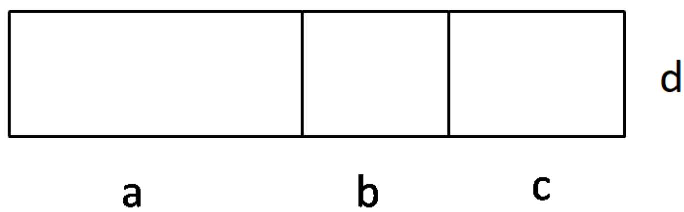
Libro II (prime otto proposizioni) degli Elementi di Euclide

Il libro II può fornire molteplici spunti didattici a qualunque livello scolastico. Permette infatti di rivedere parte della trattazione algebrica scolastica in chiave geometrica arricchendola notevolmente di significato. Naturalmente occorrerà fare delle differenze a seconda se ci si rivolge a studenti della scuola secondaria di primo o di secondo grado.
Le proporzioni in genere possono essere dedotte dal semplice esame del disegno realizzato relativo comprendendo che, negli infiniti altri casi, le cose non potranno andare diversamente.

Prop. II. 1
Se si danno due rette e si divide una di esse in quante parti si voglia, il rettangolo compreso dalle due rette è uguale alla somma dei rettangoli compresi dalla retta indivisa e da ciascuna delle parti dell'altra[1].

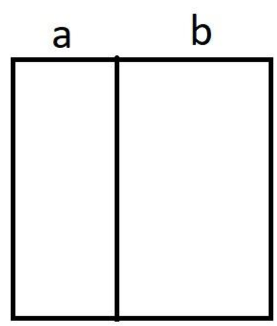
Se le due rette sono d e quella che poi viene divisa in quante parti si voglia, tipo a + b + c,



dalla figura è evidente che:

$$(a + b + c)d = ad + bd + cd.$$

Prop. II. 2
Se si divide a caso una linea retta, la somma dei rettangoli compresi da tutta la retta e da ciascuna delle sue parti è uguale a quadrato di tutta la retta.

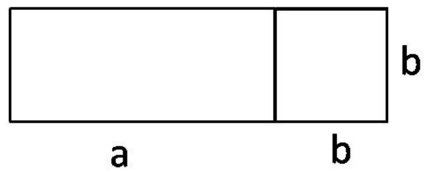


Analogamente a prima, si evince dalla figura che:

$$(a + b)a + (a + b)b = (a + b)^2.$$

Prop. II. 3
Se si divide a caso una linea retta, il rettangolo compreso da tutta la retta e da una delle parti è uguale alla somma del rettangolo compreso dalle parti e del quadrato della parte precedente. .

[1] L'enunciato della proposizione, come tutti le altre, sono prese da: "Gli Elementi di Euclide" a cura di A. Frajese e L. Maccioni.

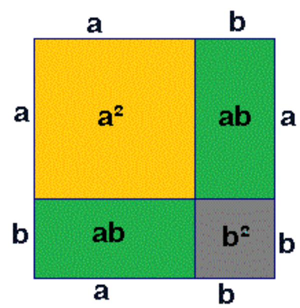


Dalla figura:

$$(a+b)b = ab + b^2.$$

Prop. II. 4

Se si divide a caso una linea retta, il quadrato di tutta la retta è uguale alla somma dei quadrati delle parti e del doppio del rettangolo compreso dalle parti (stesse).

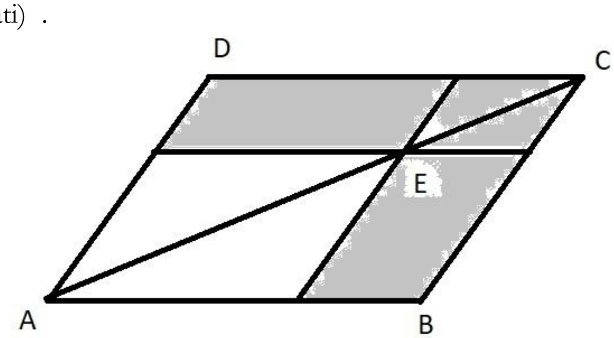


Dalla figura:

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab.$$

Lo gnomone

Dato un qualsiasi parallelogramma ABCD considerata una sua qualunque diagonale ed un suo punto E, tracciate da questo le parallele ai lati del parallelogramma, si otterranno 4 parallelogrammi interni, 2 dei quali detti *intorno alla diagonale* e 2 detti *complementi*. Dicesi *gnomone* l'unione di uno dei due parallelogrammi intorno alla diagonale e dei due complementi (i poligoni colorati) .



Prop. I.43

In ogni parallelogrammo i complementi dei parallelogrammi (posti) intorno alla diagonale sono uguali tra di loro.

Segue facilmente della Nozione Comune 3.

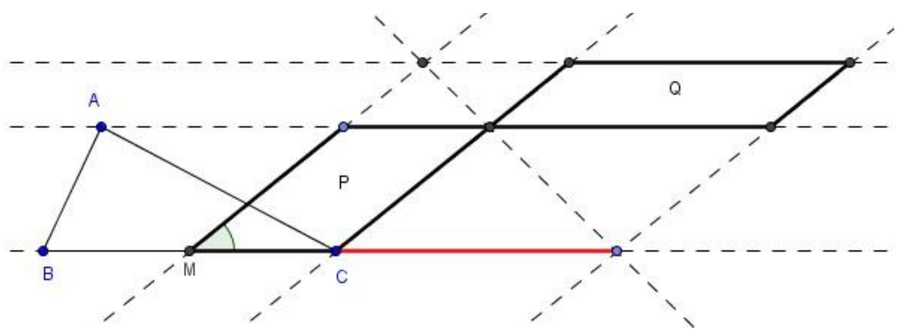
Esercizio.

D*ato un parallelogramma costruisci quello equivalente di lato assegnato e avente gli stessi angoli di quello dato.*

Di fatto si tratta di ripetere la costruzione dello gnomone a partire da un parallelogramma assegnato e prolungando uno dei due lati del segmento dato.

Prop. I.44
Applicare ad una retta data, in un dato angolo rettilineo, un parallelogramma uguale ad un triangolo dato.

Sia dato il triangolo ABC, dal punto medio M di BC si traccia la retta per formare, con il lato BC, l'angolo dato (segnato in figura).



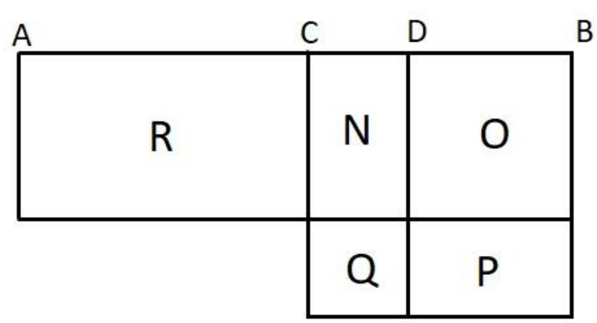
Si completa il parallelogramma P che sarà equivalente al triangolo dato. Prolungato BC del lato dato (rosso in figura) si completa lo gnomone. Il parallelogramma Q è equivalente al triangolo dato ABC avente come lato ed angolo quelli dati.

Prima applicazione delle aree.
Questa proposizione è la prima di altre vedremo in seguito legata ad antichi studi pitagorici sulla così detta *applicazione delle aree*. Questo primo tipo di problema recita: *dato un segmento* a *e un'area quadrata* S *si applica (parabolè) ad* a *un altro segmento* x *tale che si formi un rettangolo di lati* a *e* x *di area* S *cioè* $ax = S$.

Posto nella forma algebrica è un problema di 1° grado mentre è risolto geometricamente appunto dalla costruzione della I.44 appena vista.

Ritorniamo , dopo la precedente digressione, prerequisito delle prossime proposizioni, al Libro II.

Prop. II. 5
Se si divide una retta in parti uguali e diseguali, il rettangolo compreso dalle parti diseguali della retta, insieme col quadrato della parte compresa fra i punti di divisione, è uguale al quadrato della metà della retta.
La retta data è AB, C è il suo punto medio.



In sostanza si chiede di verificare che $r(\mathrm{AD}, \mathrm{DB}) + \mathrm{q}(\mathrm{CD}) = \mathrm{q}(\mathrm{AC})$.

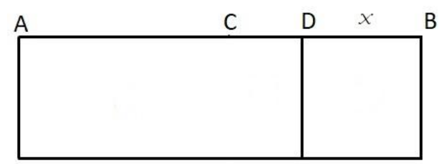
Sapendo che R = N + O e N = P per la Prop. I.43, allora R + N + Q = N + O + N + Q = N + O + P + Q da cui la tesi.

La precedente proposizione offre diversi spunti didattici.
Innanzi tutto, detto AC = *m* e CD = *n* e quindi DB = *m* - *n,* la $r(\mathrm{AD},\mathrm{DB})+\mathrm{q}(\mathrm{CD})=\mathrm{q}(\mathrm{AC})$ riscritta come $r(\mathrm{AD},\mathrm{DB})=\mathrm{q}(\mathrm{AC})-\mathrm{q}(\mathrm{CD})$ diverrebbe

$$(m+n)(m-n)=m^2-n^2.$$

Seconda applicazione delle aree.
Il secondo tipo di problema recita: *dato un segmento a e un'area quadrata S si applica ad a un altro segmento x tale che si formi un rettangolo di lati a e x di area S la cui base è parte di a con la parte mancante che generi un quadrato.* Si parla, in questo caso, di *applicazione ellittica* o *applicazione per difetto.*

Questo tipo di problema dunque , una volta risolto, permette di trovare i lati di rettangolo noto il suo perimetro e la sua area.
Se $AB=a, DB=x$ e quindi $CD=\frac{a}{2}-x$ la $r(\mathrm{AD},\mathrm{DB})+\mathrm{q}(\mathrm{CD})=\mathrm{q}(\mathrm{AC})$ diviene



$$S+\left(\frac{a}{2}-x\right)^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2$$

cioè

$$\left(\frac{a}{2}-x\right)^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2-\mathrm{S}$$

$$\frac{a}{2}-x=\pm\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-\mathrm{S}}$$

che porta a

$$\begin{cases} x=\frac{a}{2}-\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-\mathrm{S}} \\ x=\frac{a}{2}+\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-\mathrm{S}} \end{cases}$$

Si sarà notato che se si indicasse la superficie S con y^2 la precedente equazione prenderebbe la forma

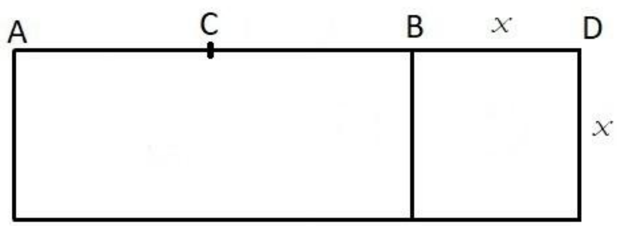
$$y^2=ax-x^2$$

che fa anche comprendere le ragioni del nome attribuito a questa curva una volta rappresentata su grafico cartesiano.

Ma come avrebbe fatto un geometra greco dato un segmento $AB=a$ e un'area $S=y^2$ a determinare la posizione del punto D sul segmento AB tale per cui fosse valida la $r(\mathrm{AD},\mathrm{DB})+\mathrm{q}(\mathrm{CD})=\mathrm{q}(\mathrm{AC})$ essendo $S=y^2=r(\mathrm{AD},\mathrm{DB})$?

Si tracci il segmento $AB = a$ noto e si determini il suo punto medio C; da tale punto si traccia la perpendicolare $CP = y$ e con centro in P e raggio $\frac{a}{2}$ (per cui $y < \frac{a}{2}$) si traccia un arco di circonferenza che interseca AB in un punto che chiameremo D e che rappresenta il punto che si cerca.
Infatti, si ha che $CD = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - y^2}$ per cui $\mathrm{q(AC)} - \mathrm{q(CD)} = \left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 + y^2 = y^2$.

Prop. II.6
Se si divide una retta, ed un'altra le è aggiunta per diritto, il rettangolo compreso da tutta la (prima) retta più quella aggiunta e dalla retta aggiunta, insieme col quadrato della metà (della prima), è uguale al quadrato della retta composta dalla metà (della prima) e dalla retta aggiunta.



La validità della proposizione, che tradotta diviene,

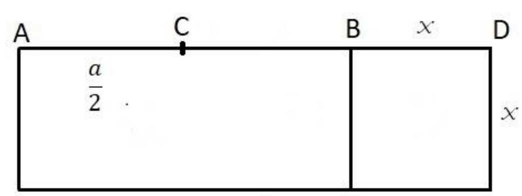
$$r(\mathrm{AB}, \mathrm{BD}) + q(\mathrm{CB}) = q(\mathrm{CD})$$

è facilmente verificabile.

Terza applicazione delle aree.

Il terzo tipo di problema recita: *si applica su un segmento* a *un altro segmento* x *in modo da formare un rettangolo di ar*ea *uguale a quella data* S *la cui base eccede* a *di un quadrato*. Si parla, in questo caso, di *applicazione iperbolica* o *applicazione per eccesso.*

Questo tipo di problema dunque, una volta risolto, permette di trovare i lati di rettangolo nota la differenza di due suoi lati e la sua area.



Se $AB = a$ e $BD = x$ la

$$r(\mathrm{AB}, \mathrm{BD}) + q(\mathrm{CB}) = q(\mathrm{CD})$$

diviene

$$S + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{a}{2}\right)^2.$$

Esercizio. Determinare la soluzione algebrica.

Al solito se si indicasse $S = y^2$ la precedente equazione prenderebbe la forma

$$y^2 - x^2 = ax$$

che fa anche comprendere, anche in questo caso, le ragioni del nome attribuito a questa curva una volta rappresentata su grafico cartesiano.

Esercizio.

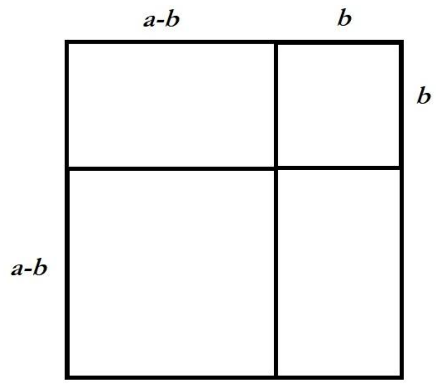
Anche in questo caso ci si può chiedere come avrebbe fatto un geometra greco, dato un segmento $AB = a$ e un'area $S = y^2$ a determinare la posizione del punto D sul prolungamento del segmento AB tale per cui fosse valida la

$$r(\mathrm{AB}, \mathrm{BD}) + q(\mathrm{CB}) = q(\mathrm{CD})$$

con $S = y^2 = r(\mathrm{AB}, \mathrm{BD})$?

Prop. II.7

Se si divide a caso una linea retta, il quadrato di tutta la retta e quello di una delle parti, presi ambedue insieme, sono uguali al doppio del rettangolo compreso da tutta a retta e dalla detta parte, insieme col quadrato della parte rimanente.



Secondo le notazioni in figura, la validità della proposizione, la quale afferma che

$$a^2 + b^2 = 2ab + (a-b)^2$$

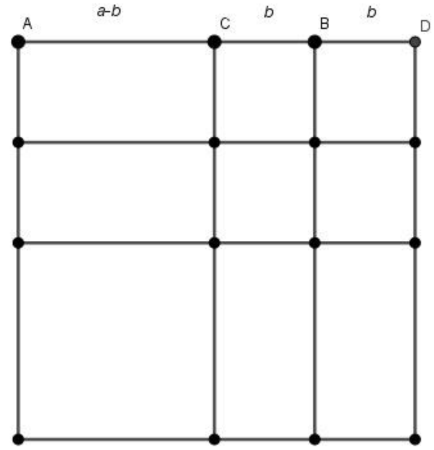
è facilmente verificabile.

A livello didattico è tipicamente usata nella forma

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

Prop. II.8

Se si divide a caso una linea retta, il quadruplo del rettangolo compreso da tutta la retta e da una delle parti, insieme col quadrato della parte rimanente, è uguale al quadrato descritto, come su una sola linea retta, sulla somma di tutta la retta iniziale e della detta parte.



Sostanzialmente la proposizione afferma che:

$$4\mathrm{r}(\mathrm{AB}, \mathrm{CB}) + \mathrm{q}(\mathrm{AC}) = \mathrm{q}(\mathrm{AD})$$

o analogamente

$$4ab + (a - b)^2 = (a + b)^2$$

facilmente verificabile.

Questa proposizione non viene mai applicata nel seguito degli Elementi; tuttavia Frajese congettura che fosse utilizzata da Euclide, insieme alla II.5 e alla II.6 per risolvere problemi di secondo grado (come probabilmente ereditato dalla matematica babilonese dell'epoca risalente ad Hammurabi, circa 1700 a.C.). Queste idee sono particolarmente utili perché realmente formative a livello didattico.

Infatti si parte dal problema

$$\begin{cases} a + b = s \\ ab = p \end{cases}$$

Quindi $(a + b)^2 - 4ab = s^2 - 4p$. Per la prop. II.8 si ha che

$$s^2 - 4p = (a - b)^2$$

da cui

$$a - b = \sqrt{s^2 - 4p}$$

Pertanto il sistema somma e prodotto iniziale viene trasformato nel sistema somma e differenza

$$\begin{cases} a + b = s \\ a - b = \sqrt{s^2 - 4p} \end{cases}$$

le cui soluzioni sono

$$a = \frac{s + \sqrt{s^2 - 4p}}{2}$$

$$b = \frac{s - \sqrt{s^2 - 4p}}{2}$$

con

$$\begin{cases} s \geq 2\sqrt{p} \\ p \geq 0 \end{cases}$$

Quelle determinate sono le soluzioni dell'equazione di secondo grado quando è posta nella forma

$$x^2 - sx + p = 0.$$

Ma tutte le equazioni di secondo grado possono essere riportate in tale forma: infatti data

$$ax^2 + bx + c = 0$$

nel caso in cui che $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$, essendo le sue soluzioni dunque

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \text{ e } x_2 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

questa può essere riscritta nella forma

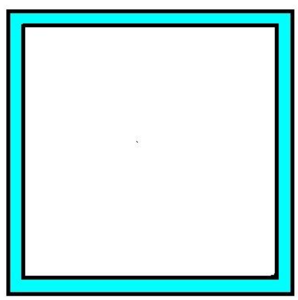
$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a(x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2) = 0.$$

Vediamo un'idea su come sfruttare quest'idea in una scuola secondaria di primo grado. Si debbono avere a disposizioni i seguenti materiali:

Quattro rettangoli di base b e altezza h (dette figure mobili)

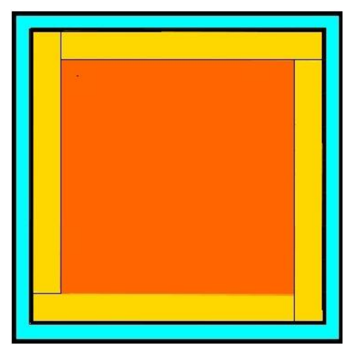
Cornice quadrata di lato $b + h$ (detta base)

Quadrato di lato $b - h$ (detta figura mobile)



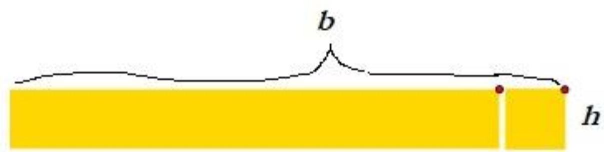
Domanda: inserisci le 5 figure mobili all'interno della base in modo tale che entrino perfettamente senza lasciare spazi liberi e senza sovrapposizioni.

Si troverà una sola disposizione che risolve il problema dato.
Si chiederà subito dopo di determinare le relazioni sussistenti tra i lati delle figure date.



È chiaro che la differenza tra la base del rettangolo giallo e il lato del quadrato arancio è h? Oppure che la differenza tra il lato del quadrato della base e la base del rettangolo giallo è h?

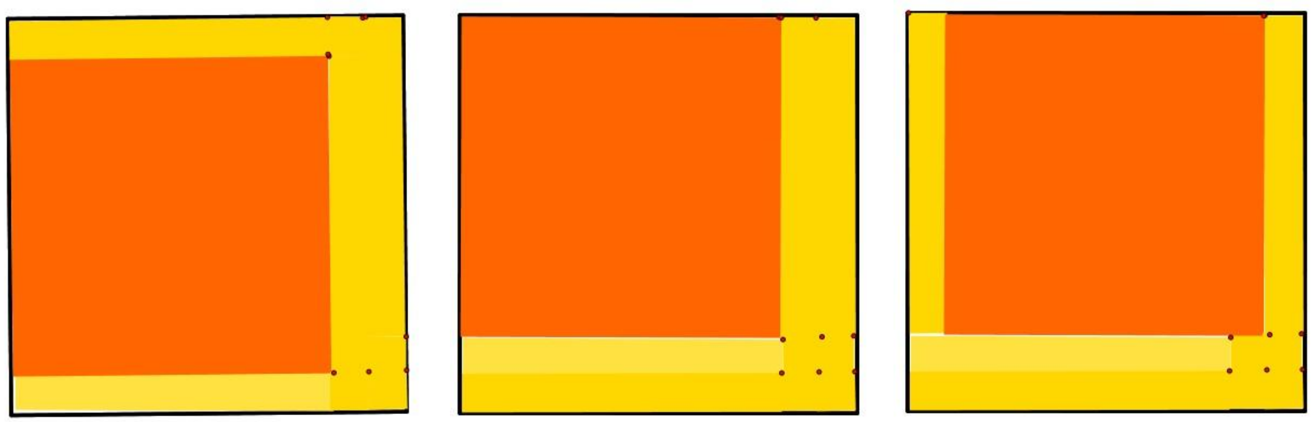
Può essere di aiuto per vedere in modo più immediato queste relazioni consegnando un nuovo materiale: si sostituisce il rettangolo giallo di base b ed altezza h con un nuovo rettangolo di dimensioni $b - h$ ed h ed un quadrato di lato h.



Si ripropone la precedente questione:

Domanda: inserisci le figure mobili all'interno della base in modo tale che entrino perfettamente senza lasciare spazi liberi e senza sovrapposizioni.

Sarà evidente che, con il nuovo materiale, il numero delle soluzioni corrette crescerà notevolmente.



Inoltre risulterà a questo punto altresì evidente che la base avrà lato $b + h$, il quadrato arancione lato $b - h$, i quattro rettangoli gialli base $b - h$ e altezza h e i 4 quadrati gialli lato h.
In ogni caso detto sarà sempre vero che

$$(b-h)^2 = (b+h)^2 - 4bh.$$

Esercizio. Trova i lati di un rettangolo sapendo che il suo perimetro è 40 e l'area è 96. (problema babilonese).
Il problema di fatto è rappresentato da

$$\begin{cases} b+h=20 \\ bh=96 \end{cases}$$

$(b-h)^2 = (b+h)^2 - 4bh = 400 - 384 = 16$

allora $b - h = 4$ e quindi il problema iniziale è divenuto

$$\begin{cases} b+h=20 \\ b-h=4 \end{cases}$$

cioè $b = 12$ e $h = 8$ (la strategia per determinare di b e h cambia a seconda del livello scolastico, ad ogni modo deve essere un prerequisito essenziale).

Esercizio

$$\begin{cases} b+h=\frac{7}{4} \\ bh=\frac{3}{8} \end{cases}.$$