Euclide e la risoluzione delle equazioni di secondo grado

«È anzi assai significativo il fatto che i problemi di secondo grado vennero introdotti per via aritmetica dagli antichi Babilonesi, cosicché potrebbe pensarsi che da questi i matematici greci abbiano tratto l'impostazione geometrica equivalente, costituita dai problemi di *applicazioni delle aree*.»

«Secondo Proclo i problemi delle aree sono antichi e risalgono ai Pitagorici.»

«I problemi di *applicazione delle aree* vengono proposti e risolti nel libro VI degli *Elementi* di Euclide con l'applicazione della teoria delle proporzioni del libro V: ve n'è però qualche anticipazione nel libro I e nel libro II.»

«Ci preme riaffermare che i problemi di *applicazione delle aree*, che si presentano sotto veste geometrica pressi i Greci, corrispondono al modo di presentare problemi equivalenti presso i Babilonesi: cioè problemi di somma-prodotto e di differenza-prodotto. E siccome è certo che anche presso i Greci si ebbe la risoluzione numerica delle equazioni di secondo grado, l'ipotesi di una derivazione orientale dei relativi procedimenti si fa strada ancor meglio.»

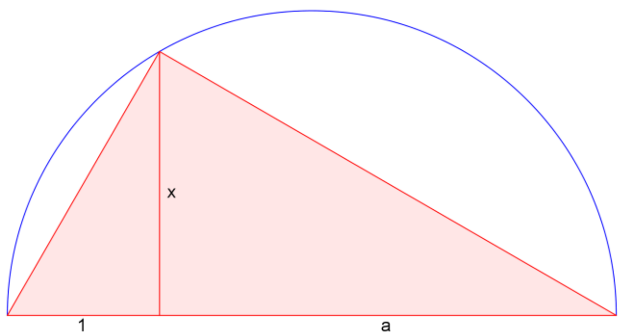
Attilio Frajese, *Attraverso la storia della matematica*, Le Monnier, Firenze, 1973

Equazione mancante del termine di primo grado

L'equazione di 2° grado $x^2 = a$ (con $a > 0$) veniva risolta osservando che:

$$x^2 = a \quad \leftrightarrow \quad x^2 = 1 \cdot a \quad \leftrightarrow \quad 1 : x = x : a$$

proporzione che esprime il secondo teorema di Euclide:



Il problema dell'applicazione ellittica

Il problema permette di determinare i lati di un rettangolo conoscendone il perimetro e l'area.

Indicati con s la somma dei due lati del rettangolo e con A la sua area, si ha l'equazione:

$x(s - x) = A \quad \leftrightarrow \quad x^2 - sx + A = 0$

Applicando la formula risolutiva si ottiene:

$$x = \frac{s}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2 - A}$$

Un segmento di lunghezza $\sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2 - A}$ si può determinare come cateto di un triangolo rettangolo avente ipotenusa di lunghezza $\frac{s}{2}$ e l'altro cateto di lunghezza $\sqrt{A}$ (con la condizione che s > $2\sqrt{A}$).

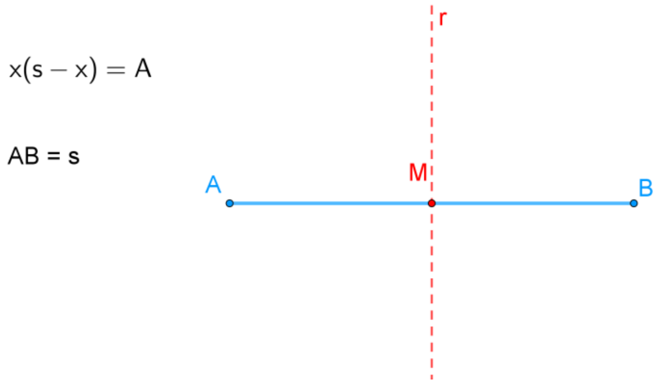
Un segmento di lunghezza $\sqrt{A}$ si può determinare applicando il II teorema di Euclide.

Dunque per costruire il rettangolo cercato si può operare al modo seguente:

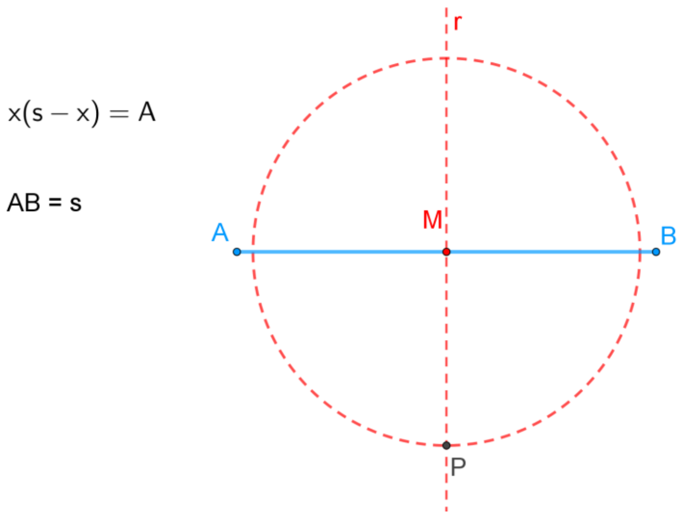
1. disegnare un segmento AB di lunghezza s

2. individuare il punto medio M del segmento AB

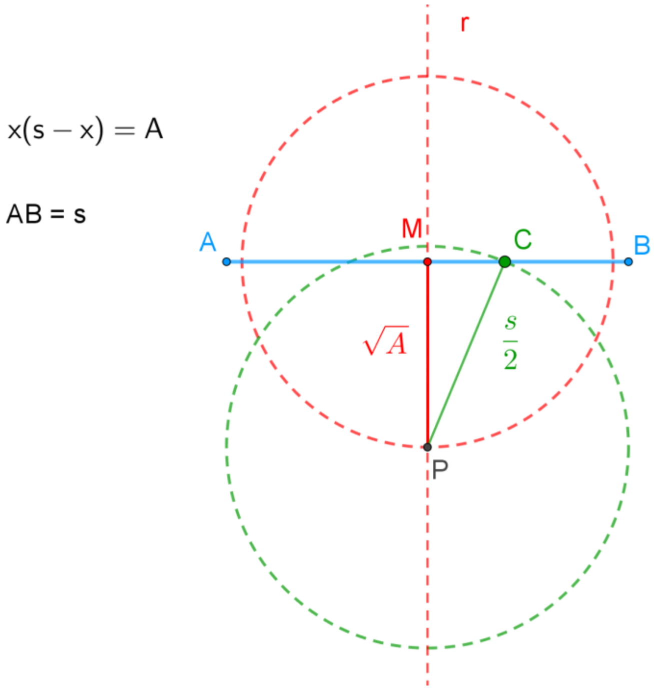
3. tracciare per M la perpendicolare *r* ad AB



4. individuare un punto P su *r* che abbia distanza da M uguale a $\sqrt{A}$



5. tracciare la circonferenza di centro P e raggio $\frac{s}{2}$

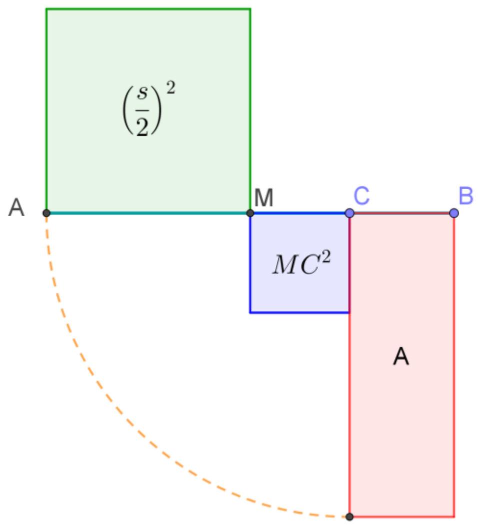


$$CM = \sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2 - A}$$

6. i punti di intersezione tra la circonferenza e il segmento AB individuano le soluzioni del problema.

I lati del rettangolo cercato sono i segmenti AC e BC.

Dall'essere $CM = \sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2 - A}$ si deduce che $CM^2 = \left(\frac{s}{2}\right)^2 - A$ e quindi che $CM^2 + A = \left(\frac{s}{2}\right)^2$ che può essere visualizzato geometricamente al modo seguente:



e che ben illustra l'enunciato della Proposizione n. 5 del secondo libro degli *Elementi* di Euclide, il cui tema è usualmente indicato come *algebra geometrica* dal momento che esprime sotto forma geometrica proprietà che noi siamo soliti riferire all'algebra:

Se si divide una retta in parti uguali e diseguali, il rettangolo compreso dalle parti diseguali della retta, insieme col quadrato della parte compresa fra i punti di divisione, è uguale al quadrato della metà della retta.

Se poniamo AM = MB = a e CM = b, si avrà AC = a + b e BC = a – b e dunque la proposizione 5 afferma che:

$$a^2 = b^2 + (a + b)(a - b)$$

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

Il problema dell'applicazione iperbolica

Il problema permette di determinare i lati di un rettangolo conoscendo la differenza dei suoi lati e l'area.

Indicati con d la differenza dei due lati del rettangolo e con A la sua area, si ha l'equazione:

$x (d + x) = A \leftrightarrow x^2 + dx - A = 0$

Applicando la formula risolutiva si ottiene:

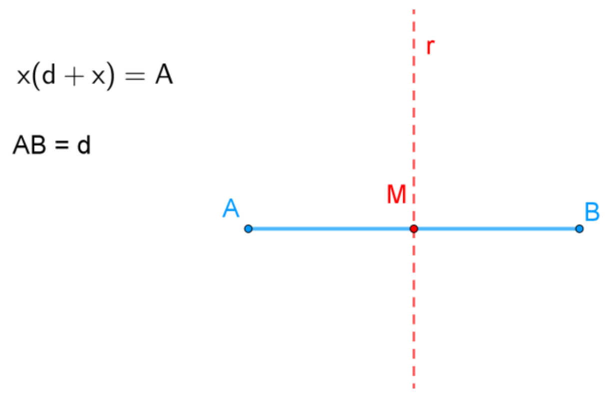
$$x = -\frac{d}{2} + \sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + A}$$

Un segmento di lunghezza $\sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + A}$ si può determinare come ipotenusa di un triangolo rettangolo avente cateti di lunghezza $\frac{d}{2}$ e $\sqrt{A}$.

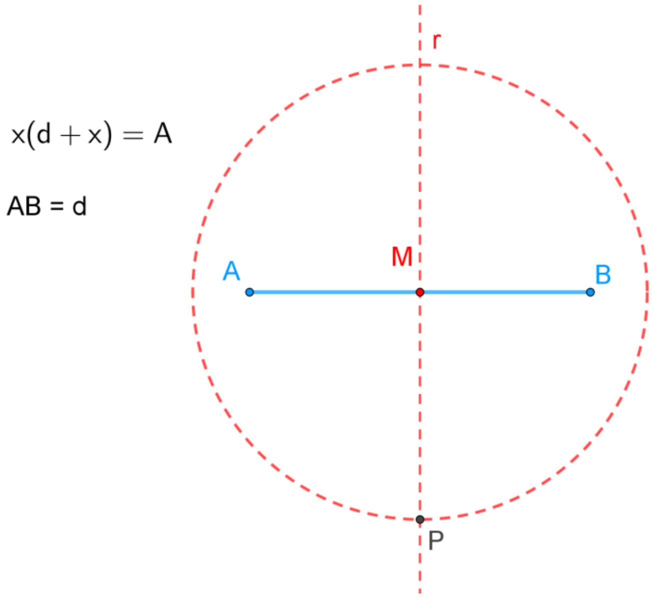
Un segmento di lunghezza $\sqrt{A}$ si può determinare applicando il II teorema di Euclide.

Dunque per costruire il rettangolo cercato si può operare al modo seguente:

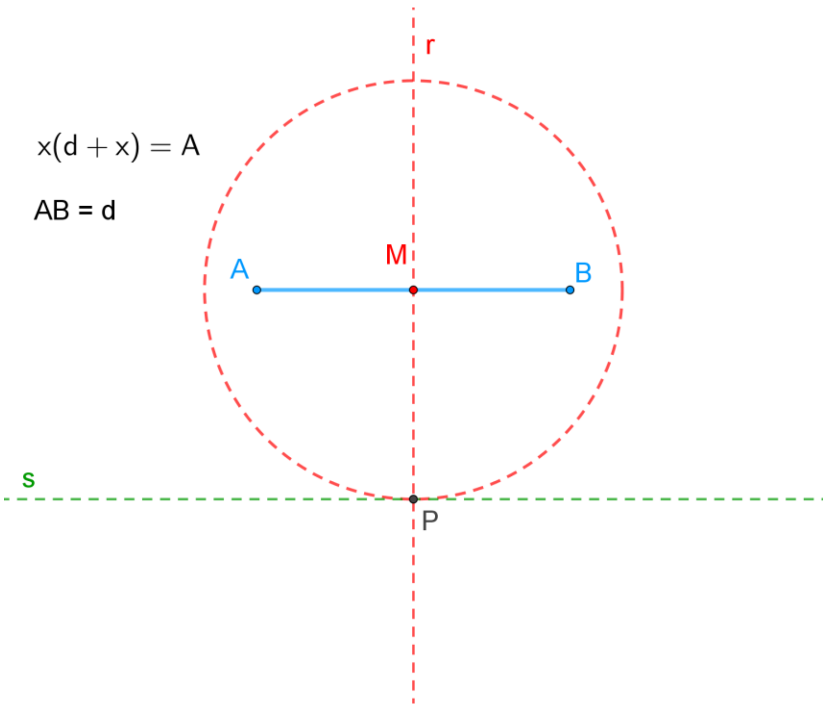
1. disegnare un segmento AB di lunghezza d
2. individuare il punto medio M del segmento AB
3. tracciare per M la perpendicolare *r* ad AB



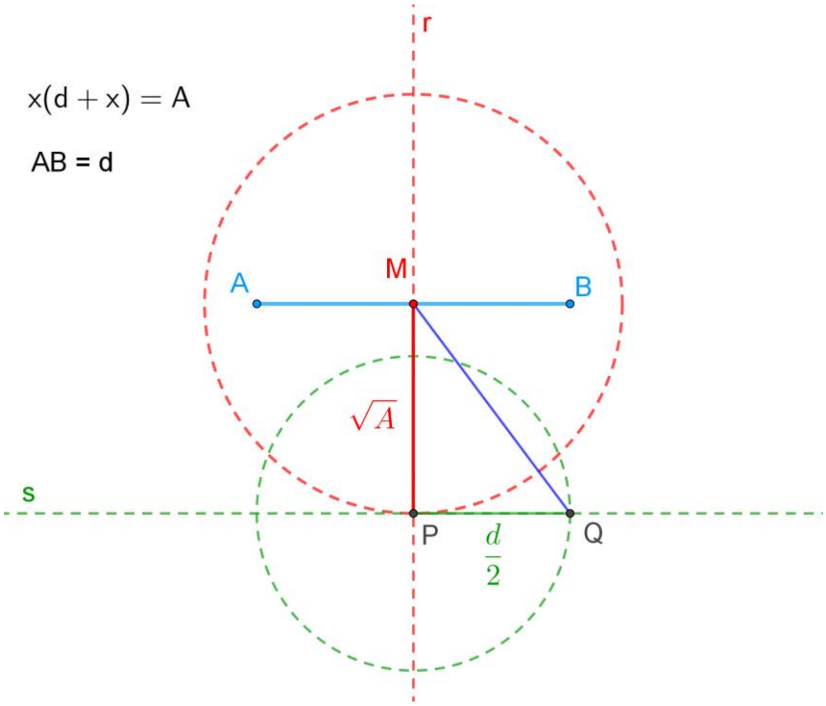
4. individuare un punto P su *r* che abbia distanza da M uguale a $\sqrt{A}$



5. tracciare la perpendicolare *s* a *r* passante per P

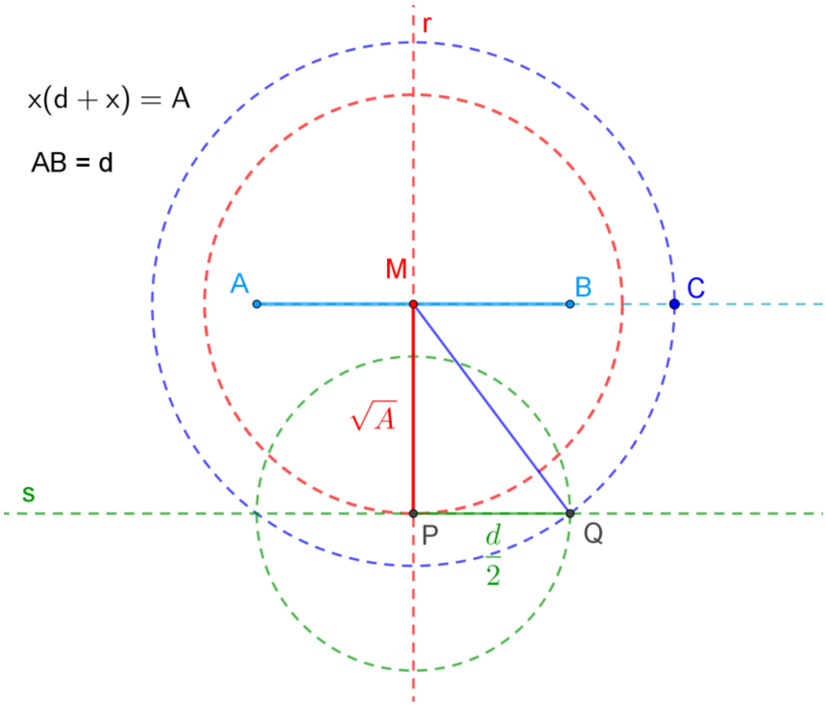


6. individuare un punto Q su *s* che abbia distanza da P uguale a $\frac{d}{2}$



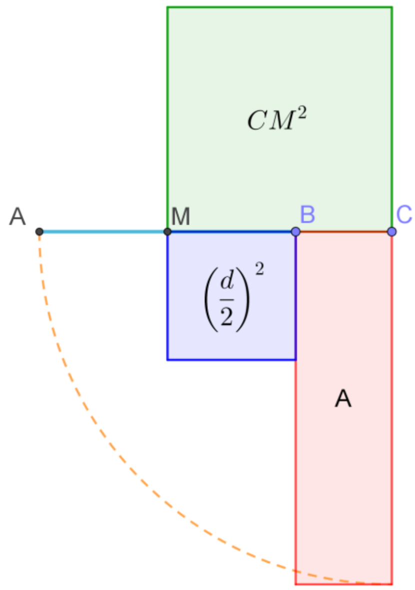
$$MQ = \sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + A}$$

7. riportare il segmento MQ sulla retta AB



I lati del rettangolo cercato sono i segmenti AC e BC.

Dall'essere $CM = \sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + A}$ si deduce che $CM^2 = \left(\frac{d}{2}\right)^2 + A$ che può essere visualizzato geometricamente al modo seguente:



e che ben illustra l'enunciato della Proposizione n. 6 del secondo libro degli *Elementi* di Euclide:

Se si divide una retta, ed un'altra le è aggiunta per diritto, il rettangolo compreso da tutta la (prima) retta più quella aggiunta e dalla retta aggiunta, insieme col quadrato della metà (della prima), è uguale al quadrato della retta composta dalla metà (della prima) e dalla retta aggiunta.

Se poniamo AM = MB = a e BC = b, si avrà CM = a + b e AC = 2a + b e dunque la proposizione 6 afferma che:

$$(a + b)^2 = a^2 + b(2a + b)$$

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$