Dalla formula risolutiva delle equazioni di terzo grado alla nascita dei numeri complessi

La risoluzione delle equazioni di secondo grado con il “metodo del completamento del quadrato” era nota sin dai tempi dei Babilonesi.

L’equazione cubica, se si eccettuano dei casi particolari, aveva fino ad allora sfidato i matematici tanto che, ancora nel 1494, Luca Pacioli (1445-1514) aveva sostenuto che la soluzione dell’equazione cubica generale era impossibile.

Ritratto di Luca Pacioli (1495), attribuito a Jacopo de' Barbari, Museo Nazionale di Capodimonte.

Nella soluzione delle equazioni di terzo grado si erano cimentati molti matematici greci e arabi fin dai tempi di Archimede, ma essi erano arrivati solo a risolvere dei casi particolari, senza riuscire a trovare un metodo generale.

All’inizio del Cinquecento in Italia il Rinascimento è in pieno sviluppo e anche la matematica occupa un posto di rilievo in questo emergere di nuove idee.

È da ricordare a questo proposito la notevole concentrazione di eminenti matematici italiani e stranieri nell'Università di Bologna, dove, a breve distanza di tempo, insegnarono Luca Pacioli, Scipione Dal Ferro, Girolamo Cardano, Rafael Bombelli e numerosi altri.

Scipione del Ferro
(1465 – 1526)

Niccolò Tartaglia
(1500 circa – 1557)

Gerolamo Cardano
(1501 – 1576)

Tartaglia e le equazioni di terzo grado

http://areeweb.polito.it/didattica/polymath/htmlS/argoment/APPUNTI/TESTI/Feb_02/Cap2.html

La generica equazione di terzo grado si può scrivere:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

Dividendo per a (il che equivale a effettuare una dilatazione verticale di coefficienti $\left(\frac{1}{a}, 1\right)$) si può sempre ricondurre a 1 il coefficiente di x^3.

$$x^3 + ex^2 + fx + g = 0$$

È possibile eliminare il termine di secondo grado effettuando il cambio di variabile x = x' $-\frac{e}{3}$ (il che equivale a effettuare una traslazione orizzontale di vettore $\left(\frac{e}{3}, 0\right)$).

Si ottiene:

$$x^3 + px + q = 0$$

Risolvi l’equazione

$$x^3 - 15x - 4 = 0$$

Si ottiene l'insieme delle soluzioni

$$S = \{ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \}$$

Si ottiene l'insieme delle soluzioni

$$S = \{-2 - \sqrt{3}, -2 + \sqrt{3}, 4\}$$

Formula risolutiva delle equazioni di terzo grado

$$x^3 + px + q = 0$$

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

Applica la formula risolutiva all’equazione $x^3 - 15x - 4 = 0$

$$x^3 + px + q = 0$$

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

$$x^3 - 15x - 4 = 0$$

x =

Si ottiene:

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$$

Fu Rafael Bombelli (1526 – 1572), algebrista bolognese, a dimostrare, introducendo per la prima volta i numeri immaginari, come tale espressione potesse essere trasformata nel numero 4.

I numeri immaginari

Si chiama *unità immaginaria* i la radice quadrata di – 1 e si scrive:

$$i = \sqrt{-1}$$

Il quadrato dell'unità immaginaria vale perciò – 1, quindi

$$i^2 = -1.$$

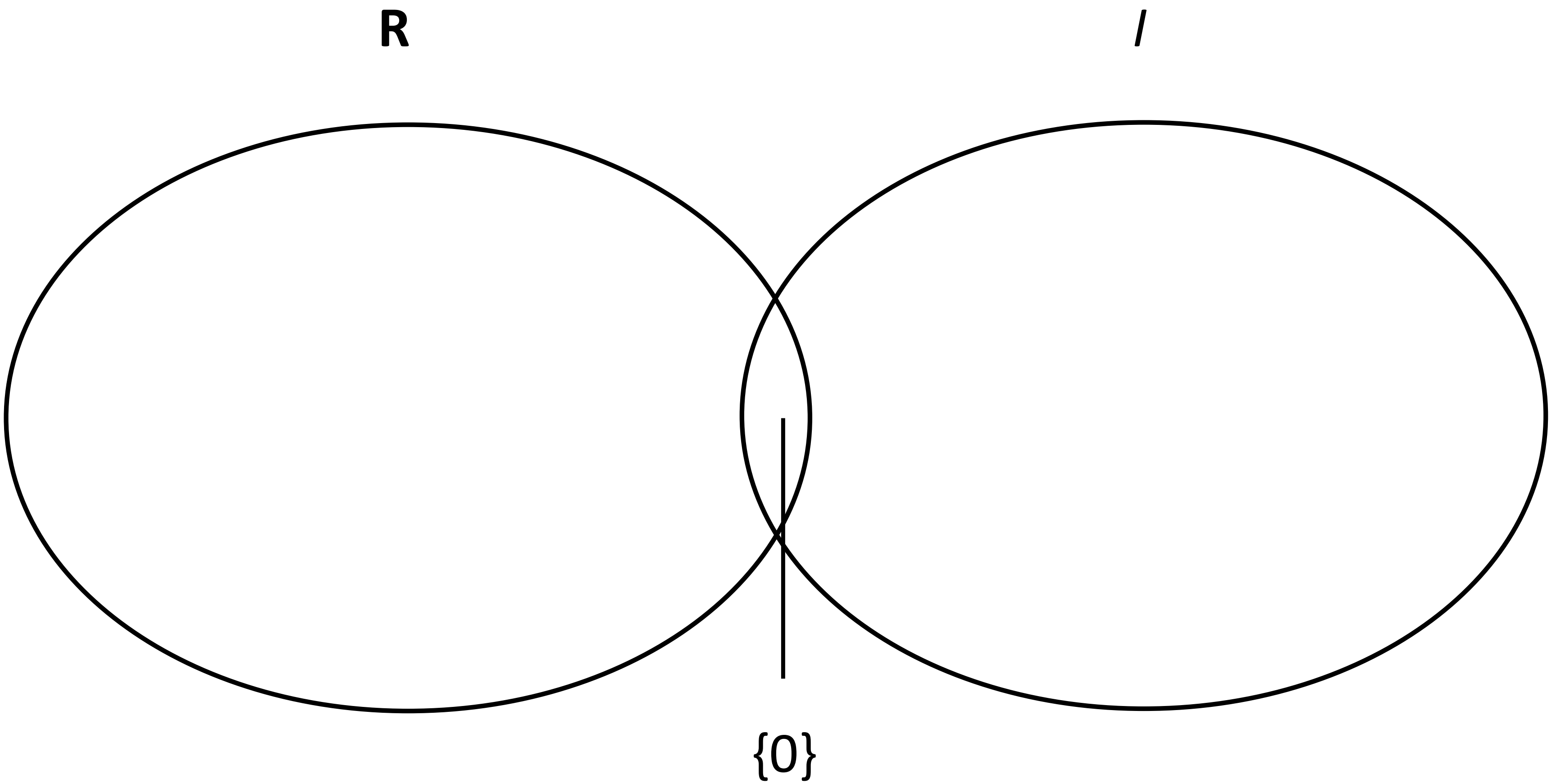
Si chiama *numero immaginario* il prodotto di un numero reale per l’unità immaginaria.

$$a \cdot i \quad \text{con } a \in \mathbf{R}$$

Quanti sono i numeri immaginari?

Come si possono rappresentare geometricamente?

Che relazione intercorre tra l’insieme dei numeri reali e quello dei numeri immaginari?


R
I
{0}

Potenze di i

$i^2 =$

$i^3 =$

$i^4 =$

$i^5 =$

I numeri immaginari e la risoluzione di equazioni a coefficienti razionali:

$x^2 + 4 = 0$

$x^2 + 6 = 0$

$x^2 + 8 = 0$

$x^2 + 10 = 0$

$$x^2 + 4 = 0$$

$$x^2 = -4$$

$$x = -2i \lor x = 2i$$

che sono i due numeri immaginari il cui quadrato è – 4

Il binomio $x^2 + 4$ può allora esser scomposto come

$$(x + 2i)(x - 2i)$$

Risolvi l’equazione $x^2 - 2x + 3 = 0$.

Si ottiene

$$x = 1 \pm i\sqrt{2}$$

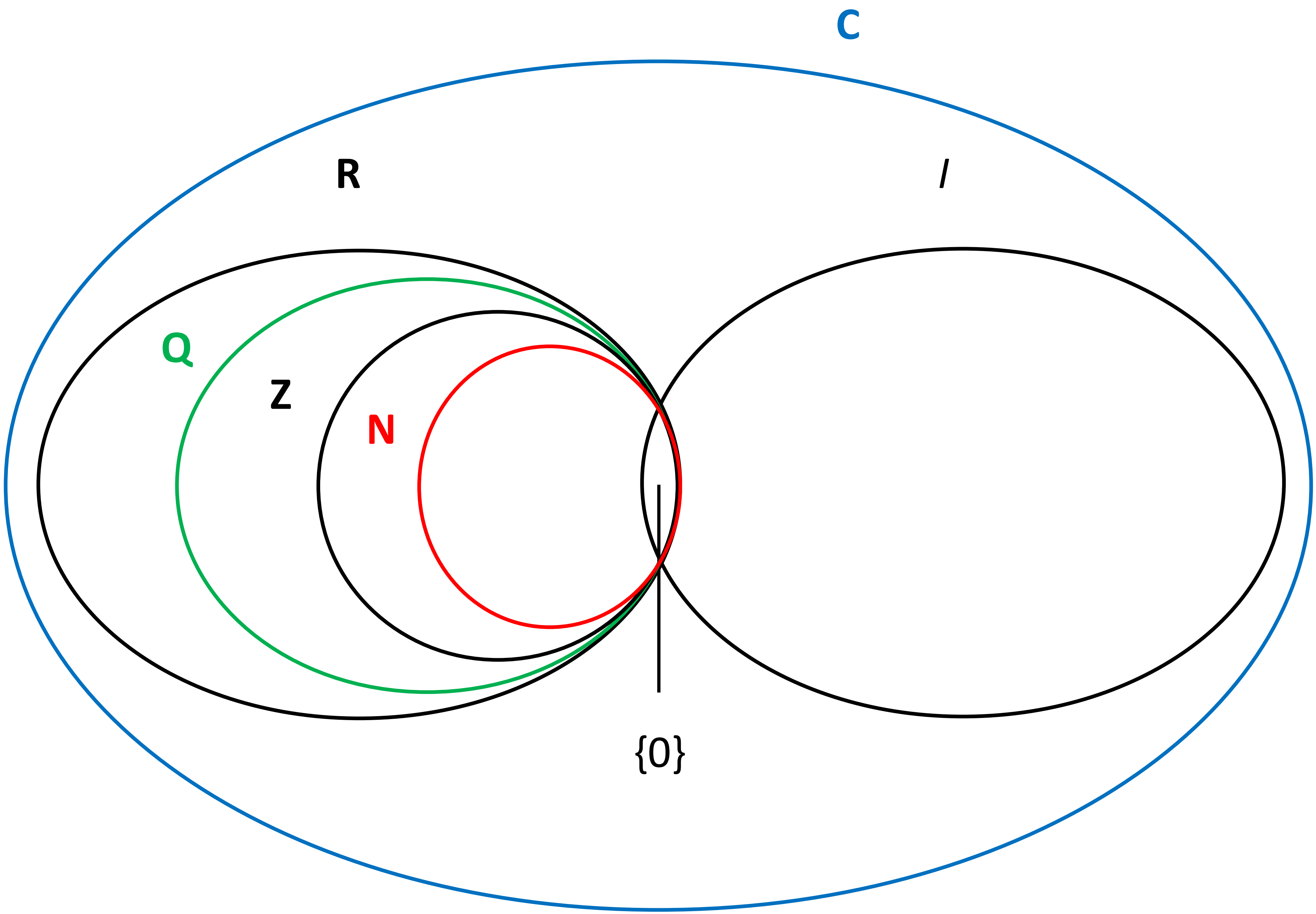
I numeri complessi

Si dice *numero complesso* l'addizione algebrica di un numero reale e di un numero immaginario

$$a + ib$$

con $a, b \in R$ e i unità immaginaria.

Che relazione intercorre tra l’insieme dei numeri complessi e gli insiemi numerici già studiati?


C
R
I
Q
Z
N
{0}

Risolvi l’equazione $x^3 - 1 = 0$

$x^3 - 1 = 0$

$(x - 1)(x^2 + x + 1) = 0$

$x = 1 \vee x^2 + x + 1 = 0$

$$x = 1 \vee x = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

che sono, come si può verificare, i tre numeri il cui cubo è 1.

Operazioni con
i numeri complessi

L’addizione e la moltiplicazione di numeri complessi si risolvono con le consuete regole del calcolo algebrico:

$(3 + 2i) + (-1 + 5i) =$

$(7 - 2i) - (3 + 4i) =$

$(3 - 2i)(-6 + i) =$

$(3 - 2i)^3 =$

L'addizione e la moltiplicazione di numeri complessi si risolvono con le consuete regole del calcolo algebrico:

$(3 + 2i) + (-1 + 5i) =$

$(7 - 2i) - (3 + 4i) =$

$(3 - 2i)(-6 + i) =$

$(3 - 2i)^3 =$

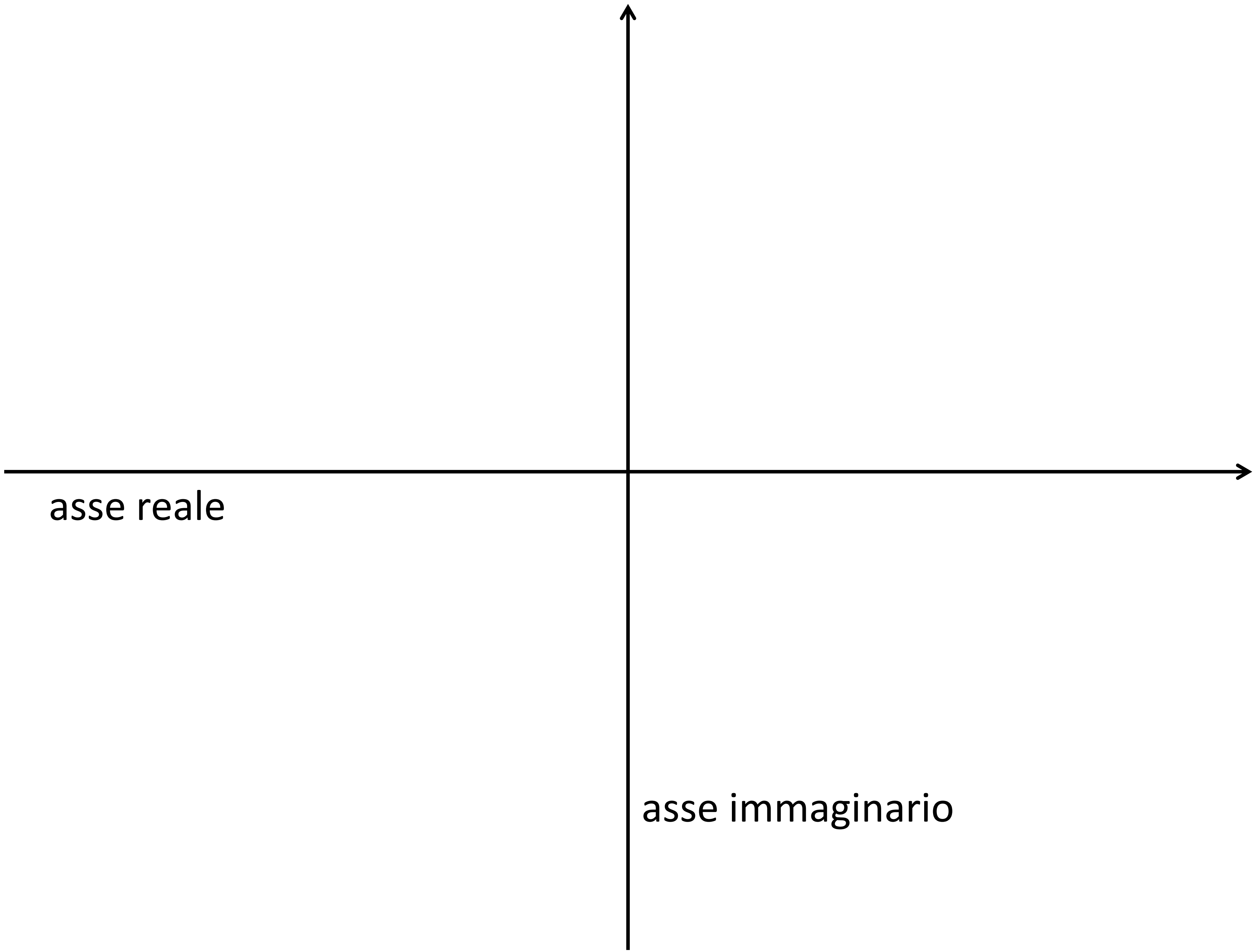
La divisione tra due numeri complessi si risolve

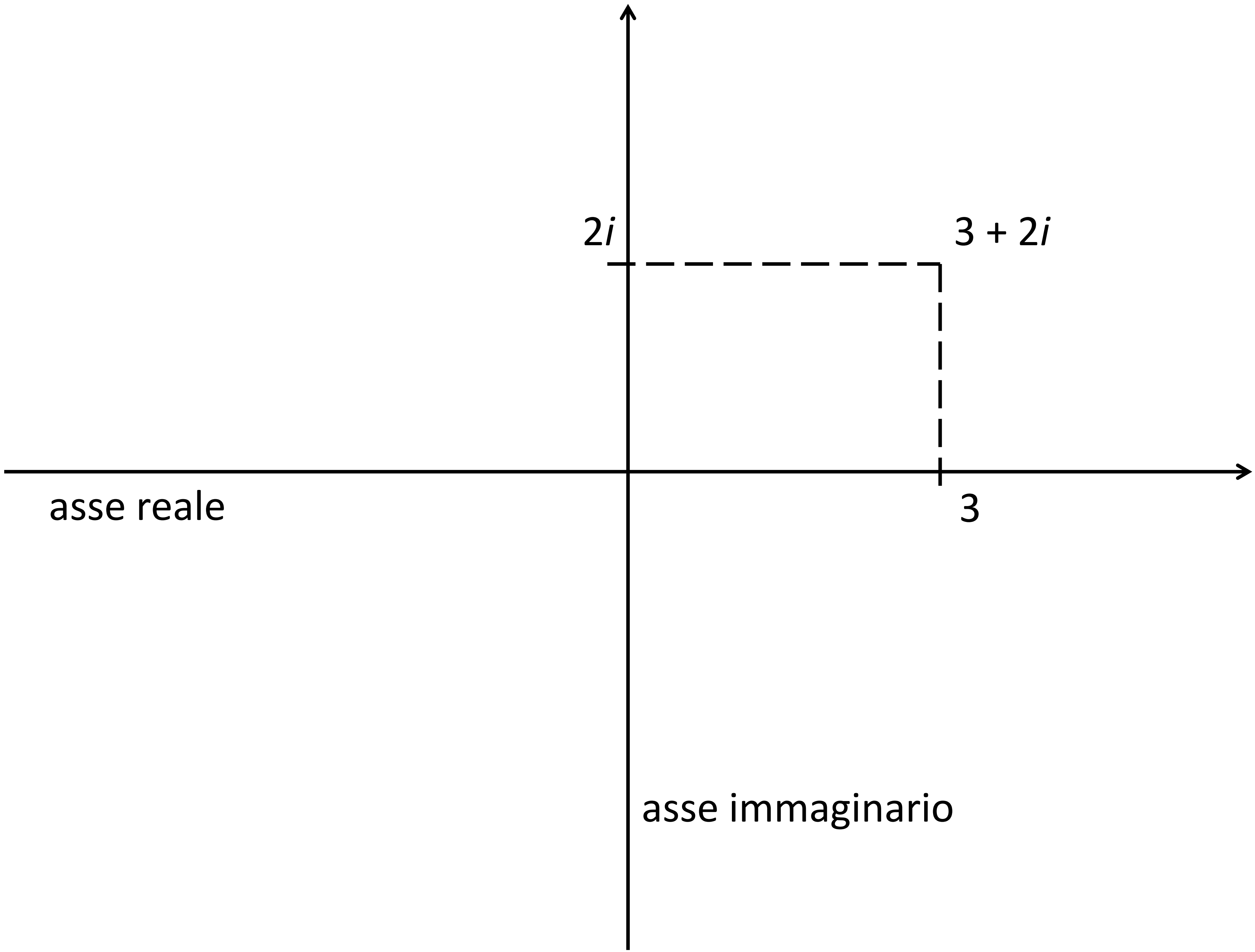
rendendo reale il divisore:

$$\frac{4+3i}{2-i} = \frac{4+3i}{2-i} \cdot \frac{2+i}{2+i} = \frac{(4+3i)(2+i)}{4-i^2} =$$

$$= \frac{8+4i+6i+3i^2}{5} = \frac{5+10i}{5} = 1+2i$$

Rappresentazione geometrica dei numeri complessi


asse reale
asse immaginario


2i
3 + 2i
asse reale
3
asse immaginario

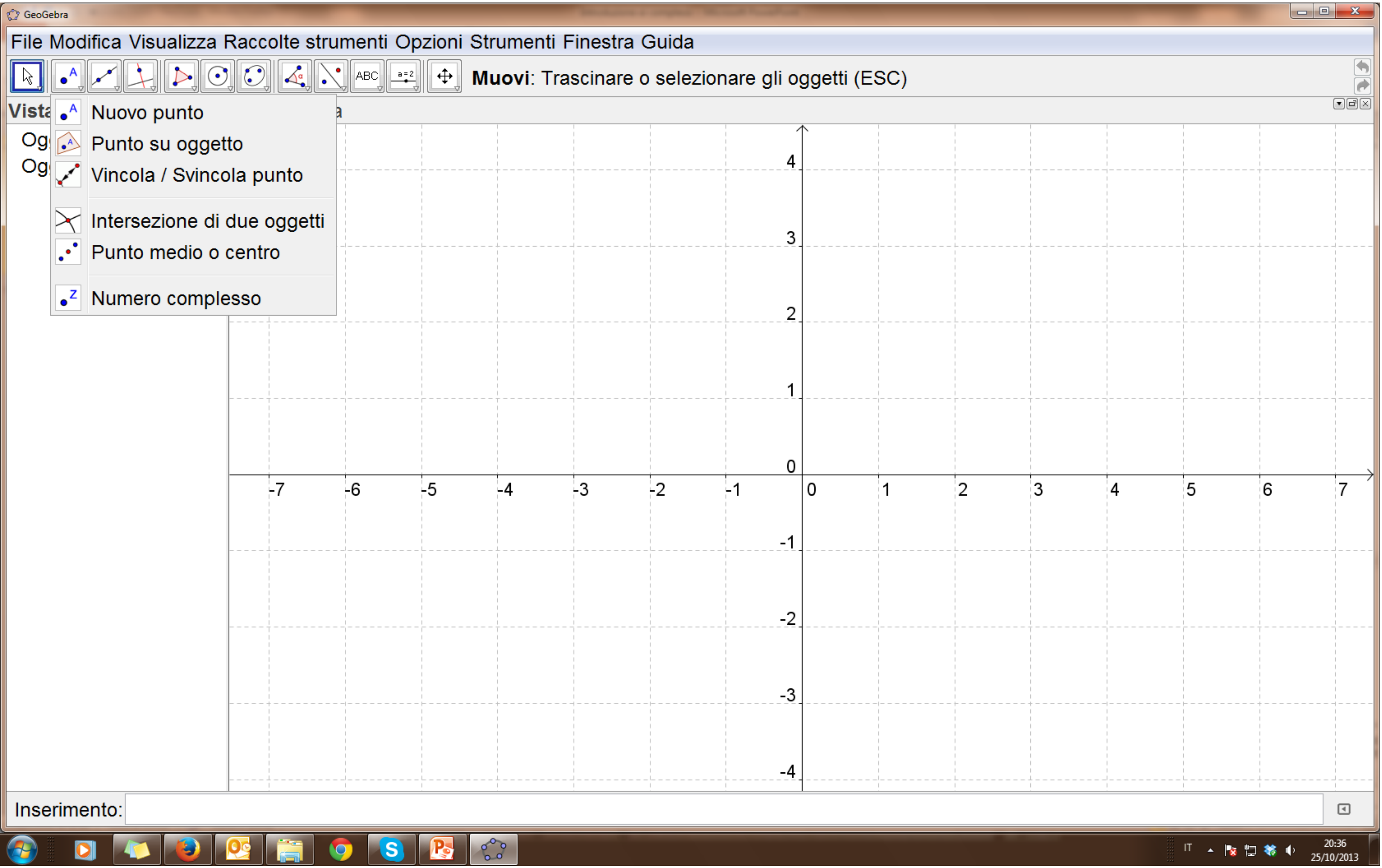
Il piano con un sistema di riferimento costituito da un asse reale e un asse immaginario è detto piano di *Argand–Gauss*.

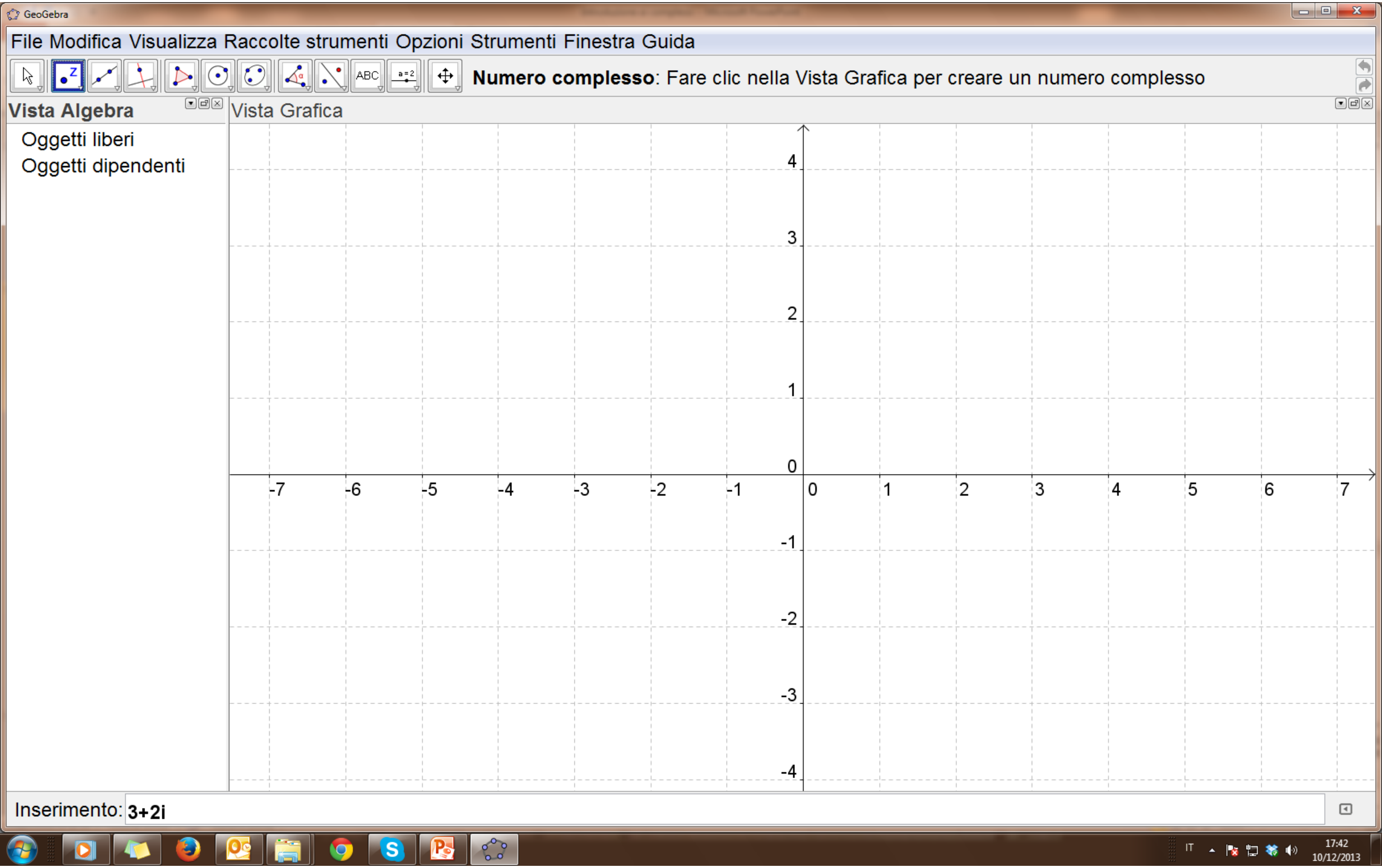
Rappresenta geometricamente le soluzioni

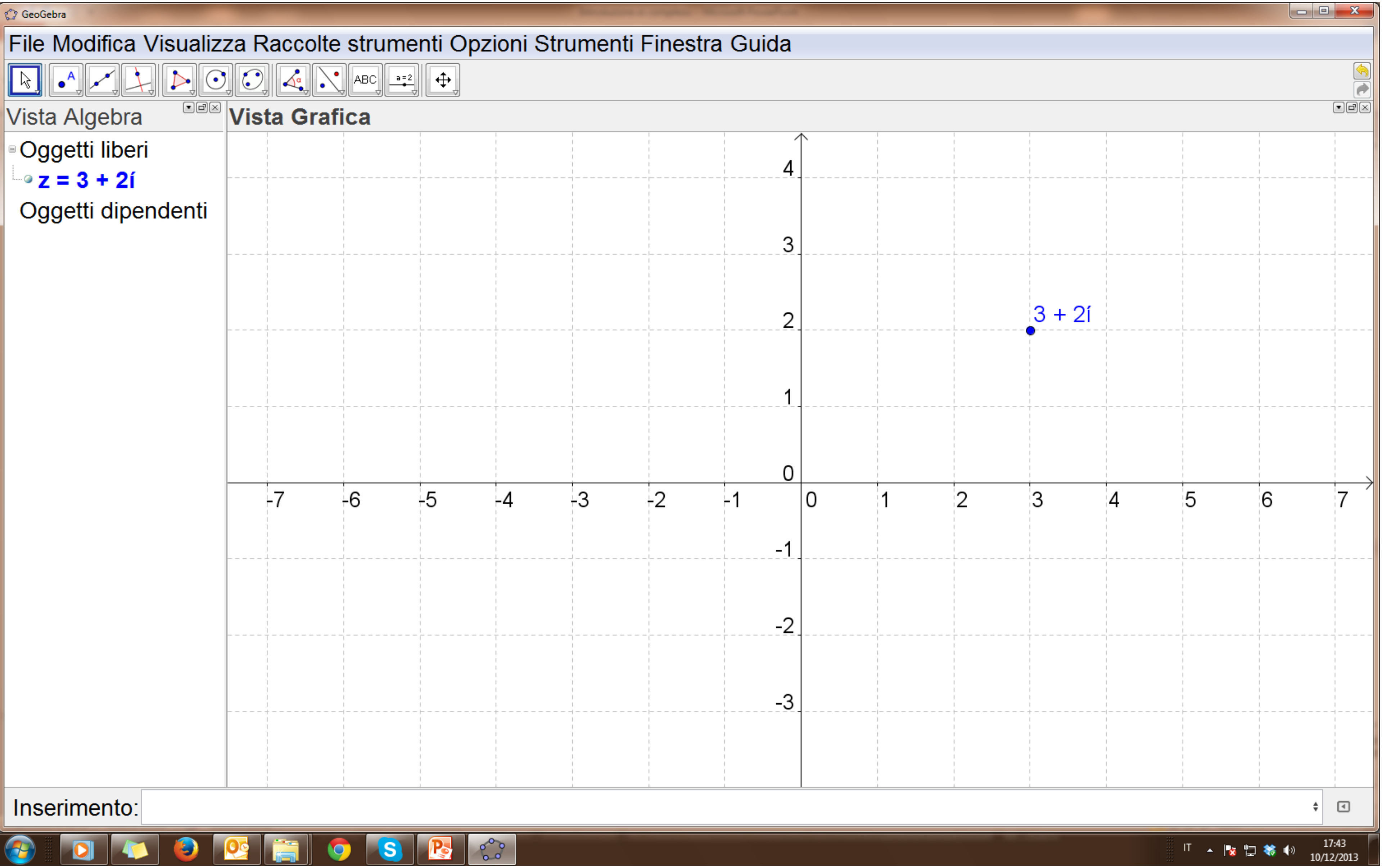
dell’equazione $x^3 - 1 = 0$.

Quanti sono i numeri complessi?

Rappresentazione dei numeri complessi con GeoGebra


GeoGebra
File Modifica Visualizza Raccolte strumenti Opzioni Strumenti Finestra Guida
Muovi: Trascinare o selezionare gli oggetti (ESC)
Nuovo punto
Punto su oggetto
Vincola / Svincola punto
Intersezione di due oggetti
Punto medio o centro
Numero complesso
Inserimento:


GeoGebra
File Modifica Visualizza Raccolte strumenti Opzioni Strumenti Finestra Guida
ABC
Numero complesso: Fare clic nella Vista Grafica per creare un numero complesso
Vista Algebra
Oggetti liberi
Oggetti dipendenti
Vista Grafica
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
-7 -6 -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 7
Inserimento: 3+2i
IT
17:42
10/12/2013


GeoGebra
File Modifica Visualizza Raccolte strumenti Opzioni Strumenti Finestra Guida
ABC
Vista Algebra
Vista Grafica
Oggetti liberi
z = 3 + 2í
Oggetti dipendenti
3 + 2í
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-7 -6 -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 7
Inserimento:
IT
17:43
10/12/2013

Dopo aver risolto in **C** le seguenti equazioni, rappresenta le soluzioni trovate sul piano di Gauss:

$2x^3 - x^2 - 4x - 4 = 0$

$x^3 + 3x^2 + 5x + 3 = 0$

$2x^4 - 5x^3 + 6x^2 - 5x + 2 = 0$

$x^4 - x^3 + 8x - 8 = 0$

Risolvi l’equazione $x^3 + 8 = 0$

$x^3 + 8 = 0$

$(x + 2)(x^2 - 2x + 4) = 0$

$x = -2 \vee x^2 - 2x + 4 = 0$

$x = -2 \vee x = 1 \pm i\sqrt{3}$

che sono, come si può verificare, i tre numeri il cui cubo è – 8.

Risolviamo l’equazione:

$$x^4 + 4 = 0$$

$$x^4 + 4 = 0$$

$$x^4 + 4x^2 + 4 - 4x^2 = 0$$

$$(x^2 + 2)^2 - 4x^2 = 0$$

$$[(x^2 + 2) - 2x]\,[(x^2 + 2) + 2x] = 0$$

$$(x^2 - 2x + 2)\,(x^2 + 2x + 2) = 0$$

Dopo aver risolto in **C** le seguenti equazioni, rappresenta le soluzioni trovate sul piano di Argand-Gauss:

$x^3 - 1 = 0$

$x^3 + 1 = 0$

$x^3 - 4 = 0$

$x^3 + 27 = 0$

$x^4 - 1 = 0$

$x^4 + 1 = 0$

$x^4 - 10 = 0$

$x^4 + 16 = 0$

Applicazione della formula risolutiva delle equazioni di terzo grado

Abbiamo visto, applicando il metodo di Ruffini, che l’equazione

$$x^3 - 15x - 4 = 0$$

ha come insieme delle soluzioni

$$S = \{-2 - \sqrt{3}, -2 + \sqrt{3}, 4\}$$

… e che applicando la formula risolutiva dell’equazione di terzo grado

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

si giunge all’uguaglianza

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$$

Calcolo dell’espressione $\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$

Poiché $\sqrt{-121} = 11i$

si avrà $\sqrt[3]{2+11i} + \sqrt[3]{2-11i}$

Dal momento, come è facile verificare,

$2 + 11i = (2 + i)^3$ e $2 - 11i = (2 - i)^3$

si otterrà: $2 + i + 2 - i = 4$

Risolvi l’equazione

$$x^3 - 20x - 32 = 0$$

Si ottiene l’insieme delle soluzioni

$$S = \{ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \}$$

Si ottiene l’insieme delle soluzioni

$$S = \{1 - \sqrt{17}, -2, 1 + \sqrt{17}\}$$

Applica la formula risolutiva all'equazione $x^3 - 20x - 32 = 0$

Equazione trattata da Cardano nella sua opera *De Regula Aliza Libellus*, edita a Basilea nel 1570.

$$x^3 + px + q = 0$$

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

$$x^3 - 20x - 32 = 0$$

x =

Si ottiene

$$x = \sqrt[3]{16 + \sqrt{-\frac{1088}{27}}} + \sqrt[3]{16 - \sqrt{-\frac{1088}{27}}}$$

da cui

$$x = \sqrt[3]{16 + \frac{8}{3} i \sqrt{\frac{17}{3}}} + \sqrt[3]{16 - \frac{8}{3} i \sqrt{\frac{17}{3}}}$$

Poiché

$$16+\frac{8}{3}i\sqrt{\frac{17}{3}}=\left(-1-i\sqrt{\frac{17}{3}}\right)^3 \quad \text{e} \quad 16-\frac{8}{3}i\sqrt{\frac{17}{3}}=\left(-1+i\sqrt{\frac{17}{3}}\right)^3$$

si avrà

$$x=-1-i\sqrt{\frac{17}{3}}-1+i\sqrt{\frac{17}{3}}=-2$$

Breve storia dei numeri complessi

http://areeweb.polito.it/didattica/polymath/htmlS/argoment/APPUNTI/TESTI/Dic03/Cap2.html

Teorema fondamentale dell’algebra

Ogni polinomio di grado $n \geq 1$ a coefficienti complessi si scompone nel prodotto di n fattori lineari a coefficienti complessi e ammette n radici complesse, eventualmente coincidenti.

La storia del teorema fondamentale dell'algebra si potrebbe sommariamente suddividere in queste fasi:

1. formulazione del teorema senza alcuna dimostrazione (inizio del XVII secolo);

2. primi tentativi di dimostrazione a opera di Eulero, D'Alembert (1717-1783), Lagrange (1736-1813);

3. prima dimostrazione del teorema sostanzialmente rigorosa dovuta a Gauss (1777-1855) del 1799;

4. dimostrazioni successive (dal 1811 in poi).

A cosa servono
i numeri complessi

Ian Stewart (1945), matematico e divulgatore scientifico britannico, nel suo libro *Le 17 equazioni che hanno cambiato il mondo*, dedica il quinto capitolo, *I prodigi di un mondo immaginario*, all'equazione

$$i^2 = -1$$

E a proposito dei numeri complessi afferma…

A cosa servono?

- A elaborare nuovi metodi per il calcolo delle funzioni goniometriche
- A generalizzare quasi tutte le operazioni della matematica al campo delle funzioni complesse
- Consentono di elaborare strategie più efficienti per lo studio delle onde, della termodinamica, dell’elettrologia, del magnetismo.
- Sono tra le basi matematiche della meccanica quantistica.

La *funzione zeta*, che Riemann usò per indagare il modello di distribuzione dei numeri primi, è una funzione definita nell’insieme dei numeri complessi.

Il problema della distribuzione dei numeri primi è un problema ancora aperto che va sotto il nome di *Ipotesi di Riemann*.

Il 24 maggio del 2000 si è tenuto a Parigi il *Convegno del Millennio* al quale hanno partecipato i più influenti matematici dell'epoca. Durante l'incontro, il *Clay Mathematics Institute* (CMI) ha fornito una lista dei «più importanti problemi classici che hanno resistito ai tentativi di soluzione nel corso degli anni» e per ognuno dei quali ha messo in palio un premio di un milione di dollari destinato a chi risolverà per primo ognuno di tali problemi.

L'*ipotesi di Riemann* è uno dei sette *problemi del Millennio*.

Keith Devlin (1947), matematico e divulgatore scientifico britannico, nel suo libro *I problemi del Millennio*, dedica il primo capitolo, *La musica dei numeri primi*, all'ipotesi di Riemann.