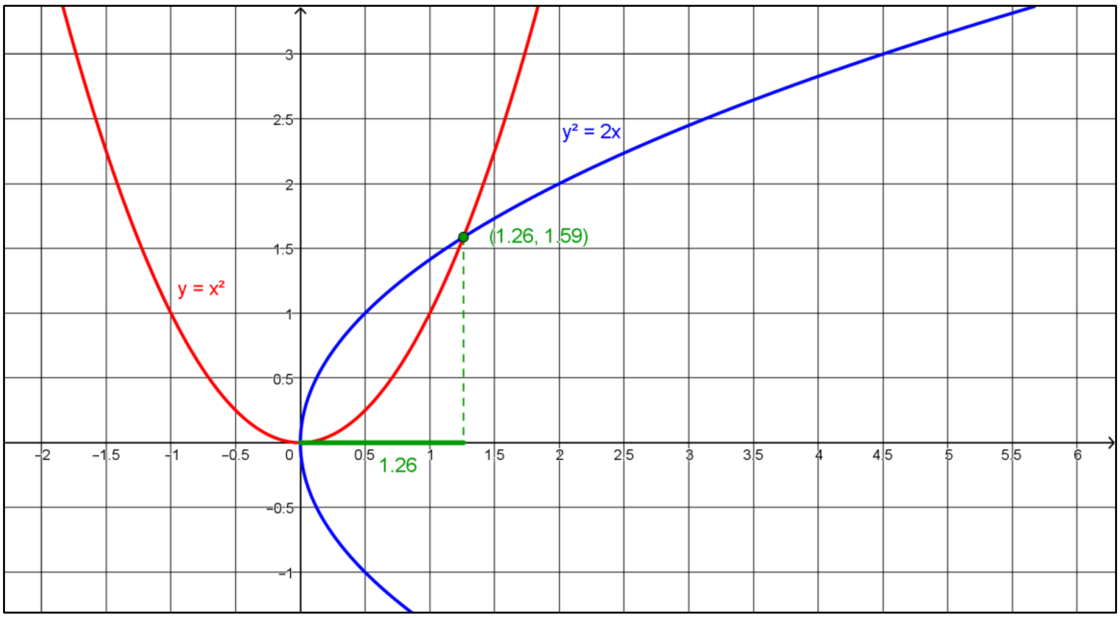
$$x = 0 \text{ v } x = a\sqrt[3]{2}$$

dove $a\sqrt[3]{2}$ è l'unica soluzione dell'equazione assegnata.

Come determinare geometricamente un segmento di lunghezza $\sqrt[3]{2}$?

Il matematico greco Menecmo (– 380 circa/– 320) introduce le coniche e risolve il problema facendo uso delle due parabole con assi ortogonali ottenute dalla precedente catena di rapporti.
Con linguaggio moderno, si tratta di rappresentare graficamente il sistema:

$$\begin{cases} y = x^2 \\ x = \dfrac{1}{2}y^2 \end{cases}$$



L'impossibilità di costruire **con strumenti euclidei** $\sqrt[3]{2}$ (come tutte le radici cubiche di numeri interi che non siano cubi) è stata dimostrata dal matematico francese Pierre Laurent Wantzel (1814/1848) nel 1837.

2. **Risoluzione di equazioni cubiche secondo il matematico persiano Omar Khayyam**
Omar Khayyam (matematico persiano vissuto a cavallo tra l'XI e il XII sec.) scrive, intorno al 1079, un'opera sulla risoluzione delle equazioni di III grado intitolata *Algebra*. Lo scrittore libanese Amin Maalouf (1949) afferma nel suo libro *Il manoscritto di Samarcanda*: «Per rappresentare l'incognita in questo trattato di algebra, Khayyam utilizza il termine arabo chay, che significa 'cosa'; questa parola, che nelle opere scientifiche spagnole si scrive Xay, è stata progressivamente sostituita dalla sua prima lettera *x*, divenuta simbolo universale dell'incognita.»

Pervenendo in ogni caso a un sistema tra due coniche, Khayyam risolve tutte e 14 le forme in cui si può presentare un'equazione cubica se si vuole che i coefficienti e le soluzioni dell'equazione siano tutti positivi:

- 1 forma a due termini

$$x^3 = a$$

- 6 forme a tre termini

3 forme prive del termine al quadrato:

$$x^3 + bx = a$$
$$x^3 + a = bx$$
$$x^3 = bx + a$$

3 forme prive del termine di primo grado:

$$x^3 + cx^2 = a$$
$$x^3 + a = cx^2$$
$$x^3 = cx^2 + a$$

- 7 forme a quattro termini

4 forme in cui un trinomio è uguale a un monomio:

$$x^3 + cx^2 + bx = a$$
$$x^3 + cx^2 + a = bx$$
$$x^3 + bx + a = cx^2$$
$$cx^2 + bx + a = x^3$$

3 forme in cui due binomi sono uguali tra loro:

$$x^3 + cx^2 = bx + a$$
$$x^3 + bx = cx^2 + a$$
$$x^3 + a = cx^2 + bx$$

Equazione del tipo $x^3 = a$. Nella terminologia di Omar Khayyam, può essere scritta come "un cubo è uguale a un numero".

Esempio (intersezione di due parabole)

$x^3 = 2$

$x^2 \cdot x = 2$

$x^2 = \frac{2}{x}$ (con $x \neq 0$)

$x^2 = \frac{2y}{xy}$ (con $y \neq 0$)

$x \cdot x = \frac{y}{x} \cdot \frac{2}{y}$

$x = \frac{y}{x} = \frac{2}{y}$

Si riottiene così la catena di rapporti vista precedentemente:

$$x : 1 = y : x = 2 : y \text{ ovvero } 1 : x = x : y = y : 2$$

da cui, uguagliando il primo con il secondo membro e il secondo con il terzo membro, si ha il sistema:

$$\begin{cases} y = x^2 \\ x = \frac{1}{2}y^2 \end{cases}$$

Equazione del tipo $x^3 + bx = a$. Nella terminologia di Omar Khayyam, può essere scritta come "un cubo e (un numero di) lati sono uguali a un numero".

Primo esempio (intersezione di una parabola e di una circonferenza)

$x^3 + x = 2$

$x^3 = 2 - x$

$x \cdot x^2 = 2 - x$

$x^2 = \frac{2-x}{x}$ (con $x \neq 0$)

$x \cdot x = \frac{(2-x)y}{xy}$ (con $y \neq 0$)

$x \cdot x = \frac{y}{x} \cdot \frac{2-x}{y}$

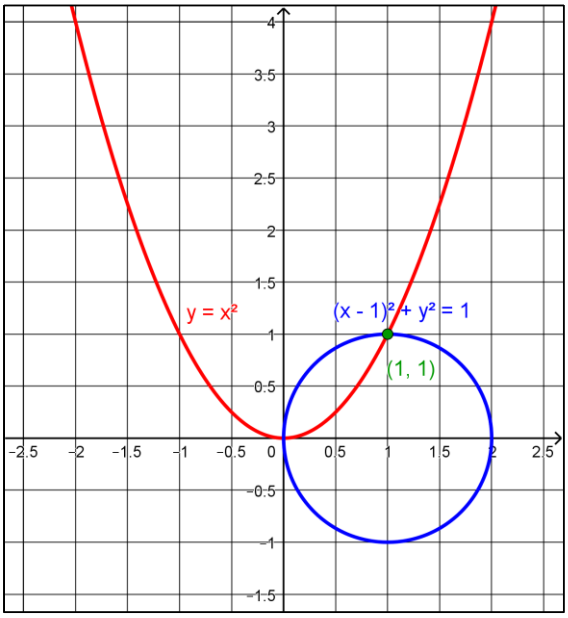
$x = \frac{y}{x} = \frac{2-x}{y}$

Si ottiene così la catena di rapporti:

$$x : 1 = y : x = (2 - x) : y \text{ ovvero } 1 : x = x : y = y : (2 - x)$$

da cui, uguagliando il primo con il secondo membro e il secondo con il terzo membro, si ha il sistema:

$$\begin{cases} y = x^2 \\ x^2 + y^2 - 2x = 0 \end{cases}$$



Si può facilmente verificare che 1 è l'unica soluzione dell'equazione assegnata.

Secondo esempio (intersezione di una parabola e di una circonferenza)

$$\frac{x^3}{4} + x = 4$$

$$\frac{x^3}{4} = 4 - x$$

$$x \cdot \frac{x^2}{4} = 4 - x$$

$$\frac{x^2}{4} = \frac{4-x}{x}$$ (con x ≠ 0)

$$\frac{x}{2} \cdot \frac{x}{2} = \frac{(4-x)y}{xy}$$ (con y ≠ 0)

$$\frac{x}{2} \cdot \frac{x}{2} = \frac{y}{x} \cdot \frac{4-x}{y}$$

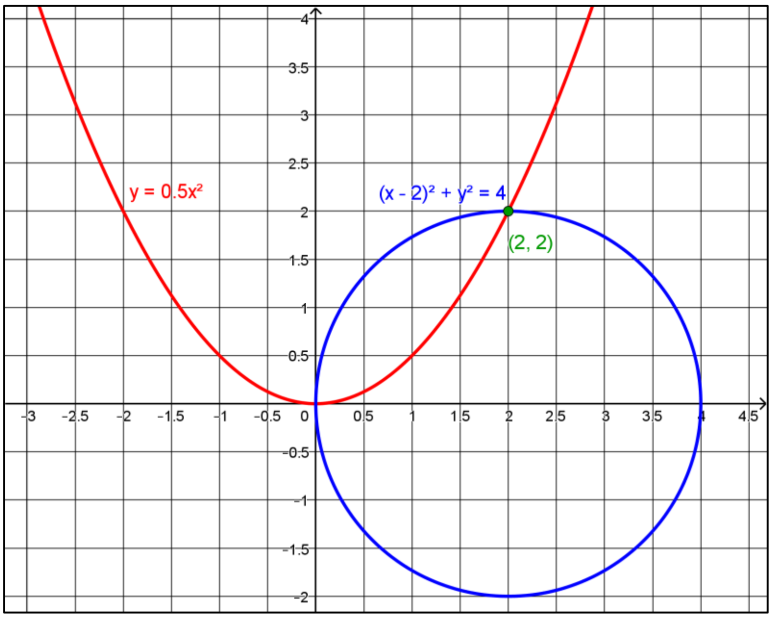
$$\frac{x}{2} = \frac{y}{x} = \frac{4-x}{y}$$

Si ottiene così la catena di rapporti:

x : 2 = y : x = (4 – x) : y ovvero 2 : x = x : y = y : (4 – x)

da cui, uguagliando il primo con il secondo membro e il secondo con il terzo membro, si ha il sistema:

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}x^2 \\ x^2 + y^2 - 4x = 0 \end{cases}$$



Si può facilmente verificare che 2 è l'unica soluzione dell'equazione assegnata.

Secondo esempio (intersezione di una parabola e di una ellisse)

$$\frac{x^3}{4} + x = 4$$

$$x^3 + 4x = 16$$

$$x^3 = 16 - 4x$$

$$x \cdot x^2 = 16 - 4x$$

$$x^2 = \frac{16 - 4x}{x} \qquad \text{(con x} \neq 0\text{)}$$

$$x \cdot x = \frac{(16 - 4x)y}{xy} \qquad \text{(con y} \neq 0\text{)}$$

$$x \cdot x = \frac{y}{x} \cdot \frac{16 - 4x}{y}$$

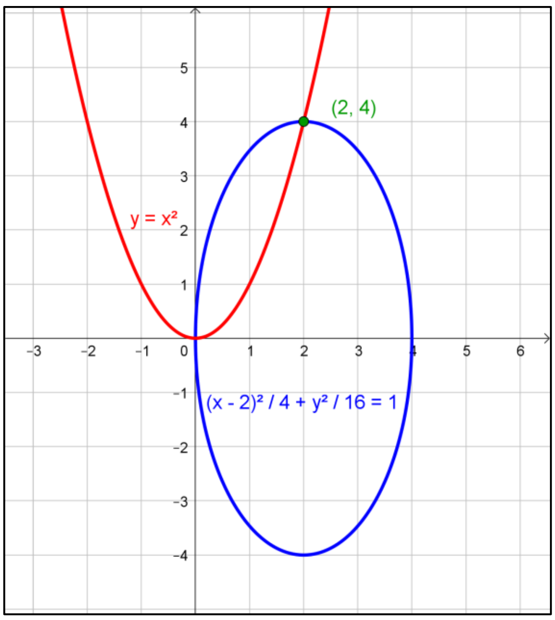
$$x = \frac{y}{x} = \frac{16 - 4x}{y}$$

Si ottiene così la catena di rapporti:

x : 1 = y : x = (16 – 4x) : y ovvero 1 : x = x : y = y : (16 – 4x)

da cui, uguagliando il primo con il secondo membro e il secondo con il terzo membro, si ha il sistema:

$$\begin{cases} y = x^2 \\ 4x^2 + y^2 - 16x = 0 \end{cases}$$



Equazione del tipo $x^3 + a = bx$. Nella terminologia di Omar Khayyam, può essere scritta come "un cubo e un numero sono uguali a (un numero di) lati".

Primo esempio (intersezione di una parabola e di una iperbole)

$x^3 + 1 = 2x$

$x^3 = 2x - 1$

$x \cdot x^2 = 2x - 1$

$x^2 = \frac{2x-1}{x}$ (con $x \neq 0$)

$x \cdot x = \frac{(2x-1)y}{xy}$ (con $y \neq 0$)

$x \cdot x = \frac{y}{x} \cdot \frac{2x-1}{y}$

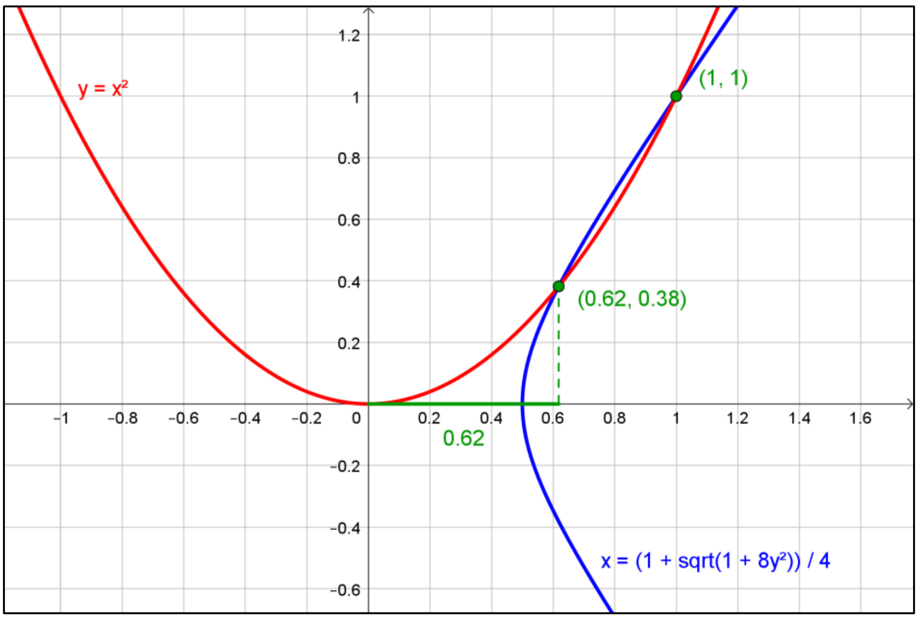
$x = \frac{y}{x} = \frac{2x-1}{y}$

Si ottiene così la catena di rapporti:

$$x : 1 = y : x = (2x - 1) : y \text{ ovvero } 1 : x = x : y = y : (2x - 1)$$

da cui, uguagliando il primo con il secondo membro e il secondo con il terzo membro, si ha il sistema:

$$\begin{cases} y = x^2 \\ 2x^2 - y^2 - x = 0 \end{cases}$$



Si può facilmente verificare che 1 è soluzione dell'equazione assegnata.

Si ottiene poi un segmento che è la rappresentazione geometrica dell'altra soluzione, positiva e non razionale, dell'equazione assegnata.

Non tutte le radici dell'equazione di terzo grado venivano date, perché Omar Khayyam non giudicava appropriate le radici negative e non considerava quindi tutte le intersezioni delle sezioni coniche.