



Illuminare le frazioni

Introduzione

La proposta didattica è rivolta ad alunni della scuola secondaria di primo grado: a partire dalla nozione di frazione si approda al concetto di approssimazione tra numeri razionali, senza ricorrere alla rappresentazione decimale. L'attività, basata su una idea di Coxeter, si avvale di strumenti geometrici, finalizzati alla comprensione di concetti algebrici più astratti: si propone di integrare lo studio delle frazioni con quello del piano cartesiano, con particolare riferimento all'uso delle coordinate cartesiane, alla rappresentazione grafica e analitica delle rette. In particolare, si intende consolidare la nozione di equivalenza tra frazioni e di numero razionale, di ordinamento e confronto, di distanza e approssimazione.

Presentazione del tema

Le frazioni sono rappresentate da punti a coordinate intere nel primo quadrante del piano cartesiano: al punto (n, m) , con $n \neq 0$, viene associata la frazione m/n . Questa scelta è motivata dalla coerenza con la nozione di pendenza di una retta e la rappresentazione grafica della proporzionalità diretta; è però possibile adattare la proposta didattica alla usuale convenzione che identifica (n, m) con n/m o estendere la rappresentazione all'intero piano cartesiano includendo i numeri razionali negativi. Una prima esplorazione del piano (Fig. 1) permette di riconoscere le frazioni equivalenti: infatti, esse sono quelle raccolte su una stessa semiretta uscente dall'origine.

Per facilitare la scoperta di questa proprietà, interpretiamo le semirette dall'origine come raggi luminosi generati da una sorgente posta nell'origine stessa. Il raggio fornisce una rappresentazione concreta di una classe di frazioni equivalenti, supportando l'acquisizione della nozione di numero razionale; la proprietà invariante della divisione può essere illustrata geometricamente percorrendo il raggio.

Tra i punti (a coordinate intere) allineati lungo un raggio, solo uno riceve la luce direttamente, mentre gli altri restano in ombra: coloriamo di rosso il punto illuminato, mentre gli altri di grigio. La rappresentazione geometrica adottata permette di evidenziare, nella classe di equivalenza di una frazione, il ruolo dell'unica frazione ridotta ai minimi termini, capofila di tutte le altre e rappresentata dal punto in rosso (Fig. 1). La stessa costruzione permette di visualizzare l'ordinamento tra frazioni. Infatti, partendo da un raggio lungo l'asse x e ruotandolo in senso antiorario attorno all'origine, si illuminano frazioni di valore sempre maggiore (Fig. 2). È facile, quindi, determinare un elenco ordinato di frazioni ridotte ai minimi termini e con denominatore minore o uguale a un valore assegnato (Fig. 3).

Date due frazioni distinte e non equivalenti, quella maggiore appartiene al raggio che forma l'angolo maggiore con l'asse x (Fig. 2). Gli studenti possono riconoscere e determinare frazioni comprese tra le due assegnate: scopriranno, infatti, che la regione

compresa tra i due raggi luminosi è popolata di frazioni, eventualmente tenendo conto di denominatori maggiori.

Ponendo, invece, l'attenzione a una specifica frazione con denominatore 'elevato', è possibile individuare frazioni con denominatore più piccolo con cui approssimarla, valutando graficamente l'errore introdotto. La comparazione tra le differenze tra frazioni viene svolta graficamente (Fig. 2, 3).

Metodologie

In una iniziale fase laboratoriale le frazioni con denominatore 'piccolo' sono esplorate tramite geoplano, laser e fili colorati. All'esplorazione seguono il disegno e la riproduzione del modello astratto sul quaderno; le osservazioni dedotte sono quindi elaborate anche con strumenti informatici. Al link <http://crf.uniroma2.it/?p=7391> sono disponibili animazioni in GeoGebra e una descrizione più approfondita del percorso.

Bibliografia

- Coxeter, H.S.M. (1961). *Introduction to Geometry*. New York: Wiley.
- Hardy, G.H., & Wright, E.M. (1938, VI ed. 2008). *An Introduction to the theory of numbers*. Oxford: Clarendon Press.

Proposta elaborata da

- Laura Lamberti, Liceo Scientifico Statale Augusto Righi di Roma
lamberti.laura@gmail.com
- Francesca Tovena, Università degli Studi di Roma "Tor Vergata"
ftovena@gmail.com

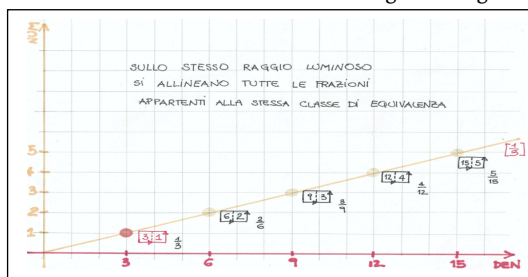


Fig. 1. Sono disegnati alcuni punti a coordinate intere su una stessa semiretta. Accanto a ciascun punto sono riportati la frazione associata e un simbolo rettangolare che aiuta a ricordare il ruolo di ascissa e ordinata. Il raggio luminoso che parte dall'origine intercetta e illumina il punto di coordinate (3,1), colorato di rosso, mentre lascia in ombra gli altri punti. Tutti i punti a coordinate intere sul raggio rappresentano frazioni equivalenti a $1/3$ e individuano quindi lo stesso numero razionale. Il punto illuminato colorato di rosso corrisponde alla frazione ridotta ai minimi termini.

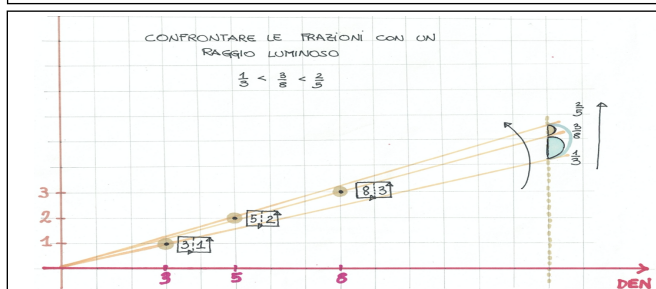


Fig. 2. La rotazione del raggio luminoso permette di visualizzare agevolmente il confronto tra frazioni. I raggi luminosi che illuminano $1/3$, $2/5$, $3/8$ hanno direzioni diverse. Poiché per passare dalla direzione $1/3$ alla direzione $2/5$ occorre ruotare il raggio in senso antiorario si deduce che $2/5 > 1/3$. È possibile esaminare la differenza tra le frazioni, con l'aiuto di una retta verticale.

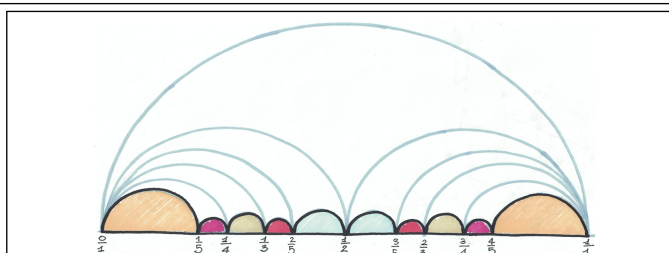


Fig. 3. L'insieme delle frazioni comprese tra 0 e 1 aventi denominatore ≤ 5 è costituito da 11 elementi che si distribuiscono sulla linea dei numeri in modo ordinato ma non uniforme. Sulla linea dei numeri, le distanze tra due frazioni consecutive sono rappresentate tramite semicirconferenze. La grafica evidenzia la simmetria nella distribuzione delle distanze e la loro variabilità. Sul piano cartesiano, le stesse distanze sono evidenziate dagli angoli di rotazione in Fig. 2.