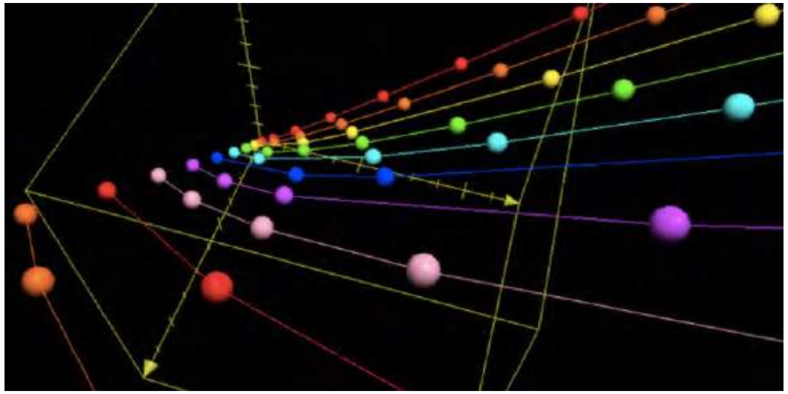


Matematica al primo ciclo
Camerino, 16 aprile 2021

Massimo comune divisore e minimo comune multiplo

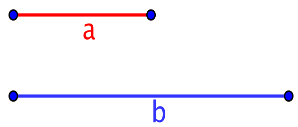
Francesca Tovena

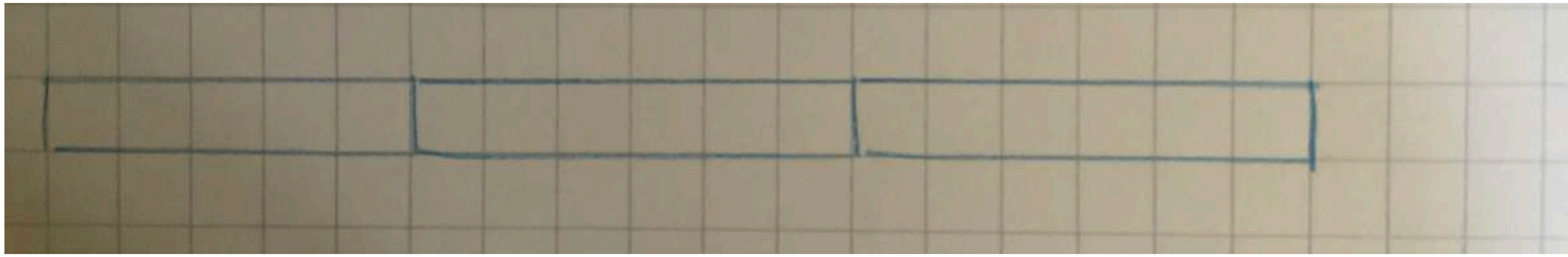
Riflessioni e attività in collaborazione con Benedetto Scoppola

TOR VERGATA
UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI ROMA

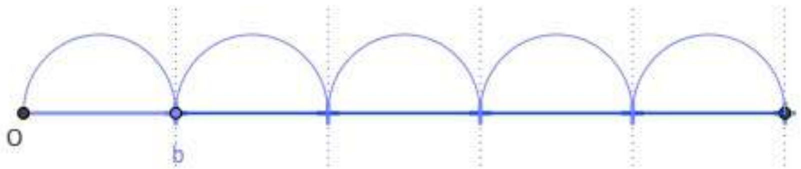
Numeri nel senso della lunghezza

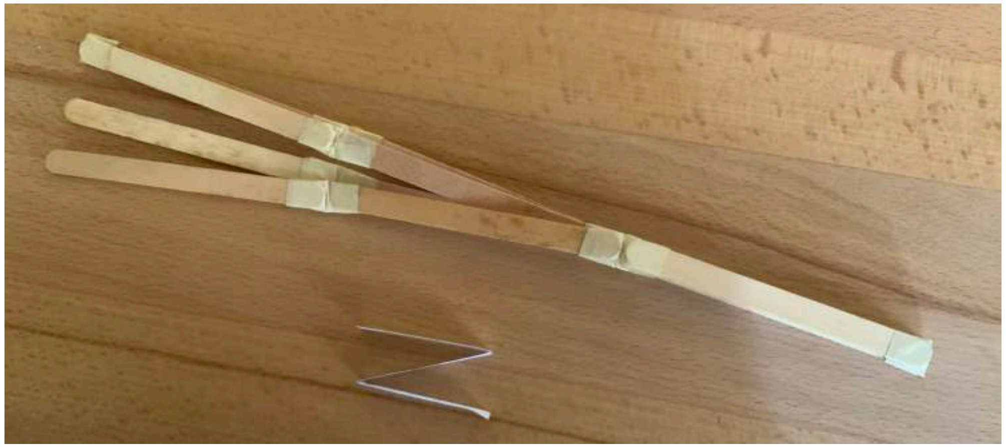
- I numeri possono essere rappresentati geometricamente in vari modi.
- Ad esempio, fissata una unità di misura di lunghezza, due numeri naturali non nulli *a*, *b*, possono essere rappresenti come lunghezze di due segmenti





In tale rappresentazione, i multipli di *b* si ottengono giustapponendo copie del segmento *b*, mentre i divisori di *b* si ottengono 'ripiegando' *b* in parti uguali.

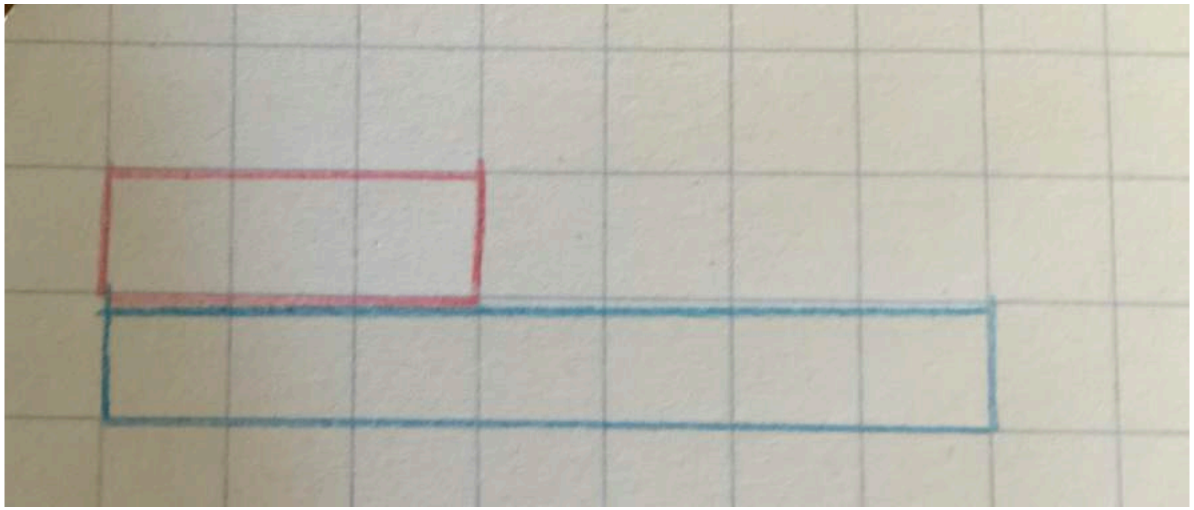




Numeri nel senso della lunghezza: mcm

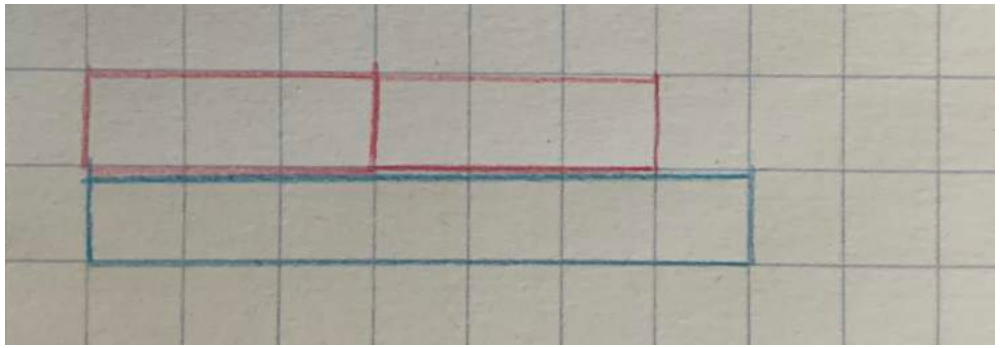
- Per studiare il minimo comune multiplo di due numeri naturali *a* e *b*, si formano due linee parallele

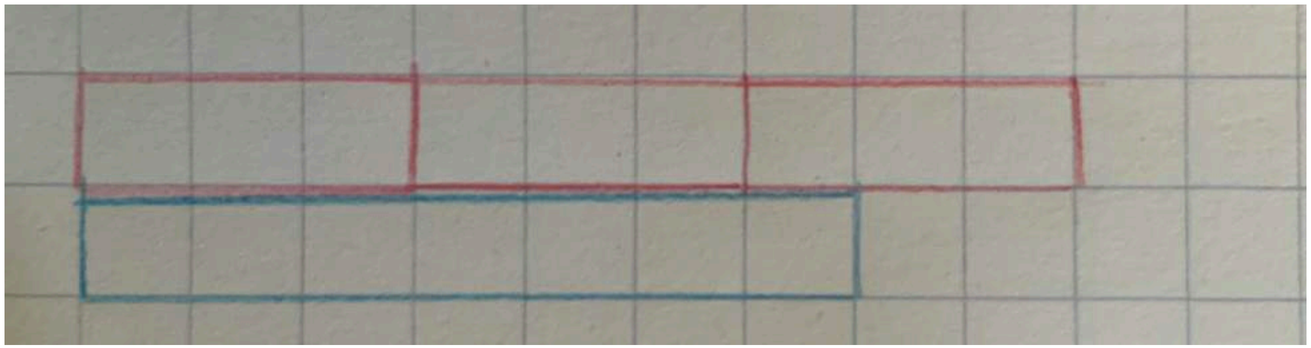
- in una, i multipli di *a* e nell'altra i multipli di *b* (con inizio allineato in modo da poter confrontare le lunghezze ottenute).



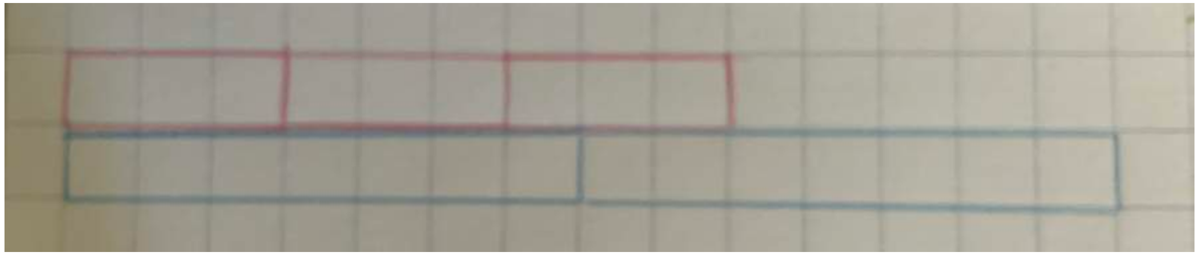
Numeri nel senso della lunghezza: mcm

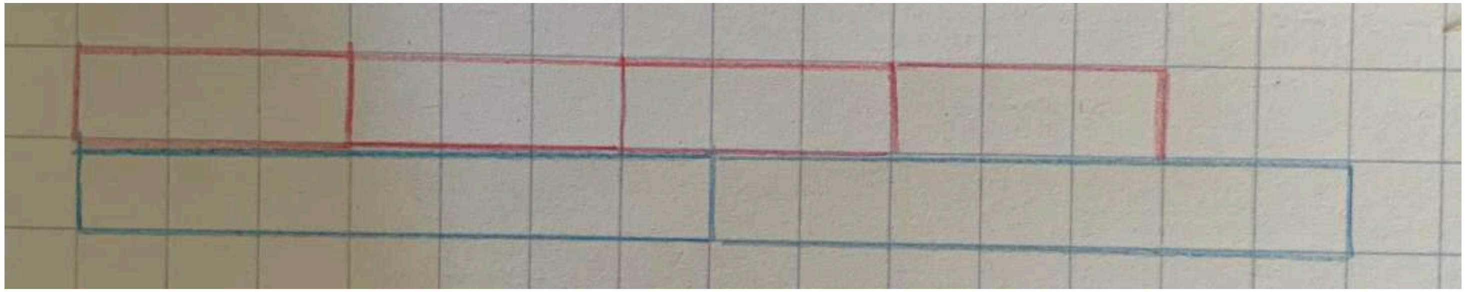
- Si aggiungono un poco di elementi del segmento (numero) più corto, fino a raggiungere o sorpassare il più lungo. Se si arriva allo stesso estremo, si è trovato il mcm. Se lo si supera, si ricomincia aggiungendo segmenti dell’altro numero sull’altra fila.

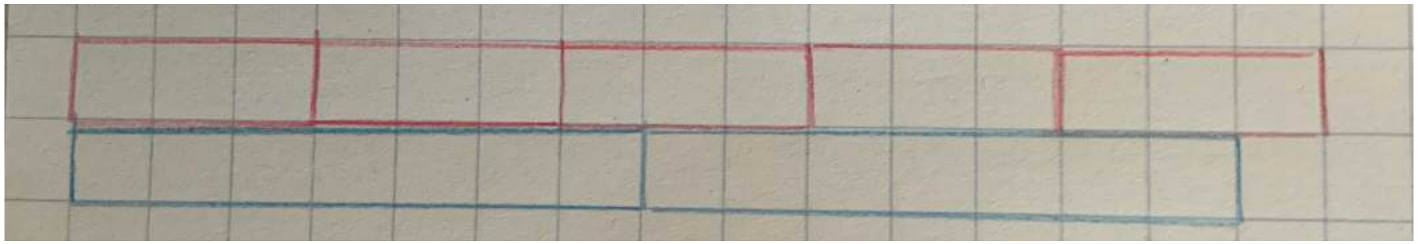




Numeri nel senso della lunghezza: mcm

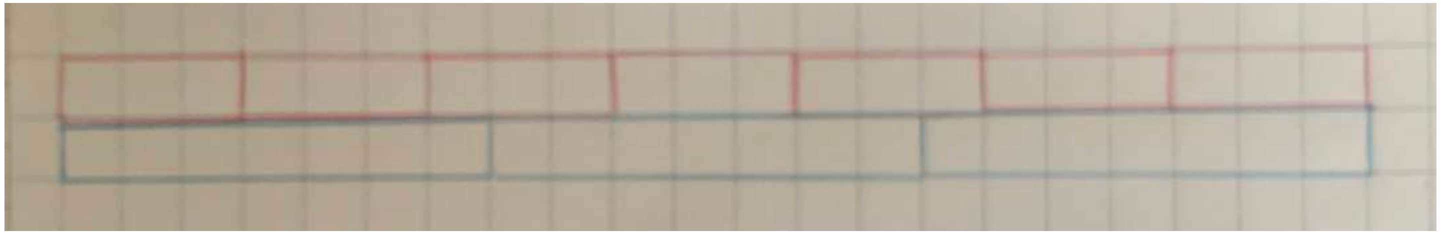


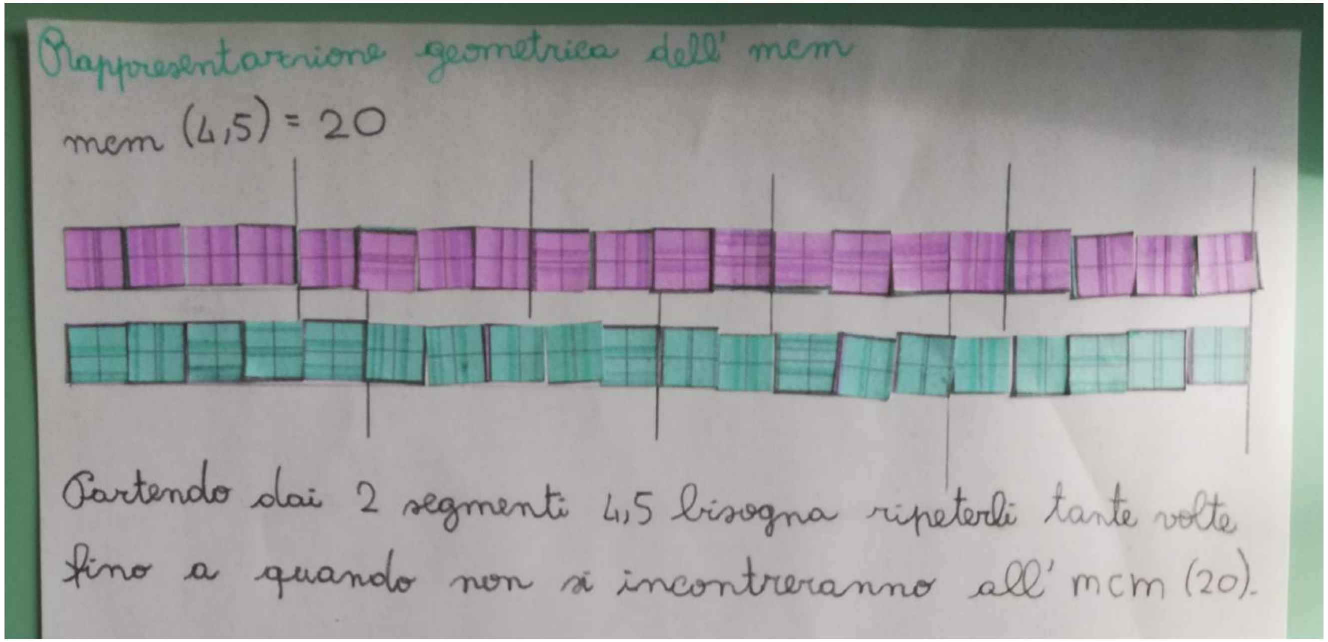




Numeri nel senso della lunghezza: mcm

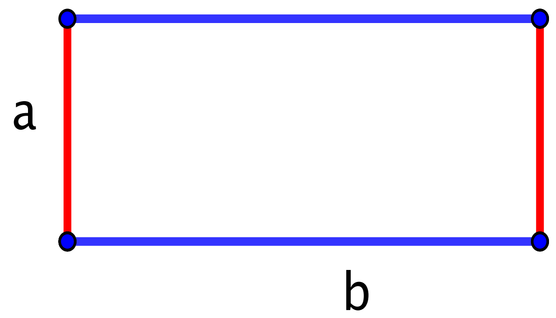
- Si continua fino a trovare un multiplo comune. (lo si deve trovare per forza, perché *a* x *b* è un multiplo comune)

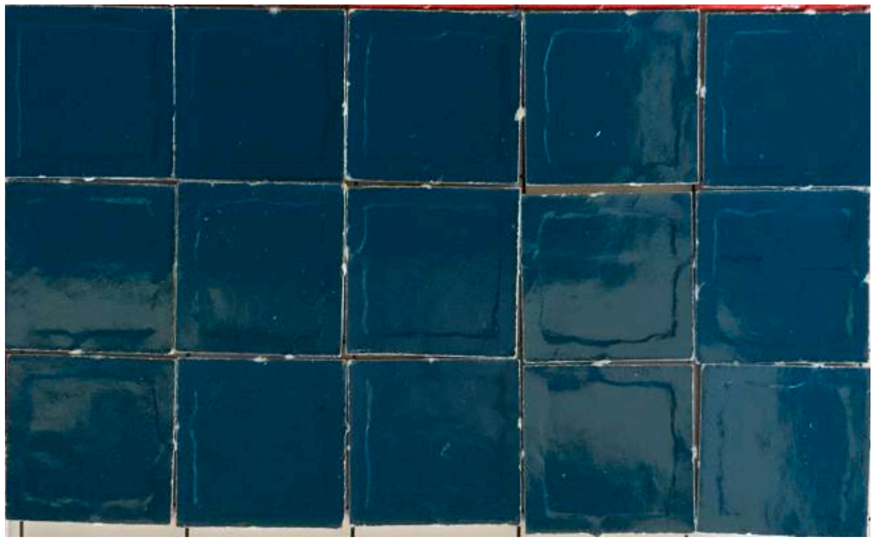




Prodotti come rettangoli

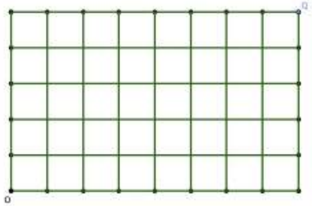
- Una seconda modalità di visualizzazione è utile nella rappresentazione dei prodotti. Ripercorrendo la visione riportata in Euclide, il **prodotto** di due numeri naturali non nulli *a*, *b*, può essere rappresento tramite un rettangolo di lati *a*, *b*,



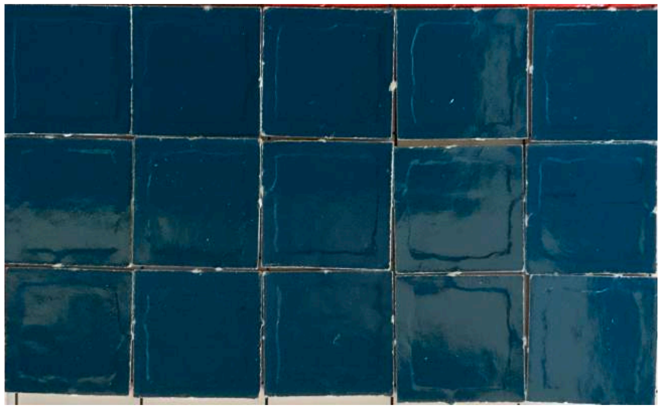


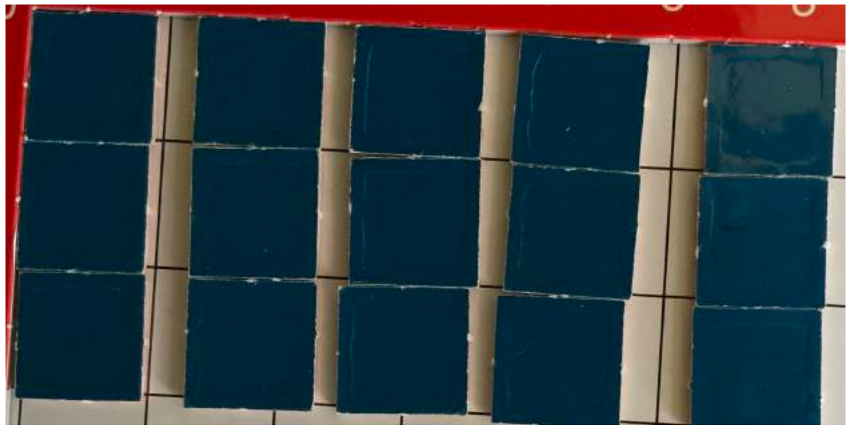
Prodotti come rettangoli

- Nel caso di moltiplicazione tra numeri naturali, il prodotto si visualizza meglio rappresentando l'unità con un quadratino, e di conseguenza il rettangolo che rappresenta il prodotto risulta quadrettato



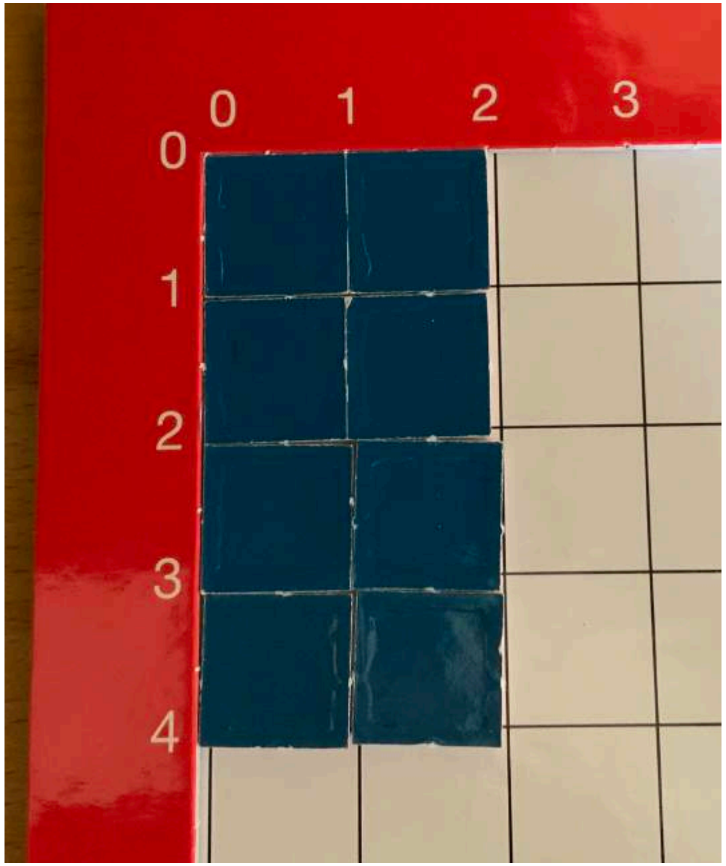
- Si ritrova l'interpretazione della somma ripetuta come moltiplicazione separando le righe o le colonne.





Prodotti come rettangoli

- Si sperimentano la commutatività del prodotto, come anche la proprietà associativa

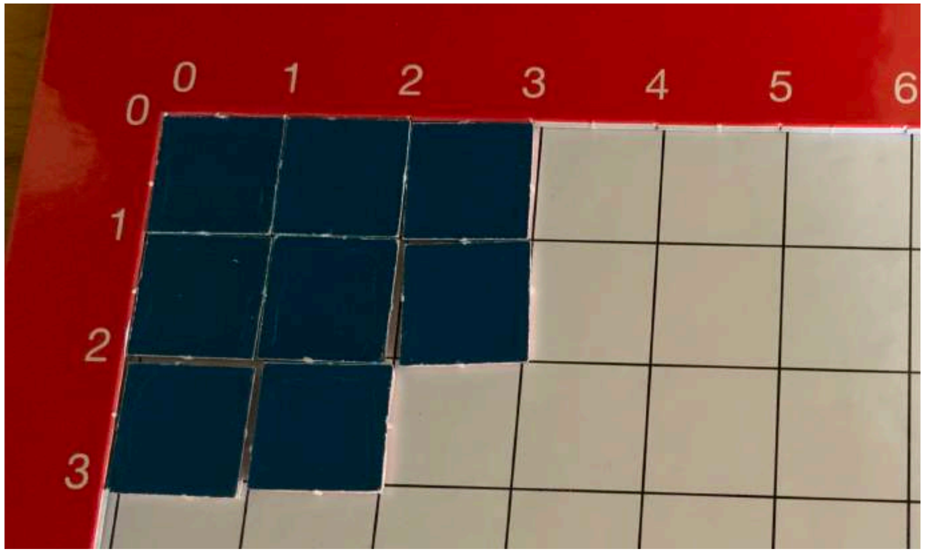


Rettangoli e divisione

In questa rappresentazione, la divisione per *a* (e la ricerca dei divisori) significa passare da un rettangolo con una dimensione uguale a 1 a un rettangolo di lato *a*

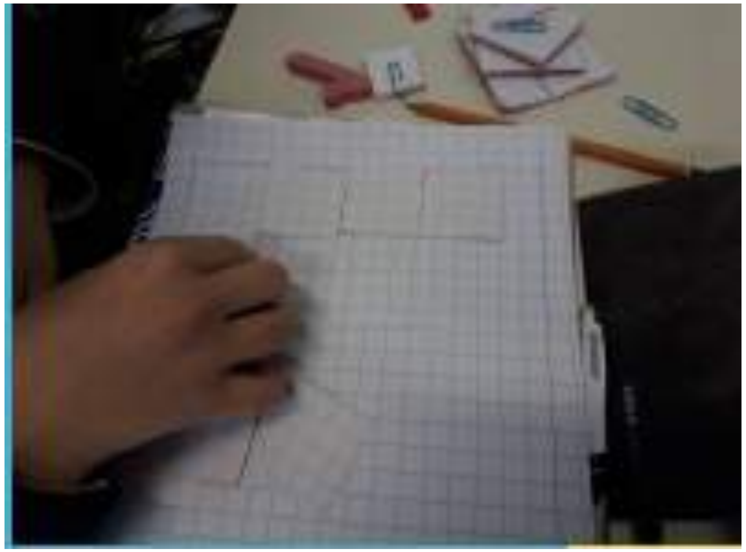
Rettangoli e divisione

- Si sperimentano le configurazioni a rettangolo; alcune di esse non sono possibili



Attività in classe

- I ragazzi hanno a disposizione una griglia rettangolare quadrettata e vari quadrati ritagliati
- Si chiede di ricoprire la griglia con quadrati tra loro uguali e senza sovrapposizioni
- Quando si riesce? Quale è il lato maggiore possibile per un quadrato che ‘piastrella’ la griglia?



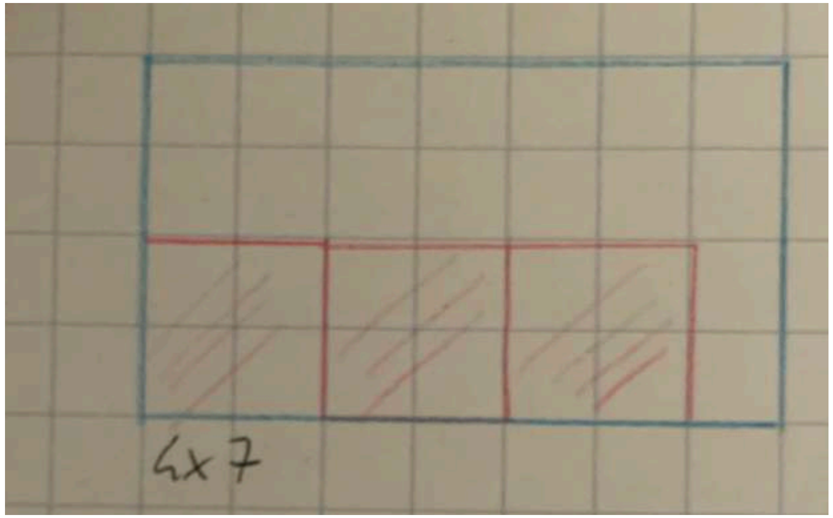
Attività in classe

- I ragazzi lavorano con griglie differenti



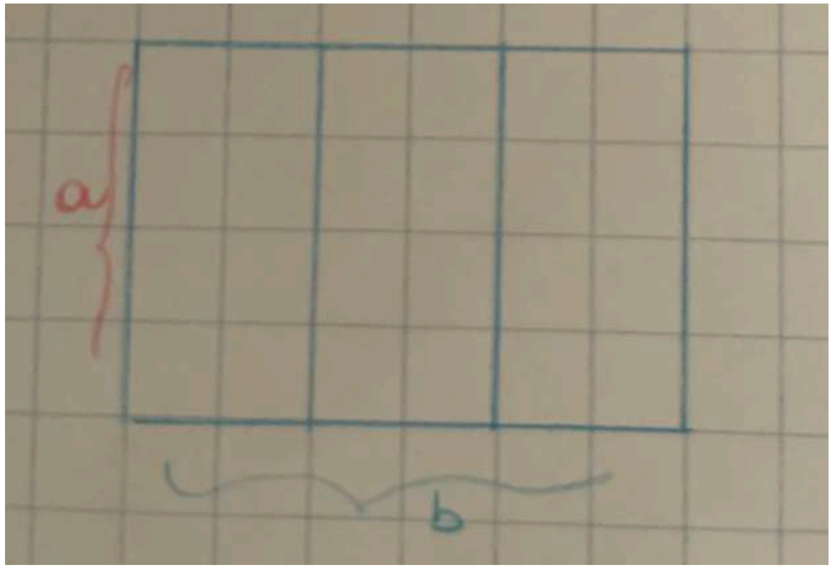
Attività in classe

Analizzando vari esempi, i ragazzi suggeriscono che **il lato di un quadrato che 'piastrella' la griglia deve essere un divisore delle lunghezze di ciascuno dei lati, *a* e *b***



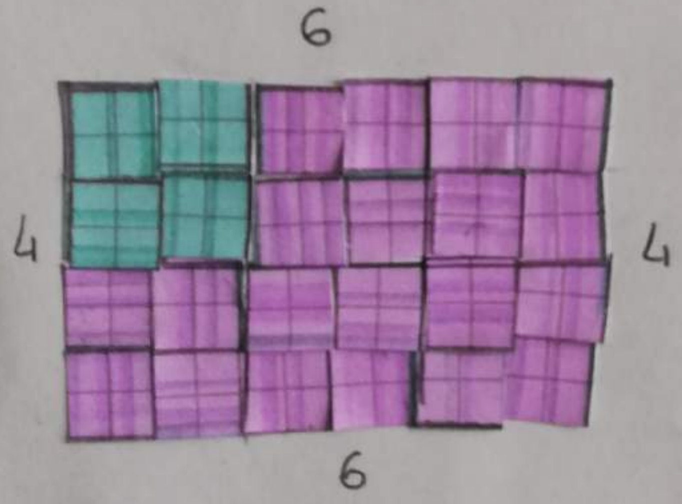
Viceversa, se d è divisore di a, allora d è anche divisore di a x b

Il lato massimo di un quadrati che piastrella la griglia *a* x *b* è dunque il **massimo comune denominatore** MCD(*a*,*b*)



Rappresentazione geometrica dell'MCD

MCD(4,6) = 2

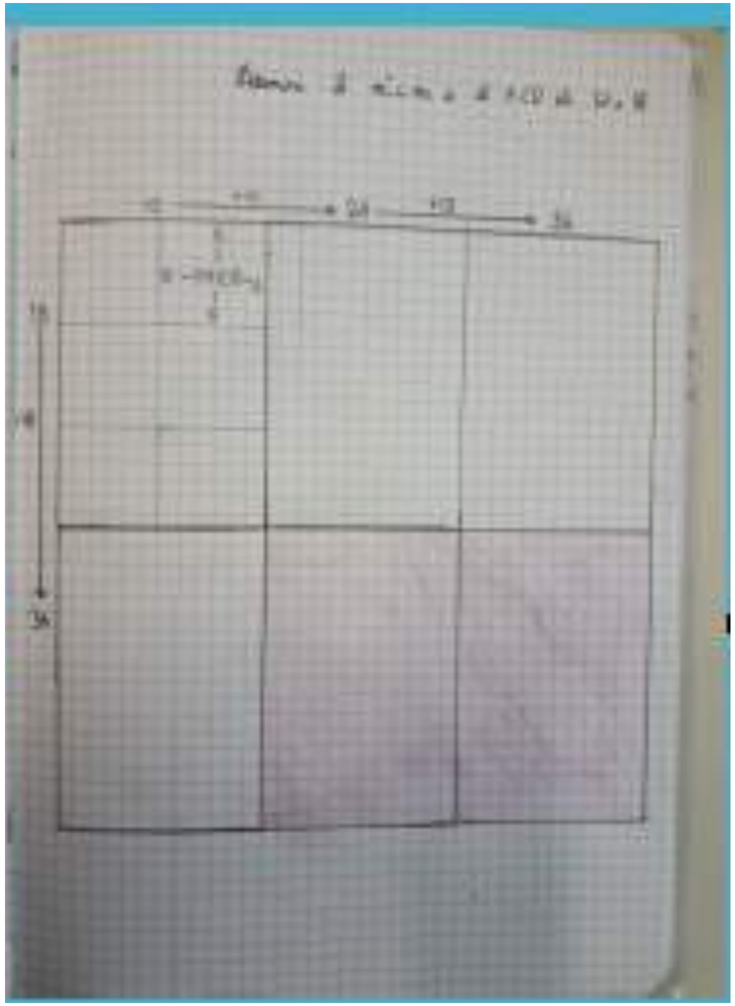


1) suddivisi il rettangolo in quadrati che abbiano il lato di lunghezza maggiore POSSIBILE.

2) l'MCD sarà il lato di questi quadrati.

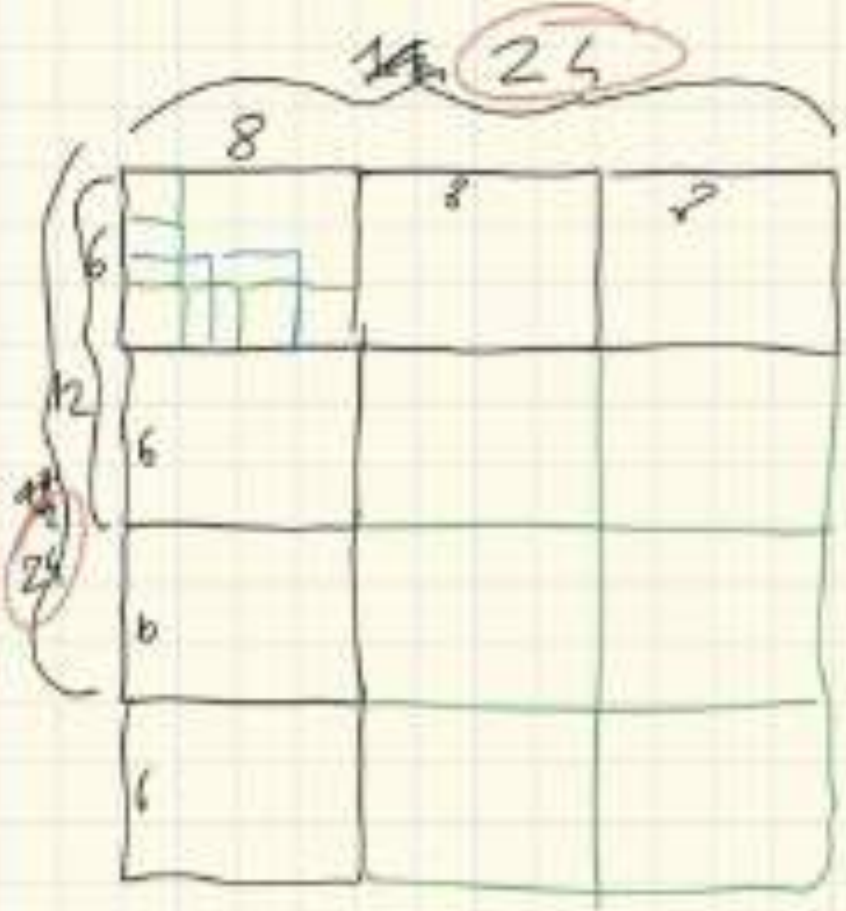
Rettangoli e mcm

- Per studiare mcm, si tagliano tanti rettangoli uguali al rettangolo *a* x *b* e con essi si cerca di costruire un quadrato:



- *mcm (a,b) = lato minimo di un quadrato piastrellabile da rettangoli axb*

- Sappiamo che mcm ≤ *a* x *b*



MCD(6,8)

LATO DEL PIÙ GRANDE QUADRATO CHE PIASTRELLA PERFETTAMENTE IL RETTANGOLO 6x8

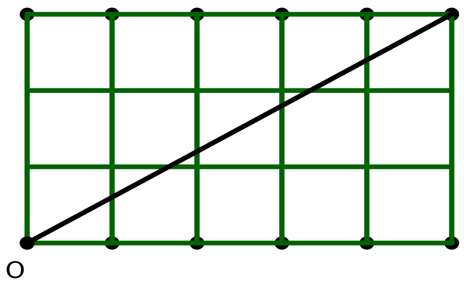
mcm(6,8)

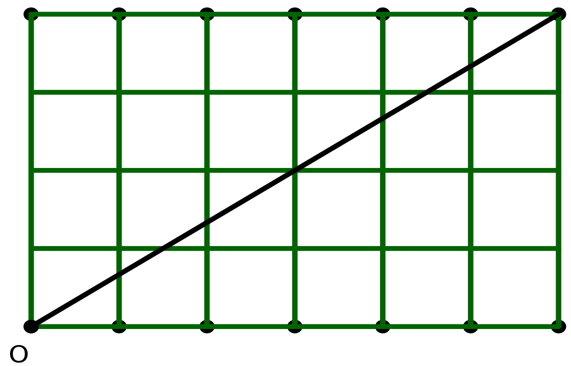
LATO DEL PIÙ PICCOLO QUADRATO CHE RIESCO A OTTENERE AFFIANCANDO LATO A LATO (LUNGO LE 2 DIMENSIONI) IL RETTANGOLO 6x8

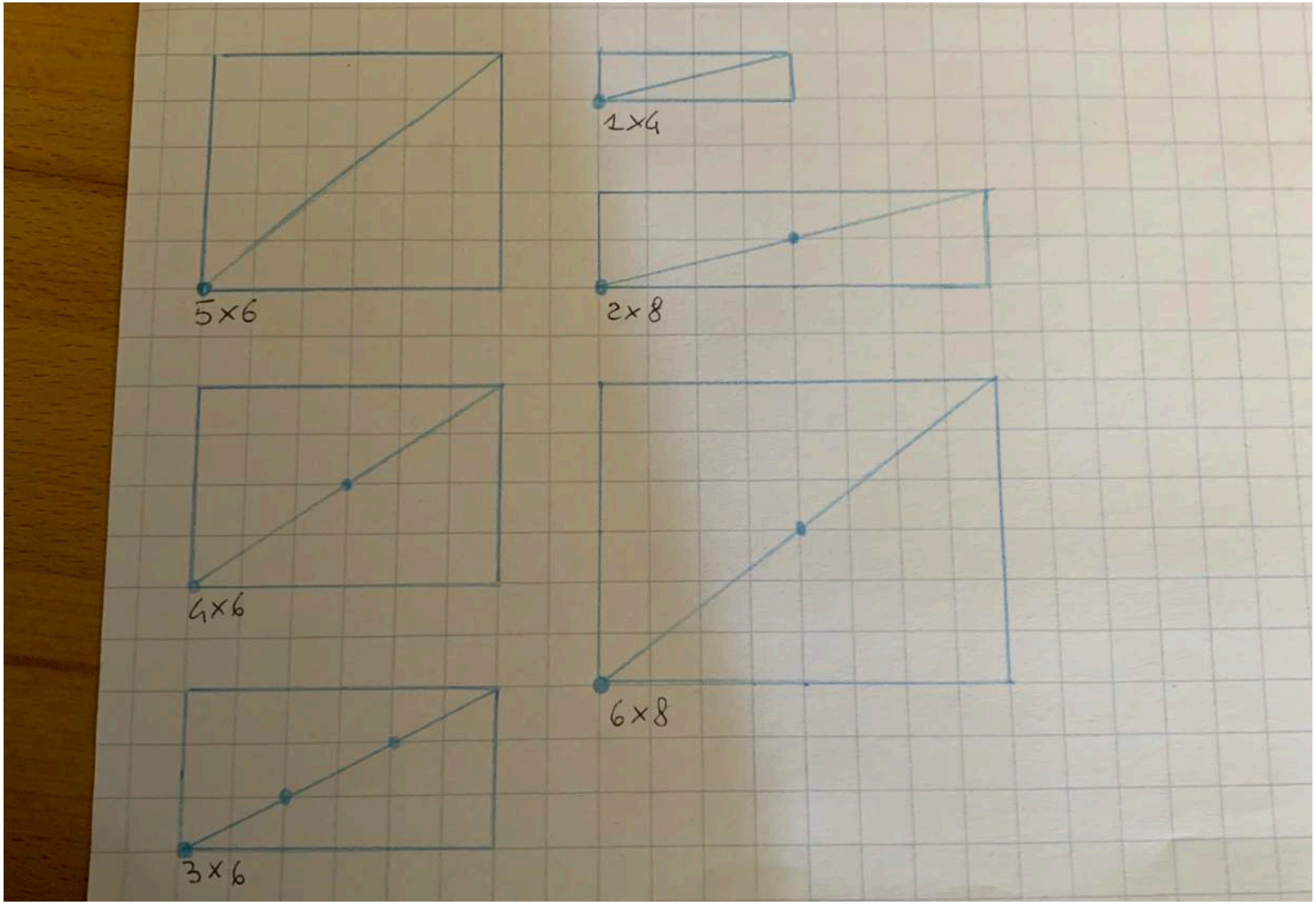
Rettangoli, MCD e mcm

- Per studiare la relazione tra MCD, mcm e prodotto di due numeri naturali non nulli *a*, *b*, consideriamo una diagonale

- Senza nominare il collegamento con le nozioni di mcm e MCD, si propone ai ragazzi di contare quante volte la diagonale tocca un vertice di un quadretto, senza contare il punto di origine da cui hanno tracciato la diagonale. Perchè si formano questi incroci? E quanti?

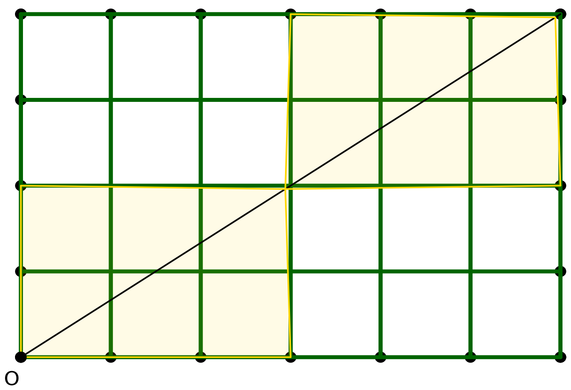


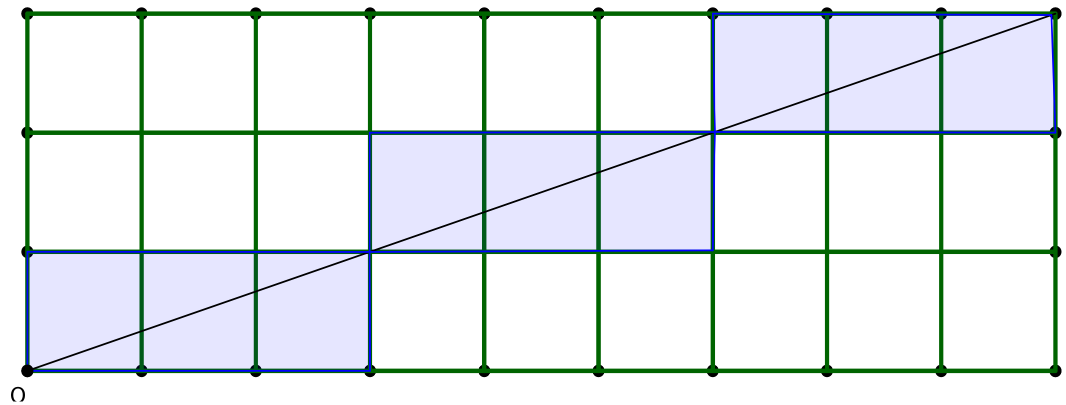



5×6
1×4
2×8
4×6
6×8
3×6

Rettangoli, MCD e mcm

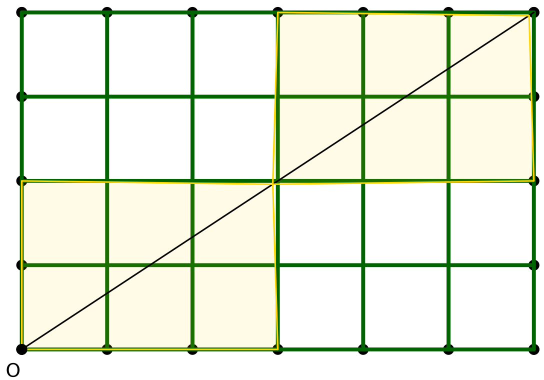
- I ragazzi possono fare vari esempi, anche aiutandosi con fili per non dover ridisegnare le griglie.
- Scegliere quali tentativi fare e come organizzare la ricerca sollecita la discussione e vari ripensamenti
- I ragazzi osservano che vertici consecutivi sulla diagonale compaiono a intervalli regolari. Alcuni colorano i quadretti ‘attraversati’ dalla diagonale, altri colorano i rettangoli compresi tra due vertici consecutivi.

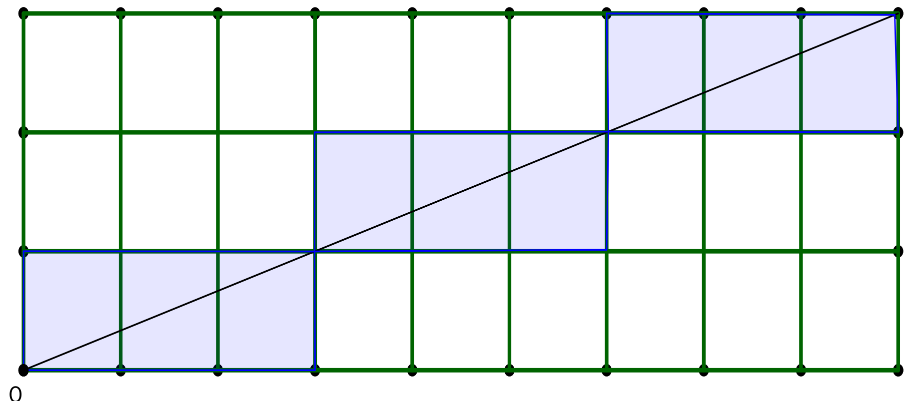




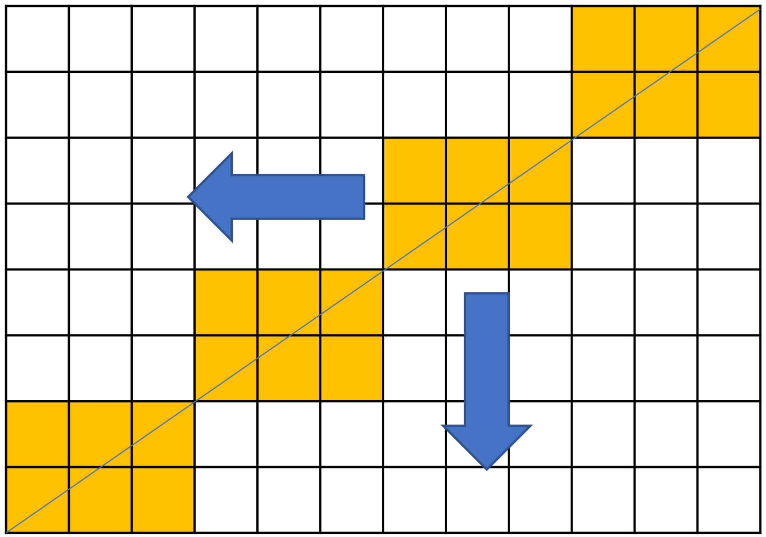
Rettangoli, MCD e mcm

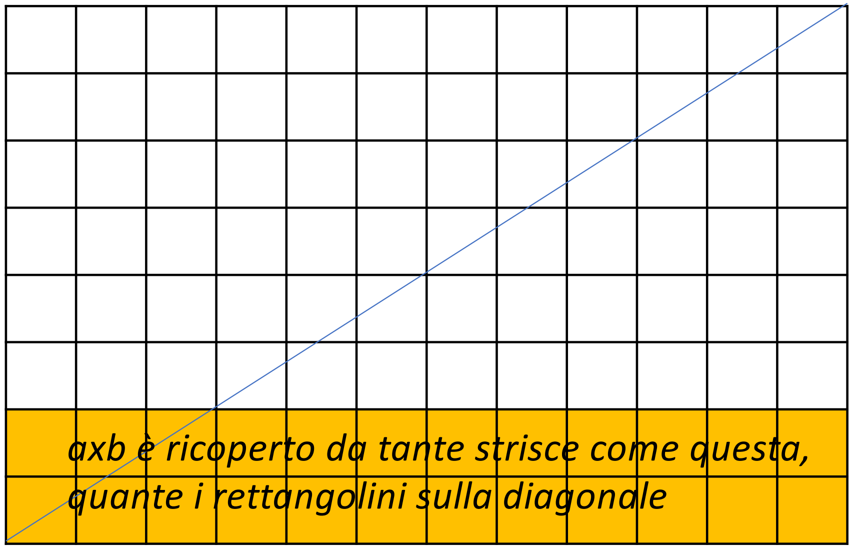
- Si osserva che la presenza di vertici interni sulla diagonale in generale non dipende dal singolo lato, ma dalla relazione tra i due lati
- Inoltre, in presenza di vertici interni sulla diagonale si formano rettangoli uguali e ricorrenti. Guardando ‘dalla base’ o ‘dall’altezza’, si vedono lo stesso numero di rettangoli; dunque: **il numero di rettangoli è un divisore comune dei lati a e b**
- I piccoli rettangoli vengono riprodotti in carta, in modo da poterli muovere nella griglia

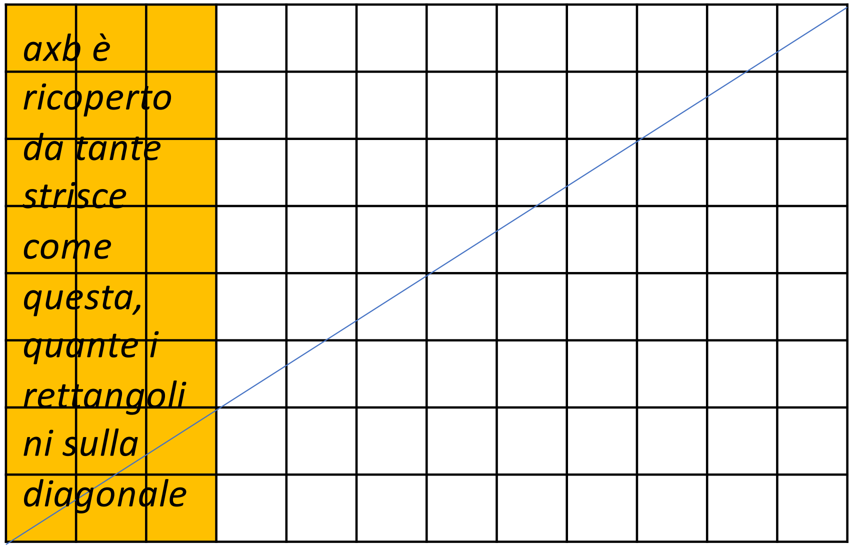




- Spostando ’in basso’ i rettangolini, si copre interamente la base *b: la somma delle aree dei rettangolini è dunque un multiplo di b.*
- Spostando ’a sinistra’ i rettangolini, si copre interamente l’altezza *a: la somma delle aree dei rettangolini è dunque un multiplo di a.*
- *La somma delle aree dei rettangolini è dunque un multiplo comune di a e b (ed è il minimo, altrimenti la diagonale incontrerebbe un altro vertice)*.



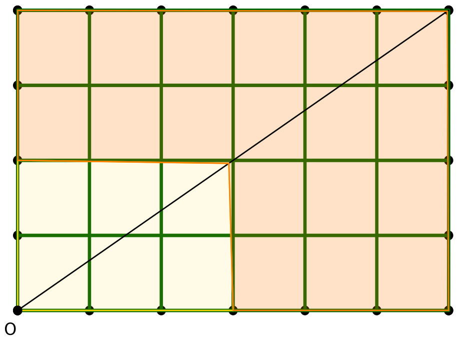


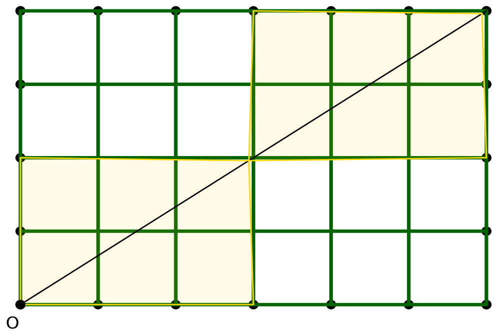


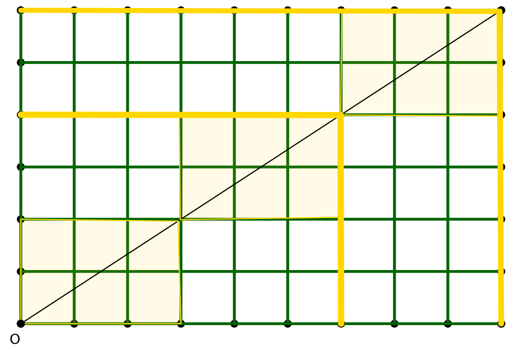
Rettangoli, MCD e mcm

- Consideriamo il rettangolo contenente l’origine (la cui diagonale va dall’origine in basso a sinistra al primo vertice interno sulla diagonale)

- Per quanto osservato, tale rettangolo pavimenta il rettangolo grande iniziale: la sua base è un divisore di *b,* l’altezza è un divisore di *a.* Inoltre, i suoi lati sono coprimi tra loro







Rettangoli, MCD e mcm

- MCD = numero di rettangoli interni creati 'attorno' alla diagonale è il MCD

- mcm = Somma dei numeri di quadretti in tutti i rettangoli piccoli

- **MCD(*a, b*) x mcm(*a, b*) = *a* x *b***

- **I lati del rettangolo piccolo tra O e il primo vertice interno sono numeratore e denominatore della frazione ridotta ai minimi termini equivalente a $\frac{a}{b}$.**

Alcune caratteristiche del percorso

- Interazione algebra-geometria: la visualizzazione geometrica crea un supporto visivo, permette di rendere concreto l’oggetto di studio e di operare tramite movimento delle mani, del corpo e degli occhi

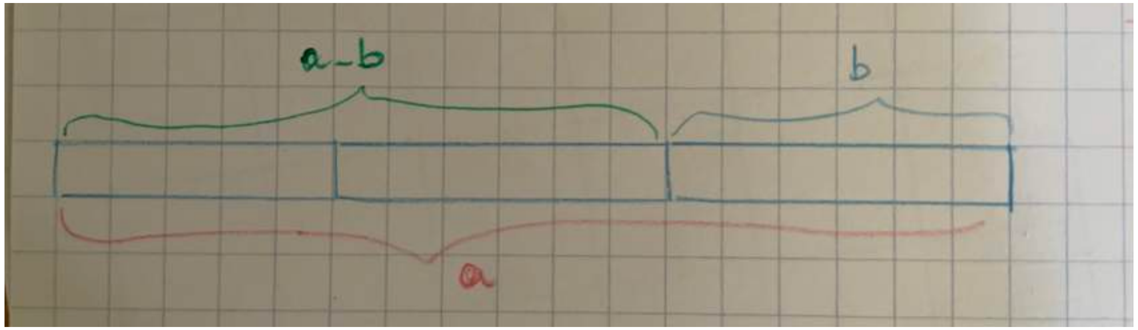
- La discussione permette di focalizzare e imparare ad esprimere le proprietà intraviste. Le intuizioni geometriche vengono comunicate agli altri, argomentate e interpretate algebricamente

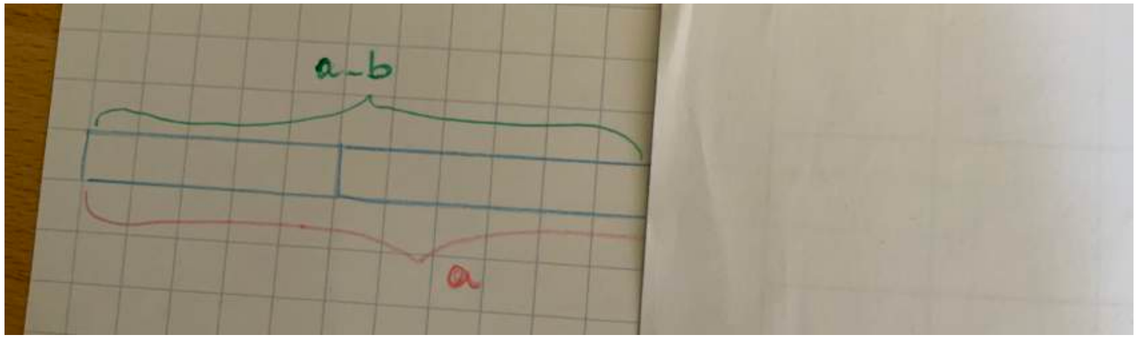
- Manipolazione di materiali opportuni e piacere della scoperta come motore dell’apprendimento

- Focalizzazione sulla nozione di multiplo e divisore, più che sulle tecniche di calcolo, e base di lavoro per successivi argomenti

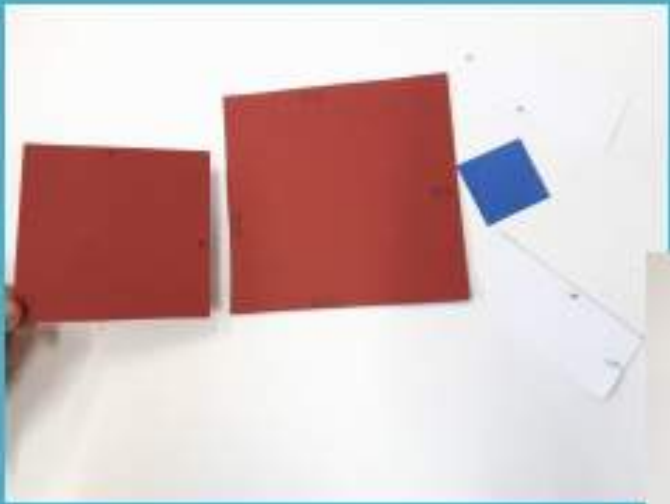
Esempi di approfondimenti
Algoritmo per il calcolo del MCD per sottrazione

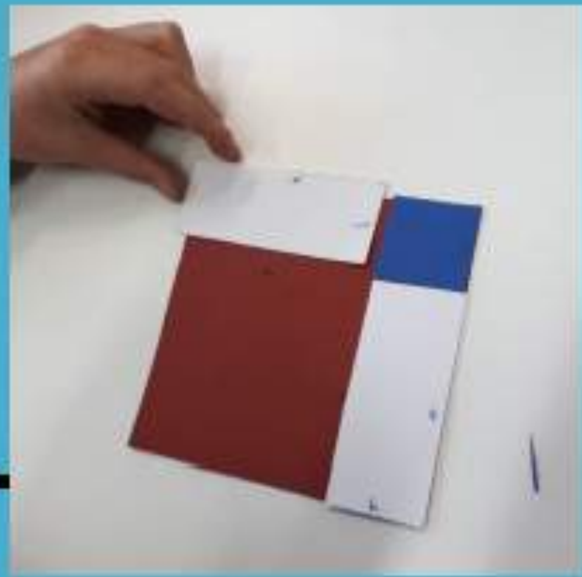
Se *b* è divisore di *a*, allora *b* è anche divisore di *a* – *b*



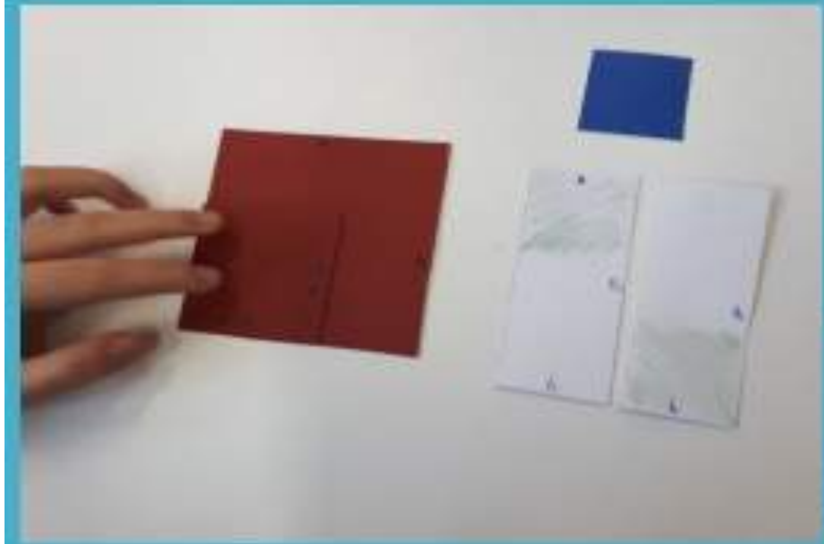


Prodotti notevoli: $(a+b)^2$





Prodotti notevoli: $(a-b)^2$

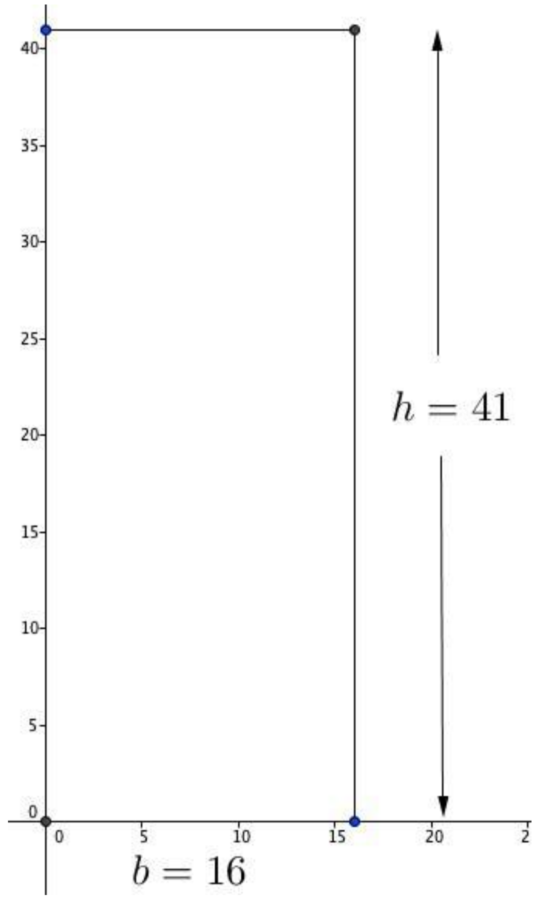


Rettangoli e quadrati: algoritmo di Euclide per il calcolo del MCD

- L'algoritmo di Euclide può essere introdotto premettendo un lavoro di piegatura della carta

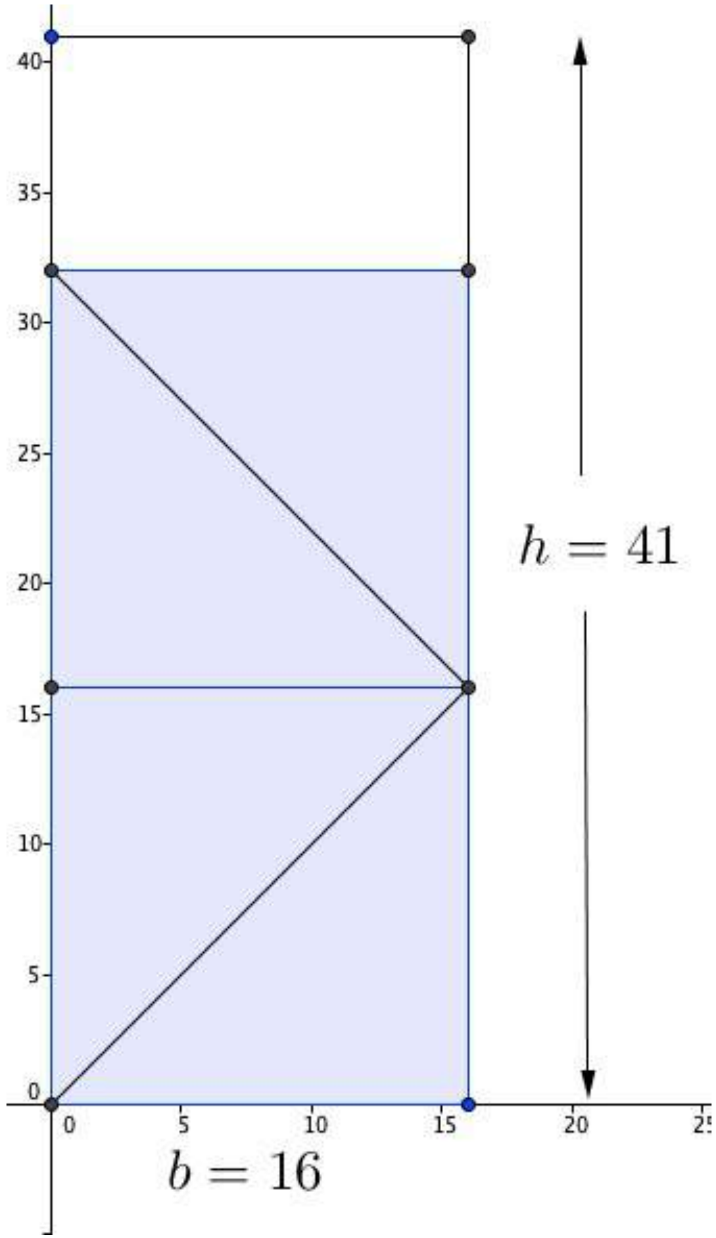
- Consideriamo due numeri naturali *h* e *b* > 0 e formiamo un rettangolo con lati di lunghezza *h* e *b* come in figura

- Ad esempio, *h = 41* e *b= 16*



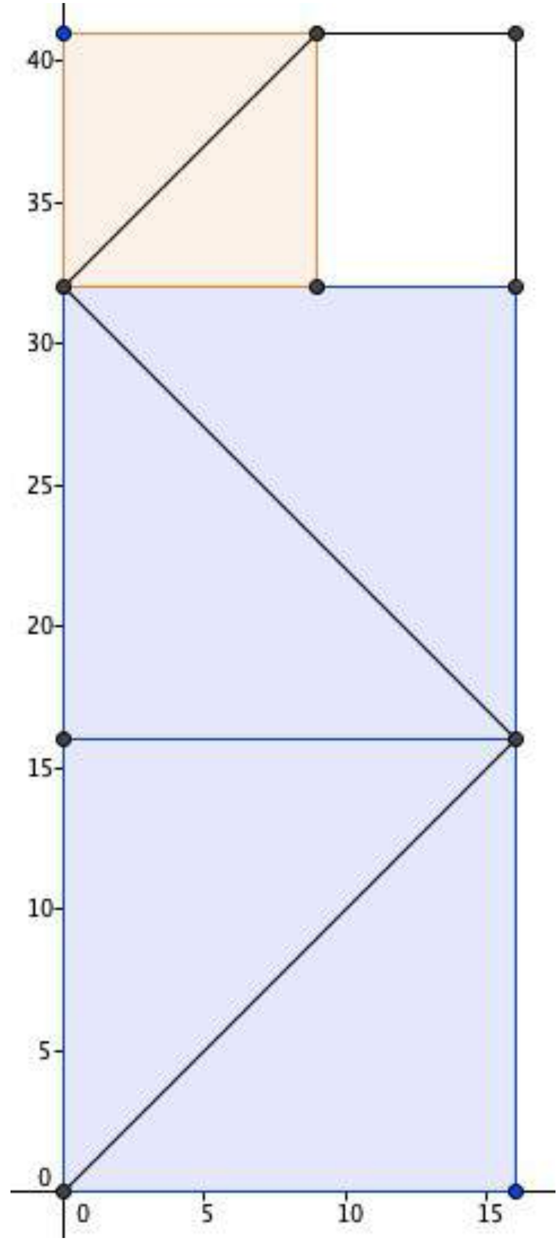
Rettangoli e quadrati

- Disegno all'interno del rettangolo il massimo numero di quadrati aventi per lato il lato orizzontale *b*.
- All'interno dei quadrati traccio una diagonale, formando una linea spezzata

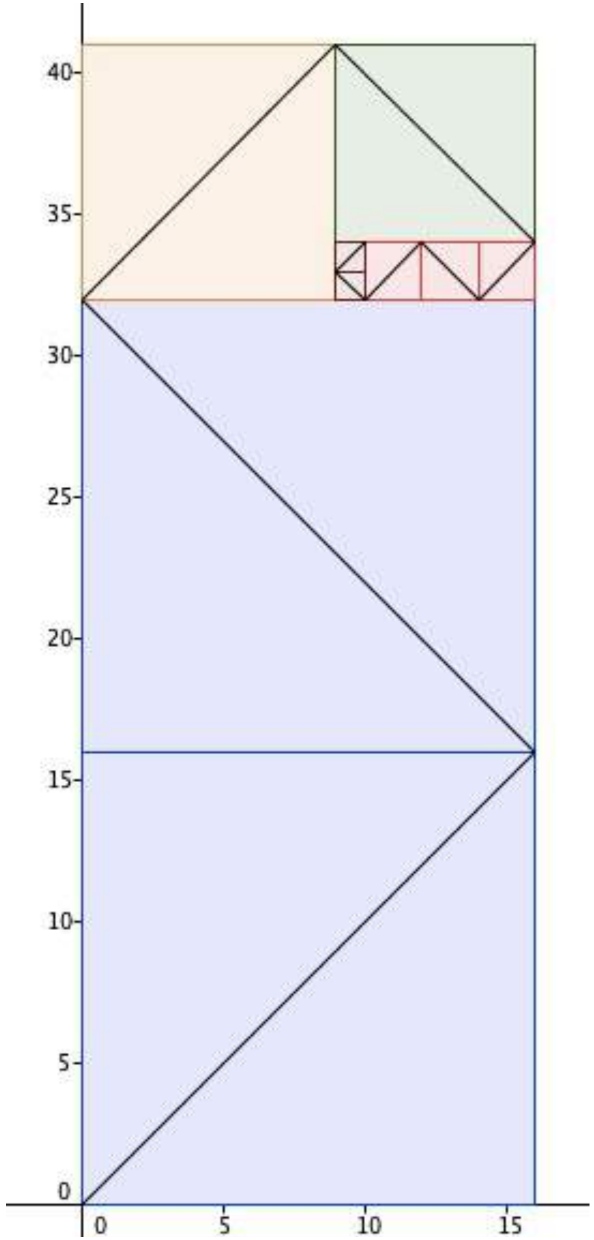


Rettangoli e quadrati

- Nella parte rimanente del rettangolo, inserisco il massimo numero di quadrati di lato massimo, continuando a disegnare la linea spezzata delle diagonali



Rettangoli e quadrati



- Ripeto l’operazione fino a riempire interamente il rettangolo iniziale

- La procedura può essere riletta mediante l’algoritmo delle divisioni successive di Euclide

- Altri argomenti correlati: proporzioni, rapporti e frazioni, pendenza di una retta

Grazie per l'attenzione