Illustrazione di tavola 2_1

Proponiamo un lavoro sulle frazioni, che ne mette in luce il valore numerico e la relazione di ordinamento, e pone l'attenzione sul ruolo del denominatore. L'attività sollecita inoltre a riconoscere la presenza di alcuni comportamenti regolari, ad esprimere le regolarità rilevate, a verificarle in esempi e cercare un percorso dimostrativo che certifichi la correttezza dell'intuizione.

La tavola e le attività correlate prendono ispirazione da una attività nell'ambito di MATh.en.JEANS, riportata nell'articolo di Cléa Drobinski et Maiwenn Beucher, allievi del Collège Saint Pierre di Plouha, seguiti da Mme Béasse e Mme Boillot e dal ricercatore Victor Kleptsyn, CNRS, Université de Rennes 1, reperibile in https://www.mathenjeans.fr/sites/default/files/suites_de_farey2014-2015_college_st_pierre_plouha.pdf

Per la teoria delle frazioni di Farey è possibile consultare anche G. H. Hardy, E.M. Wright, An introduction to the theory of numbers, Oxford University Press.

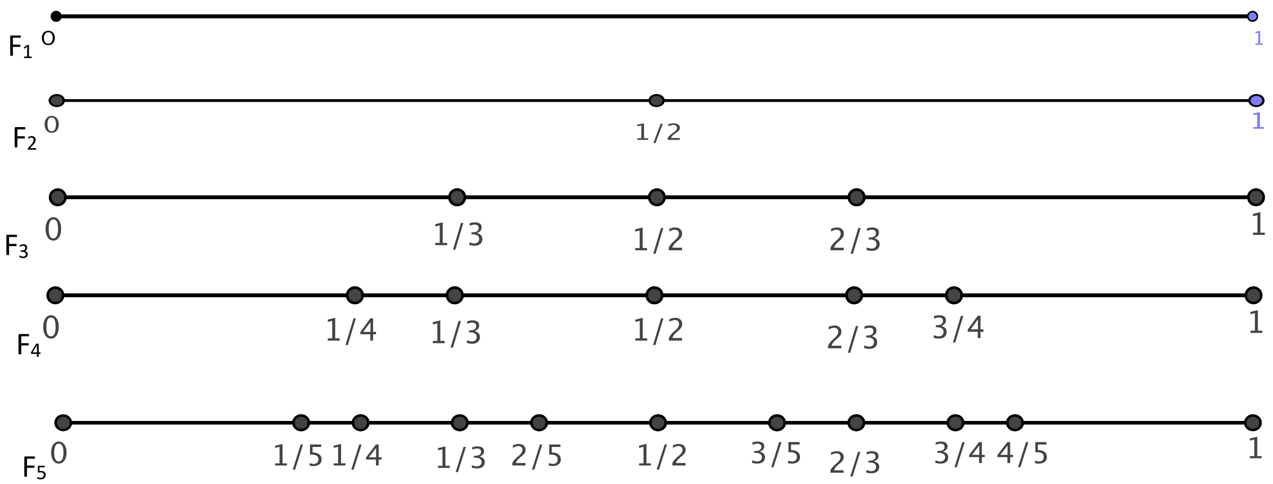
Descrizione della tavola

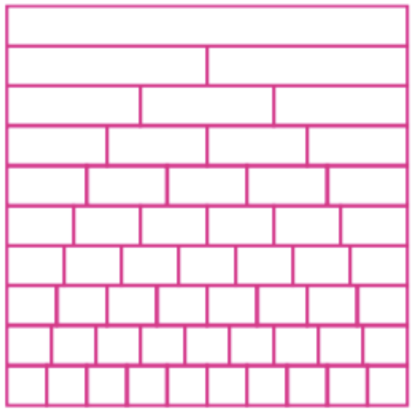
Nella tavola (riportata al termine del documento), si chiede di rappresentare sulla linea dei numeri tutte le frazioni tra 0 e 1 con denominatore minore o uguale a 5, aggiungendo man mano le frazioni ottenute con l'aumentare del denominatore. Poi, si chiede di descrivere la disposizione ottenuta e di determinare gli incrementi tra una frazione e la successiva.

Al crescere del denominatore, vengono di volta in volta inserite nuove frazioni. Ad ogni passo, il numero delle frazioni da inserire sembra variare, è possibile che in alcuni intervalli non venga inserito nulla, la disposizione delle frazioni non è 'regolare' nel senso che le frazioni non appaiono equidistanti. La figura suggerisce, però, una simmetria speculare rispetto alla frazione $\frac{1}{2}$. Inoltre, sembra che le unità frazionarie vadano sempre inserite tra 0 e l'unità frazionaria del precedente passo.

Ogni volta che viene introdotta una nuova frazione, essa deve essere scritta in forma ridotta ai minimi termini; la stessa frazione può ricomparire scritta con denominatore maggiore solo moltiplicando numeratore e denominatore per un fattore comune. **Per le frazioni inserite nell'elenco, manteniamo sempre la notazione della frazione ridotta ai minimi termini.**

Indichiamo con F_n l'elenco ordinato delle frazioni tra 0 e 1 con denominatore minore o uguale a *n*. Tale elenco è chiamato anche **successione di Farey di denominatore non superiore a *n*** (o di '*ordine n*'). I numeri 0 e 1 sono inclusi nella forma delle frazioni $\frac{0}{1}$ e $\frac{1}{1}$. Fissato il denominatore massimo *n*, diciamo che due frazioni sono **consecutive** se nell'elenco F_n compaiono l'una accanto all'altra, senza altre frazioni intermedie.



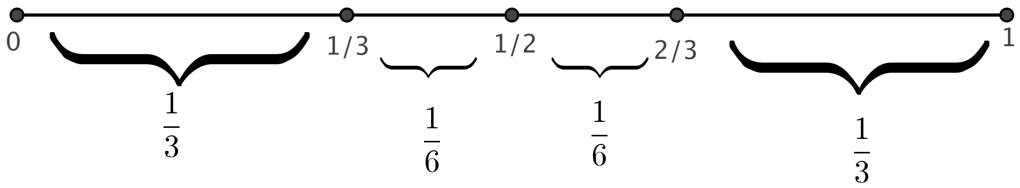


Per comprendere meglio la disposizione delle frazioni, si propone lo studio degli incrementi, da svolgere separatamente, a ogni stadio di crescita del denominatore.

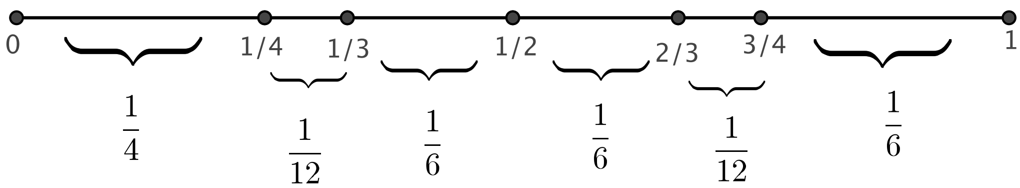
Denominatore

***n*=2 : solo due incrementi, tra loro uguali** $\frac{1}{2}-\frac{0}{1}=\frac{1}{2}$, $\frac{1}{1}-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

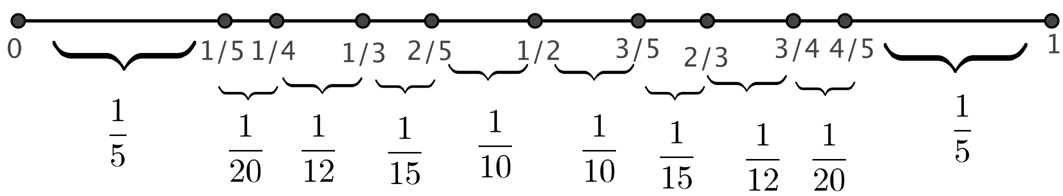
***n*=3 : 4 incrementi** $\frac{1}{3}-\frac{0}{1}=\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$, $\frac{2}{3}-\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$, $\frac{1}{1}-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$



***n*=4 : 6 incrementi** $\frac{1}{4}-\frac{0}{1}=\frac{1}{4}$, $\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$, $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$, $\frac{2}{3}-\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$, $\frac{3}{4}-\frac{2}{3}=\frac{1}{12}$, $\frac{1}{1}-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$



***n*=5 : 10 incrementi** $\frac{1}{5}-\frac{0}{1}=\frac{1}{5}$, $\frac{1}{4}-\frac{1}{5}=\frac{1}{20}$, $\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$, $\frac{2}{5}-\frac{1}{3}=\frac{1}{15}$, $\frac{1}{2}-\frac{2}{5}=\frac{1}{10}$, $\frac{3}{5}-\frac{1}{2}=\frac{1}{10}$, $\frac{2}{3}-\frac{3}{5}=\frac{1}{15}$, $\frac{3}{4}-\frac{2}{3}=\frac{1}{12}$, $\frac{4}{5}-\frac{3}{4}=\frac{1}{20}$, $\frac{1}{1}-\frac{4}{5}=\frac{1}{5}$



Sollecitando dagli studenti osservazioni relative alla configurazione e agli incrementi calcolati, ci si aspettano i seguenti commenti
- conferma della simmetria rispetto al punto medio $\frac{1}{2}$;
- tutti gli incrementi hanno numeratore 1 ;
- in ogni incremento, il denominatore è il prodotto dei denominatori delle due frazioni di cui si sta calcolando la differenza.

Analizziamo le osservazioni. In generale, se $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ sono due frazioni consecutive in F_n, l'incremento tra di esse è $\frac{c}{d} - \frac{a}{b} = \frac{bc-ad}{db}$ con numeratore *bc-ad*>0. L'incremento può quindi essere rappresentato con denominatore uguale al prodotto *db* dei denominatori delle frazioni consecutive. Gli esempi raccolti fanno congetturare che *bc-ad* = 1, e, in particolare, *db* sia il minimo denominatore che permette di rappresentare l'incremento.

Possiamo esplicitare le osservazioni svolte, elaborando delle congetture:
Congettura 1. Prendendo in considerazione F_{n-1} e procedendo nell'inserimento delle frazioni con denominatore *n*>1, l'unità frazionaria $\frac{1}{n}$ va inserita tra 0 e $\frac{1}{n-1}$.

Congettura 2. Date due frazioni consecutive $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ in F_n, il relativo incremento è

$$\frac{c}{d} - \frac{a}{b} = \frac{1}{db} \qquad \text{e in particolare} \qquad bc\text{-}ad = 1$$

Siamo effettivamente in grado di **dimostrare la congettura 1**; infatti, è sempre vero che $0 < \frac{1}{n} < \frac{1}{n-1}$, perché *n*> *n-1*. Inoltre, il relativo incremento è $\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n-1}} - \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n}} = \frac{\boldsymbol{n-n+1}}{\boldsymbol{n(n-1)}} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n\,(n-1)}}$; in questo caso, resta quindi verificata da congettura 2. Evidenziamo le relazioni (per *n*>1)

$$\frac{1}{n-1} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n\,(n-1)}$$

(*)

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n\,(n-1)}$$

In modo analogo, possiamo mostrare che, in F_n, l'ultima frazione prima di 1 è $\frac{n-1}{n}$.

Osservazione A: Le relazioni (*) permettono di introdurre una digressione rispetto al lavoro della tavola, che può risultare interessante ai ragazzi. Osserviamo che l'uguaglianza

$$\frac{2}{n-1} = \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n-1} = \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n\,(n-1)}$$

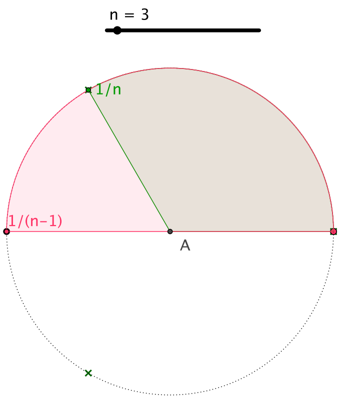
permette di esprimere la frazione $\frac{2}{n-1}$ come somma di frazioni unitarie, ciascuna delle quali con differente denominatore. Ad esempio, $\frac{2}{5} = \frac{1}{6} + \frac{1}{5*6} = \frac{1}{6} + \frac{1}{30}$.
La scrittura di una frazione come somma di frazioni unitarie con differente denominatore permette talora di comprendere con maggiore chiarezza intuitiva il 'valore' della frazione e una strategia operativa per operare le divisioni. Ad esempio, dall'espressione $\frac{2}{9} = \frac{1}{5} + \frac{1}{45}$ si chiarisce che $\frac{2}{9}$ ha un valore simile a $\frac{1}{5}$; dall'espressione $\frac{5}{8} = \frac{1}{2} + \frac{1}{8}$ si chiarisce che, per dividere 5 pizze tra 8 persone, basta dare a ciascuno mezza pizza e poi aggiungere un ottavo.
Sono possibili interessanti richiami storici con la matematica egli antichi Egizi (si veda, ad esempio, il papiro di Rhind) e con il Medioevo (ad esempio, Fibonacci), studiando alcune tecniche dell'epoca per determinare l'espressione come somma di frazioni unitarie e osservando come l'introduzione di simboli grafici per scrivere le frazioni e indicare la somma abbia reso più chiare e operative le procedure.

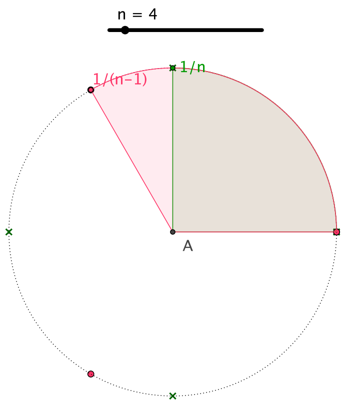
Osservazione B: Sempre utilizzando le relazioni (*) per n>2, proviamo a moltiplicare per lo stesso numero naturale a entrambi i termini delle uguaglianze; otteniamo, in particolare, che $\frac{a}{n-1} = \frac{a}{n} + \frac{a}{n\,(n-1)}$.

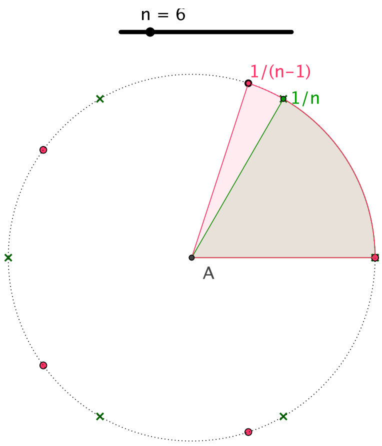
Dunque, non solo $\frac{1}{n-1} > \frac{1}{n}$, ma $\frac{a}{n-1} > \frac{a}{n}$ per ogni numero naturale positivo a. Se per 0< a<n-1 (che è la condizione affinché le frazioni siano proprie) la differenza $\frac{a}{n-1} - \frac{a}{n} = \frac{a}{n\,(n-1)} = \frac{a}{n}\,\frac{1}{(n-1)} = \frac{a}{(n-1)}\,\frac{1}{n}$ è minore sia di $\frac{1}{(n-1)}$ che di $\frac{1}{n}$; possiamo dedurne che $\frac{a}{n-1}$ ‘sta’ tra $\frac{a}{n}$ e $\frac{a}{n} + \frac{1}{n} = \frac{a+1}{n}$. Dunque, quando sono ordinate in modo crescente, le frazioni con denominatore *n-1* si alternano con quelle di denominatore n (>2). In particolare, per n>2 e a < n-1 valgono le disuguaglianze $\frac{a}{n} < \frac{a}{n-1} < \frac{a+1}{n}$.

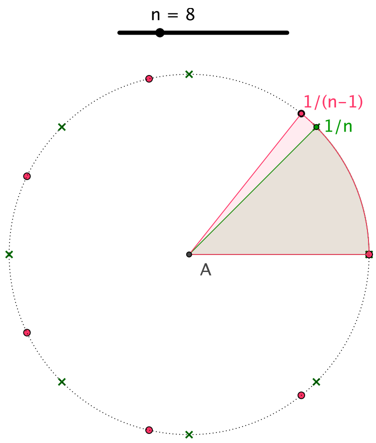
Tenuto conto anche della dimostrazione della congettura 1, possiamo concludere che **due frazioni consecutive in una successione di Farey non hanno mai lo stesso denominatore.**

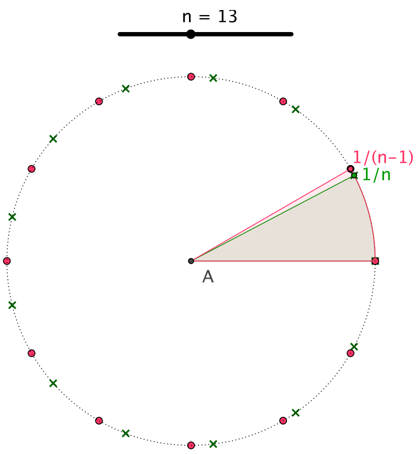
Nelle figure, n assume i valori 3, 4, 6, 8, 13. In verde, contrassegnate con una crocetta, le frazioni con denominatore n. In rosso, contrassegnate con un pallino, le frazioni con denominatore n-1. Le frazioni sono state rappresentate tramite ‘torte’ circolari.











Riprendiamo la discussione sulle successioni di Farey.
Rimandiamo per ora la dimostrazione della congettura 2, puntando invece l'attenzione su un'altra proprietà che risulta in genere più complessa da osservare.
Nel passaggio da F_{n-1} a F_n le nuove frazioni da inserire sono tante quanti i numeri più piccoli di *n* e coprimi con *n* : (e equivale alla funzione di Eulero calcolata in *n*). Ma **quale regola spiega quando tra due frazioni consecutive con denominatore minore o uguale a *n-1* se ne inserirà una con denominatore *n*? e quale frazione verrà inserita?**
Osservando con maggiore attenzione, si può notare che, date due frazioni consecutive $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ in F_{n-1}, la prima frazione che è inserita tra di esse (con il crescere del denominatore) era sempre della forma

$$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$$

Il denominatore della frazione inserita era la somma dei denominatori delle due frazioni consecutive e, analogamente, il numeratore della frazione inserita era la somma dei numeratori delle due frazioni consecutive. Diamo un nome alla frazione così ottenuta.
Date due frazioni $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, **ridotte ai minimi termini**, il loro **mediante** è la frazione (che va ridotta ai minimi termini)

$$\frac{a+c}{b+d}$$

Il mediante di due frazioni va calcolato a partire dalla forma delle frazioni ridotta ai minimi termini.
Il mediante di $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{3}$ è $\frac{2}{7}$; osserviamo che $\frac{1}{4} = \frac{3}{12}$ ma $\frac{3+1}{12+3} \neq \frac{2}{7}$ NON è il mediante di $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{3}$.

Congettura 3. Date due frazioni consecutive $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ in F_n, il denominatore minimo per inserire una frazione tra di esse è la somma *b+d* dei due denominatori. Inoltre, esiste una sola frazione con denominatore minore o uguale a *b+d* tra di esse, e tale frazione è il mediante $\frac{a+c}{b+d}$ di $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$.

Scopo della tavola è aprire problemi, sollecitare la curiosità e una espressione chiara delle osservazioni e delle congetture emerse dalla discussione.
Nel resto del file, si procederà con alcune descrizioni algebriche delle proprietà coinvolte. Si suggerisce, però, di affrontare in classe l'argomento da un punto di vista geometrico, che sarà illustrato con maggiori dettagli nei file (Terzo incontro) e corredato di animazioni con GeoGebra.
Interpretazioni e applicazioni del mediante
Riprendiamo la discussione dei quesiti rimasti aperti, con tecniche algebriche.
A cosa corrisponde il mediante? È sempre vero che il mediante si posiziona tra le due frazioni, cioè che $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$?
Proviamo a ragionare algebricamente:

$$\frac{a+c}{b+d} - \frac{a}{b} = \frac{(a+c)b-(b+d)a}{b(b+d)} = \frac{ab+cb-ab-ad}{b(b+d)} = \frac{cb-ad}{b\,(b+d)}$$

$$\frac{c}{d} - \frac{a+c}{b+d} = \frac{c\,(b+d)-d\,(a+c)}{d\,(b+d)} = \frac{cb+cd-da-dc}{d\,(b+d)} = \frac{cb-ad}{d(b+d)}$$

Dunque, la condizione *cb-ad*>0 caratterizza esattamente il fatto che il mediante si inserisce tra due frazioni consecutive $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$: ma la condizione *cb-ad*>0 a sua volta equivale esattamente a dire che $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$.

Dunque: **date due frazioni consecutive $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ in F_n , il mediante $\frac{a+c}{b+d}$ è una frazione che si inserisce tra $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$. In particolare, *b+d>n* perché, altrimenti, il mediante comparirebbe in F_n , e le frazioni $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ in F_n non sarebbero consecutive.**

Nella descrizione precedente, sono rimaste in sospeso varie domande.
Come interpretare il mediante? Esistono altre frazioni tra $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ che abbiano denominatore minore o uguale a *b+d*? È vero che il mediante di due frazioni ridotte ai minimi termini è sempre ridotto ai minimi termini? E se due frazioni ridotte sono consecutive in una successione di Farey, il mediante è ridotto ai minimi termini?

Applicazioni del mediante: studio delle frequenze
Il mediante è una operazione naturale quando si studia la frequenza di un determinato evento (e più in generale, quando si studiano rapporti).
Ad esempio, supponiamo di voler studiare quanto sia diffusa, tra gli studenti, la pratica di uno sport (o l'abitudine a lavarsi le mani almeno 3 volte al giorno,, …). Supponiamo che, in una classe di 25, gli studenti che praticano almeno uno sport siano 12. Guardando quell'unica classe, la frequenza è data dal rapporto $\frac{12}{25}$ Supponiamo ora che, in un'altra classe di 28 studenti, gli studenti che praticano uno sport siano 19. Guardando alla seconda classe, la frequenza è data dal rapporto $\frac{19}{28}$. Complessivamente nelle due classi, la frequenza con cui gli studenti praticano almeno uno sport è data dal mediante di $\frac{12}{25}$ e di $\frac{19}{28}$, perché è data dal rapporto $\frac{12+19}{25+28}$
Volendo, è possibile introdurre direttamente il mediante nell'ambito dello studio delle frequenze, e poi proporre la tavola 2_1. In tal modo, i ragazzi dovrebbero essere facilitati nel riconoscere la presenza del mediante nelle successioni di Farey.

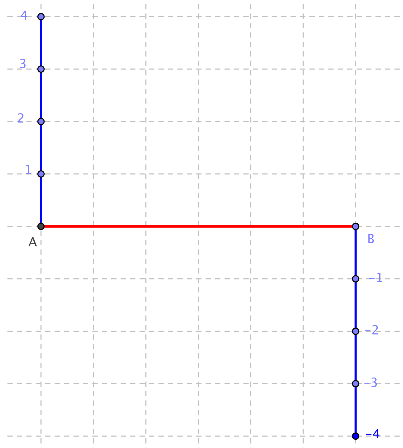
Appendice. Divisione di un segmento in *n* parti uguali
Per disegnare le frazioni tra 0 e 1 con denominatore minore o uguale a *n* con GeoGebra, e' sufficiente considerare il segmento da (0,0) (cui viene assegnata l'etichetta 0) a (0,10) (cui viene assegnata l'etichetta 1) per descrivere il segmento [0,1]. Le frazioni possono essere posizionate come successione di punti:

Successione[(10k / n, 0), k, 1, n-1]

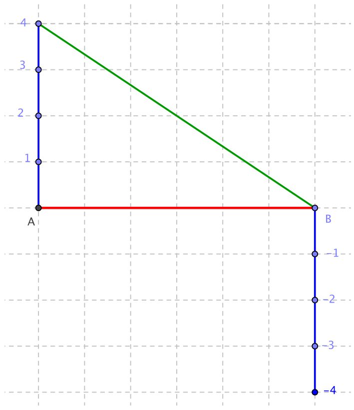
Ricordiamo ora una procedura geometrica per ottenere la suddivisione di un arbitrario segmento in *n* parti uguali, con *n*>0 naturale.
Dato un segmento AB, vogliamo dividerlo in *n* parti uguali, usando solo riga e compasso (*n* numero naturale fissato > 0).
Fissiamo una unità di misura di lunghezza 1; nel seguito, useremo come misura il quadretto del foglio.

Su una semiretta uscente da A come in figura e perpendicolare a AB, segniamo con un puntino *n* vertici (*n* = 4 nella figura), che indichiamo con i numeri da 1 a *n*.

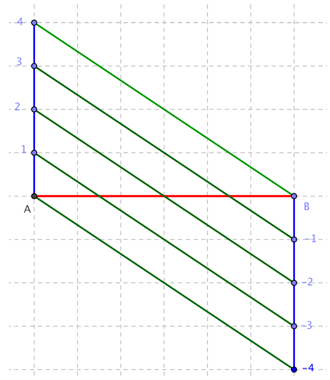
Analogamente, sulla semiretta perpendicolare da B al segmento AB, contenuta nell'altro semipiano rispetto ad AB, segniamo con un puntino *n* vertici (sempre *n* = 4 nella figura), che indichiamo con i numeri da -1 a -*n*.



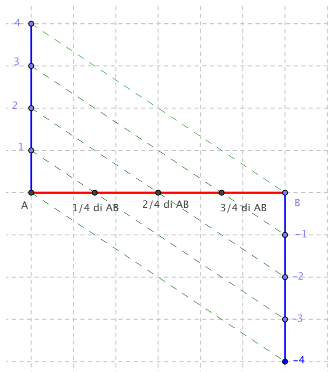
Ora tracciamo la retta (basta il segmento) per *n* e B



e poi, dall'alto verso il basso, congiungiamo i successivi punti nei due segmenti verticali. Otteniamo rette parallele tra loro, che ripartiscono in parti uguali il segmento AB. Le rette sono parallele: ad esempio, in figura, il segmento tra 3 e -1 è il segmento che otterrei traslando in basso di un quadretto il triangolo AB4. Analogamente per gli altri segmenti obliqui.



Il segmento AB risulta in questo modo suddiviso in parti uguali (lo stesso numero di parti che erano state segnate nella verticale a partire da A).



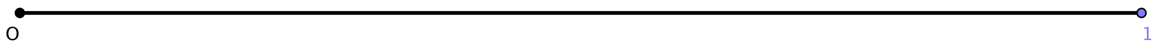
Numeri – tavola 2_1

Con la mente e con le mani 2018-2019

Considera, sulla linea dei numeri, il segmento tra 0 e 1.
Vogliamo rappresentare sulla linea dei numeri tutte le frazioni tra 0 e 1 con denominatore minore o uguale a 5.

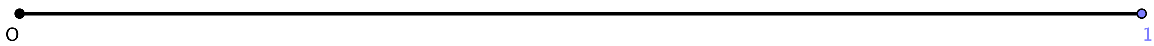
1. Segna con un puntino le frazioni con denominatore 1

2. Segna con un puntino le frazioni con denominatore minore o uguale a 2



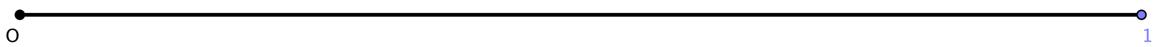
   Quante frazioni hai aggiunto rispetto al passo precedente?

3. Segna con un puntino le frazioni con denominatore minore o uguale a 3



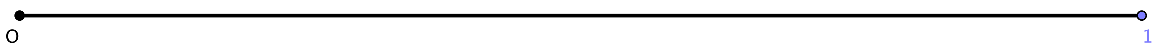
   Quante frazioni hai aggiunto?

4. Segna con un puntino le frazioni con denominatore minore o uguale a 4



   Quante frazioni hai aggiunto rispetto al passo precedente?

5. Segna con un puntino le frazioni con denominatore 5 che non hai già disegnato con denominatore più piccolo.



   Quante frazioni hai aggiunto rispetto al passo precedente?

Negli elenchi precedenti, quando una frazione poteva essere scritta con due denominatori diversi minori o uguali a 5?

……….

……….

Le frazioni compaiono da 0 a 1 in ordine crescente. Osserva l'elenco disegnato al punto 5 e rispondi:

- cosa noti?

  ……….

- per inserire 1/6 e 1/7, dove li disegneresti?

  …….

- le frazioni consecutive sono tutte alla stessa distanza l'una dall'altra? ………………….

Per studiare le distanze tra le frazioni disegnate, in ciascuno dei disegni nei punti da 1 a 5 calcola e trascrivi la differenza tra due frazioni consecutive.

Osserva le differenze che hai trovato. Cosa noti?

……….

……….

……….