Parte 2

Problemi e soluzioni

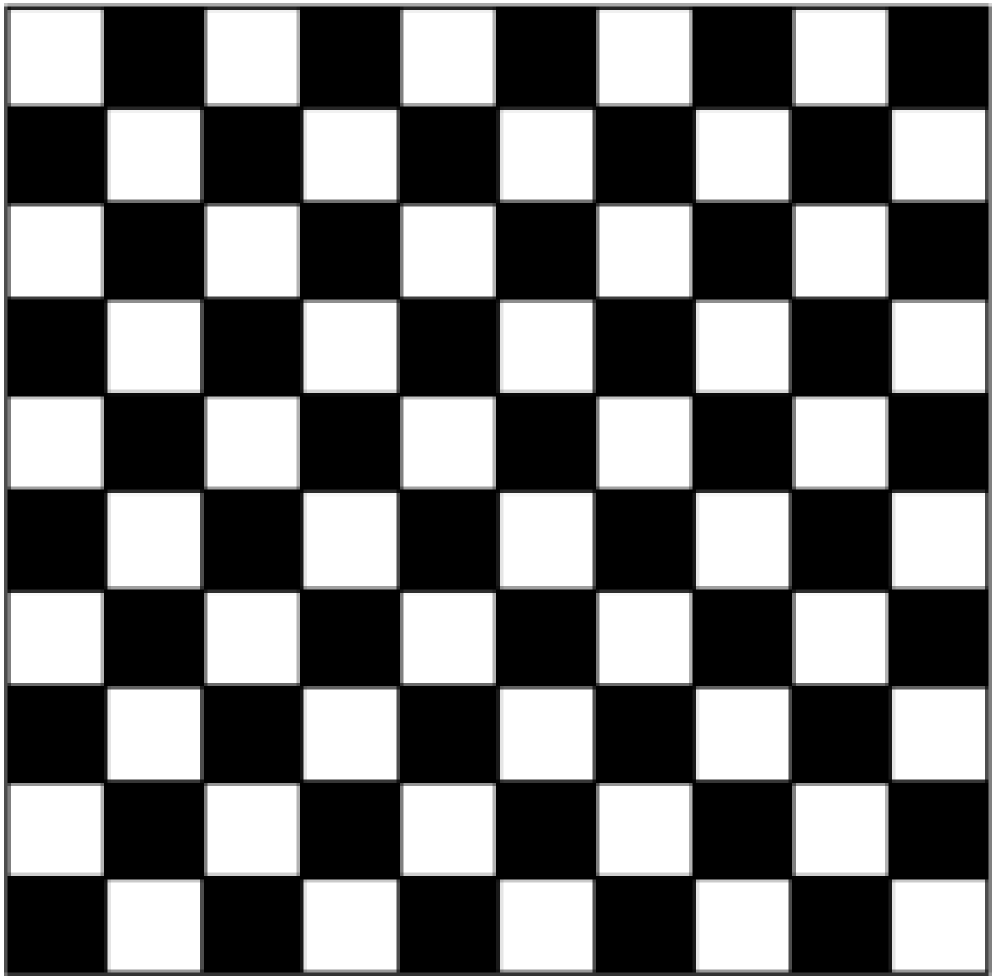
Francesca Tovena Università di Roma Tor Vergata
Laura Lamberti Liceo Righi

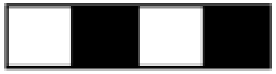
Progetto con la mente e con le mani
Accademia dei Lincei
Polo di Roma
29 gennaio 2020

Problemi e soluzioni

Ricoperture

Problema: E' possibile ricoprire una scacchiera 10x10 con tetramini 1x4 ?



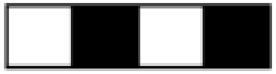


Problemi e soluzioni

Ricoperture

Problema: E' possibile ricoprire una scacchiera 10x10 con tetramini 1x4 ?

2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20



$$a_{i,j} = i + j$$

In ogni casella della tabella viene scritta la somma degli indici di riga e di colonna

Problemi e soluzioni

Ricoperture

Problema: E' possibile ricoprire una scacchiera 10x10 con tetramini 1x4 ?

2	3	0	1	2	3	0	1	2	3
3	0	1	2	3	0	1	2	3	0
0	1	2	3	0	1	2	3	0	1
1	2	3	0	1	2	3	0	1	2
2	3	0	1	2	3	0	1	2	3
3	0	1	2	3	0	1	2	3	0
0	1	2	3	0	1	2	3	0	1
1	2	3	0	1	2	3	0	1	2
2	3	0	1	2	3	0	1	2	3
3	0	1	2	3	0	1	2	3	0

$$a_{i,j} = i + j \pmod 4$$

In ogni casella della tabella viene scritto il resto la somma degli indici di riga e di colonna
Nella divisione per 4

Problemi e soluzioni

Ricoperture

Quanti sono i numeri compresi tra 1 e 100 che danno resto=0 nella divisione per 4?

Quanti quelli che danno resto1?

Quanti quelli che danno resto 2?

Quanti quelli che danno resto 3?

Problemi e soluzioni

Ricoperture

Quanti sono i numeri compresi tra 1 e 100 che danno resto=0 nella divisione per 4?

Quanti quelli che danno resto1?

Quanti quelli che danno resto 2?

Quanti quelli che danno resto 3?

4n: 4,8,12,16,....96,100 =25

4n-3: 1,5,9,13,17,.....97 =25

4n-2: 2,6,10,14,18,22,...98 =25

4n-1: 3,7,11,15,19,23,...99 =25

$$4n-k \leqslant 100$$
$$k \in \{0\,;1\,;2\,;3\}$$

Problemi e soluzioni

Ricoperture

2	3	0	1

2
3
0
1

2	3	0	1	2	3	0	1	2	3
3	0	1	2	3	0	1	2	3	0
0	1	2	3	0	1	2	3	0	1
1	2	3	0	1	2	3	0	1	2
2	3	0	1	2	3	0	1	2	3
3	0	1	2	3	0	1	2	3	0
0	1	2	3	0	1	2	3	0	1
1	2	3	0	1	2	3	0	1	2
2	3	0	1	2	3	0	1	2	3
3	0	1	2	3	0	1	2	3	0

Problemi e soluzioni

Ricoperture

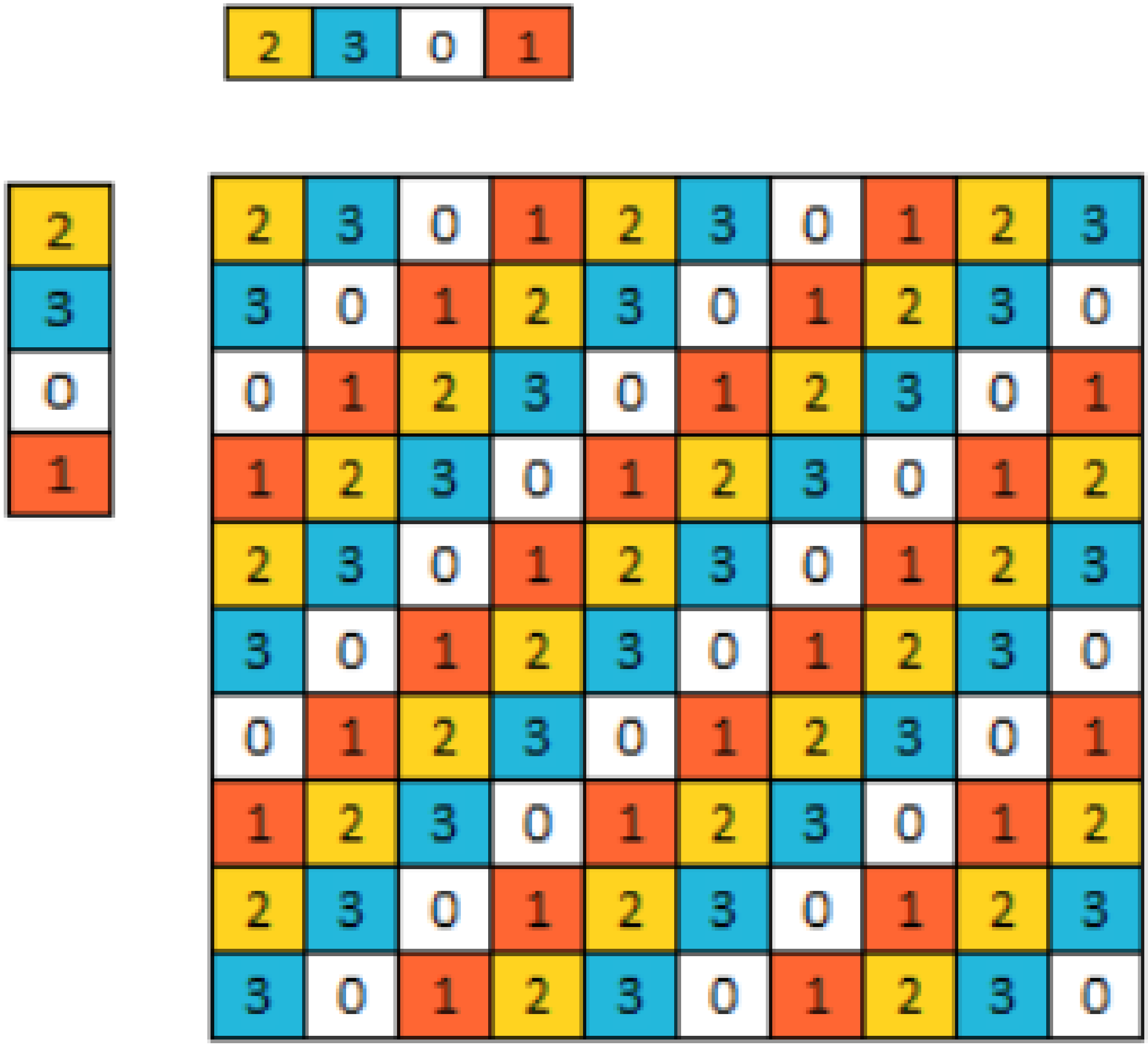
2	3	0	1

2
3
0
1

2	3	0	1	2	3	0	1	2	3
3	0	1	2	3	0	1	2	3	0
0	1	2	3	0	1	2	3	0	1
1	2	3	0	1	2	3	0	1	2
2	3	0	1	2	3	0	1	2	3
3	0	1	2	3	0	1	2	3	0
0	1	2	3	0	1	2	3	0	1
1	2	3	0	1	2	3	0	1	2
2	3	0	1	2	3	0	1	2	3
3	0	1	2	3	0	1	2	3	0

Problemi e soluzioni

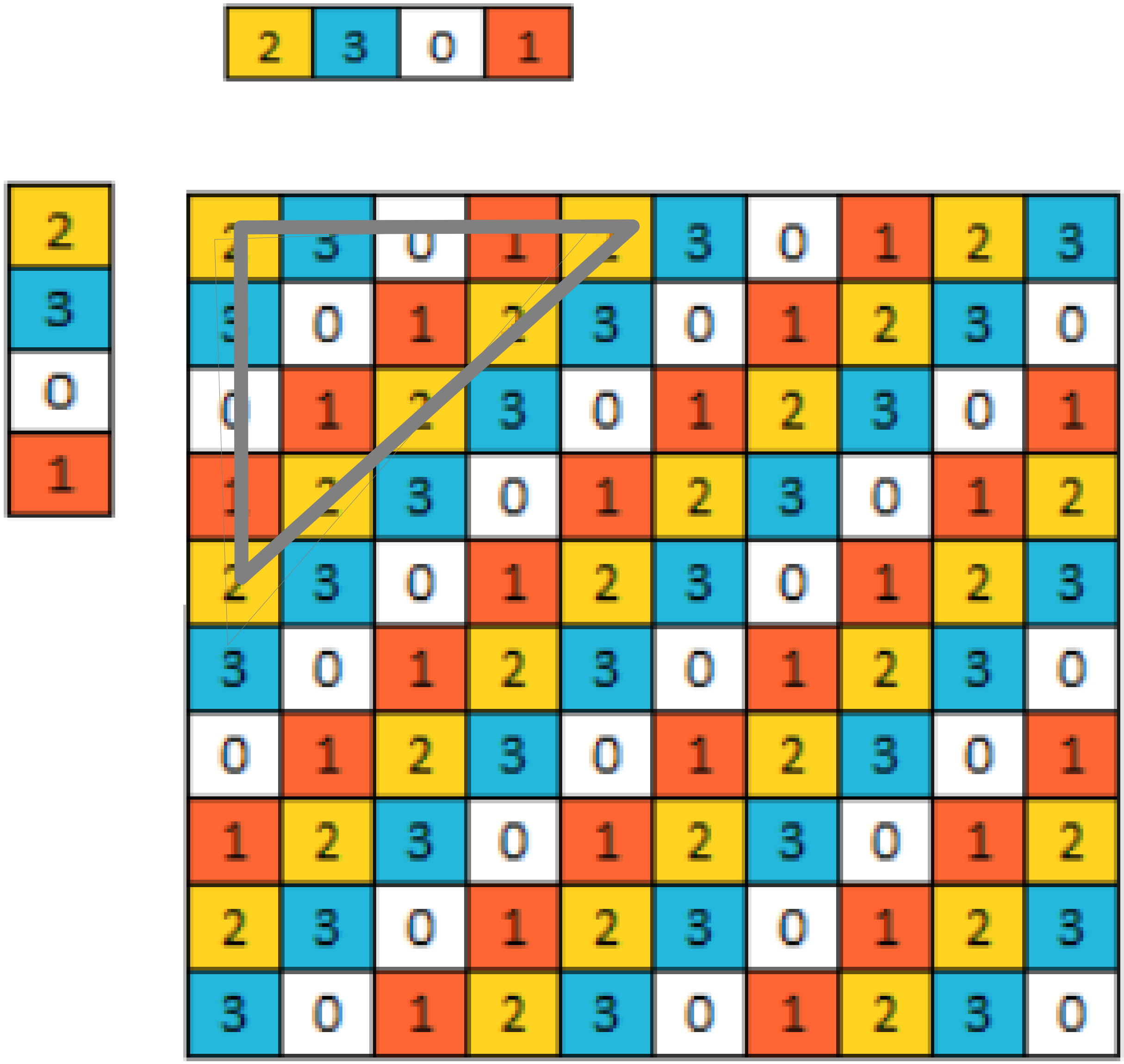
Ricoperture



Ci sono **26** quadretti azzurri (resto 3), **25** gialli (resto 2),
25 bianchi (resto 0) e **24** marroni (resto 1)

Problemi e soluzioni

Ricoperture



Ci sono **26** quadretti azzurri (resto 3), **25** gialli (resto 2),
25 bianchi (resto 0) e **24** marroni (resto 1)

Problemi e soluzioni

Riempimenti

E' possibile mettere 250 mattoncini 1 x 1 x 4 in una scatola 10 x 10 x 10 ?

Riempiamo la scatola uno strato alla volta.
Adesso abbiamo bisogno di tre coordinate per identificare ciascun quadratino.

Associamo ad ogni mattoncino la somma delle sue coordinate x+y+z
E poi calcoliamo il resto nella divisione per 4.

Il primo strato avrà la distribuzione di quadratini
che avevamo osservato nella scacchiera.

Il secondo strato ha una distribuzione diversa invece..

Problemi e soluzioni

Riempimenti

E' possibile mettere 250 mattoncini 1 x 1 x 4
in una scatola 10 x 10 x 10 ?

3	0	1	2	3	0	1	2	3	0
0	1	2	3	0	1	2	3	0	1
1	2	3	0	1	2	3	0	1	2
2	3	0	1	2	3	0	1	2	3
3	0	1	2	3	0	1	2	3	0
0	1	2	3	0	1	2	3	0	1
1	2	3	0	1	2	3	0	1	2
2	3	0	1	2	3	0	1	2	3
3	0	1	2	3	0	1	2	3	0
0	1	2	3	0	1	2	3	0	1

Primo strato di quadretti

Ci sono **25** quadretti azzurri (resto 3), **24** gialli (resto 2), **26** bianchi (resto 0) e **25** marroni (resto 1)

Problemi e soluzioni

Riempimenti

E' possibile mettere 250 mattoncini 1 x 1 x 4 in una scatola 10 x 10 x 10 ?

strato	bianchi	marroni	gialli	azzurri
	resto 0	resto 1	resto 2	resto 3
1	26	25	24	25
2	25	26	25	24
3	24	25	26	25
4	25	24	25	26
5	26	25	24	25
6	25	26	25	24
7	24	25	26	25
8	25	26	25	26
9	26	25	24	25
10	25	26	25	24
totale	251	251	249	249

Problemi e soluzioni

Riempimenti

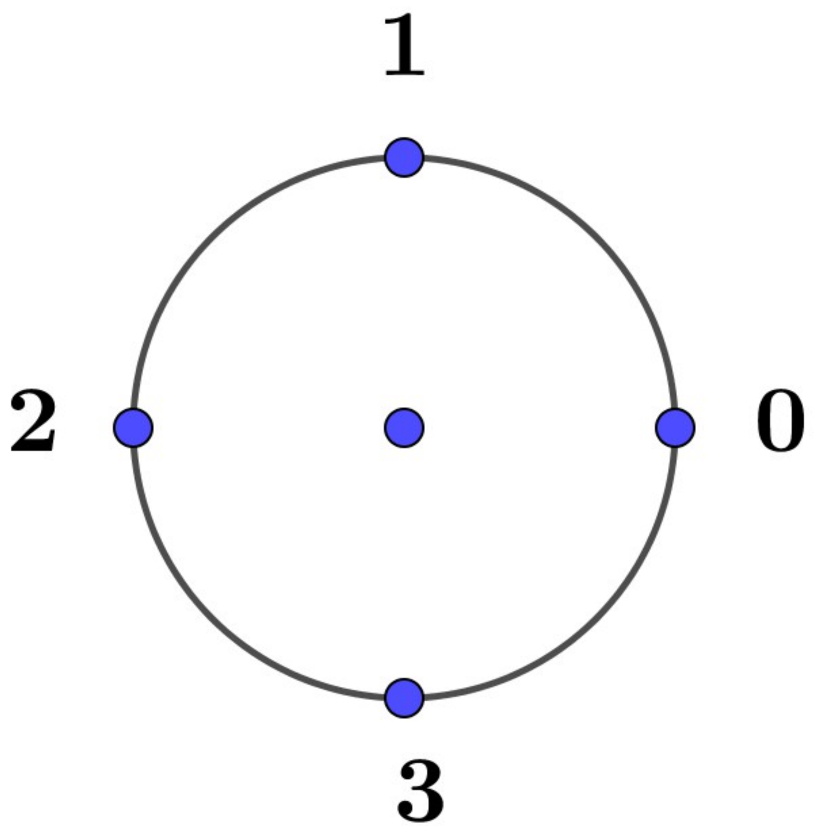
E' possibile mettere 250 mattoncini 1 x 1 x 4
in una scatola 10 x 10 x 10 ?

strato	bianchi	marroni	gialli	azzurri
	resto 0	resto 1	resto 2	resto 3
1	26	25	24	25
2	25	26	25	24
3	24	25	26	25
4	25	24	25	26
5	26	25	24	25
6	25	26	25	24
7	24	25	26	25
8	25	26	25	26
9	26	25	24	25
10	25	26	25	24
totale	251	251	249	249

Problemi e soluzioni

Riempimenti

E' possibile mettere 250 mattoncini 1 x 1 x 4
in una scatola 10 x 10 x 10 ?

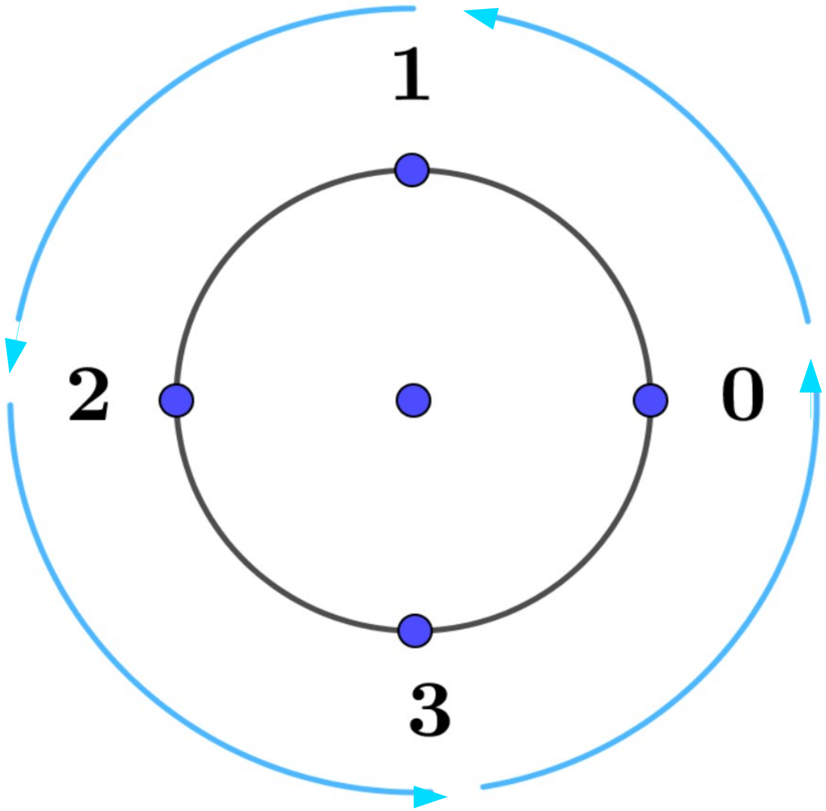


Stiamo lavorando con
le classi resto e l'addizione.

Problemi e soluzioni

Riempimenti

E' possibile mettere 250 mattoncini 1 x 1 x 4
in una scatola 10 x 10 x 10 ?

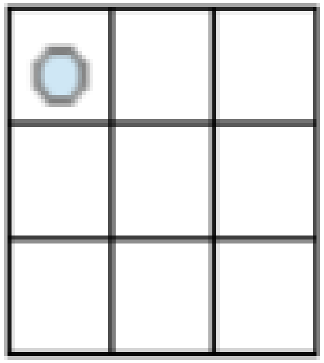


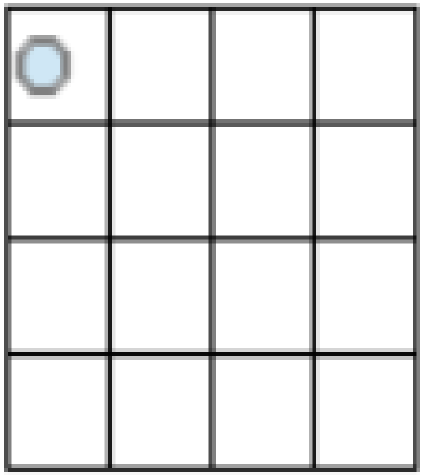
Stiamo lavorando con
le classi resto e l'addizione.

Problemi e soluzioni

Il percorso del cavallo

E' possibile far saltare il cavallo da un quadretto ad un altro delle scacchiere di figura in modo da percorrerle tutte passando una e una sola volta per ciascuna casella?



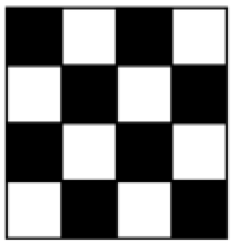


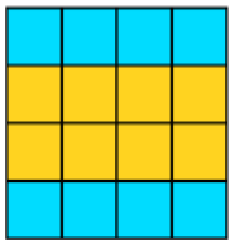
Il percorso richiesto è un esempio di percorso hamiltoniano.
Se si chiede che il cavallo ritorni alla casella di partenza si parla di ciclo hamiltoniano.

Problemi e soluzioni

Il percorso del cavallo

Perché non è possibile per la scacchiera 4x*n* :





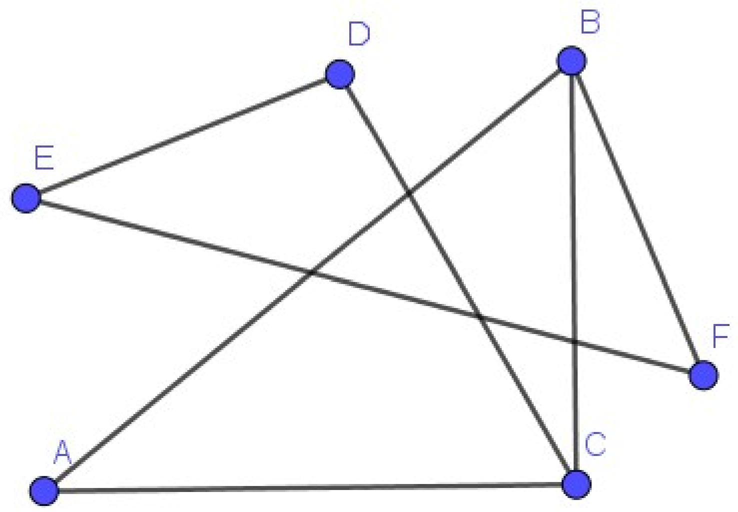
La scacchiera ha lo stesso numero di quadretti gialli e quadretti azzurri.
Se il cavallo si trova su un quadretto azzurro è obbligato ad andare su uno giallo AG.
Invece se si trova su un giallo può decidere se saltare su un altro giallo GG o passare su un quadretto azzurro GA.
Il percorso completo del cavallo è definito da una stringa di 16 lettere di cui 8 A e 8 G.
Pertanto la mossa GG non porta al percorso chiuso totale.

Inoltre la mossa del cavallo lo fa saltare da una casella bianca ad una casella nera e quindi
Se parte da Anera arriverà a Gbianca e da questa tornerà ad un'altra casella Anera …
Non riuscirà mai a passare sulle caselle Abianca o Gnera.

Problemi e soluzioni

Percorsi hamiltoniani

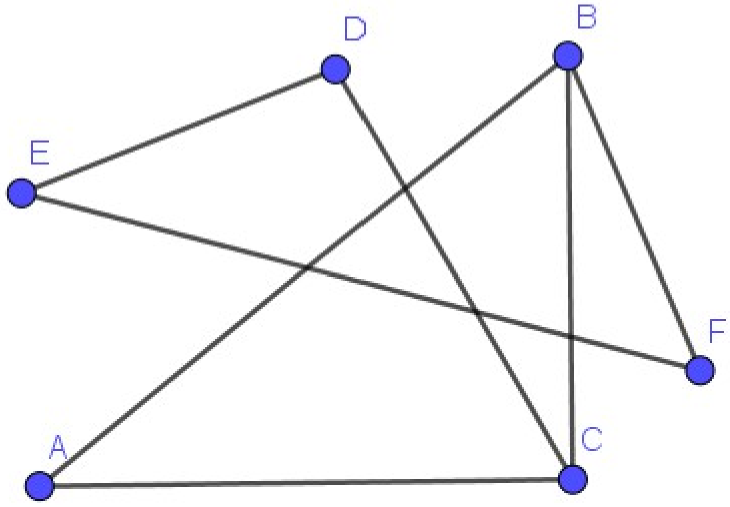
Problema: Organizziamo una cena:
I vertici del grafo in figura rappresentano 6 persone e gli archi uniscono i vertici che rappresentano persone che sono legate da una relazione di amicizia. Purtroppo le persone che non sono amiche tra loro si detestano e sicuramente litigherebbero aspramente se fossero sedute vicine
E' possibile far sedere attorno ad un tavolo le 6 persone in modo che ciascuno sia seduto vicino ad una persona amica?

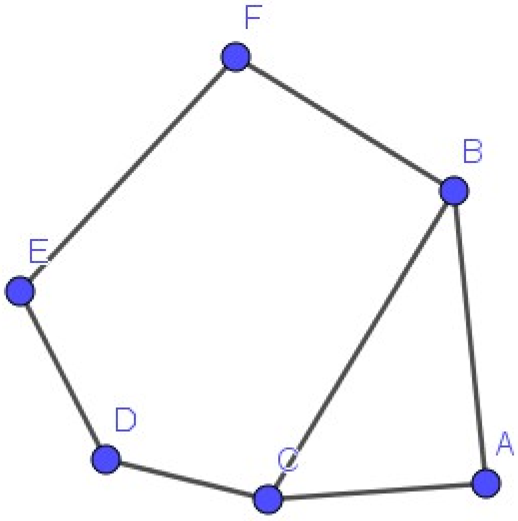


Problemi e soluzioni

Percorsi hamiltoniani

Problema: Organizziamo una cena:
I vertici del grafo in figura rappresentano 6 persone e gli archi uniscono i vertici che rappresentano persone che sono legate da una relazione di amicizia. Purtroppo le persone che non sono amiche tra loro si detestano e sicuramente litigherebbero aspramente se fossero sedute vicine
E' possibile far sedere attorno ad un tavolo le 6 persone in modo che ciascuno sia seduto vicino ad una persona amica.

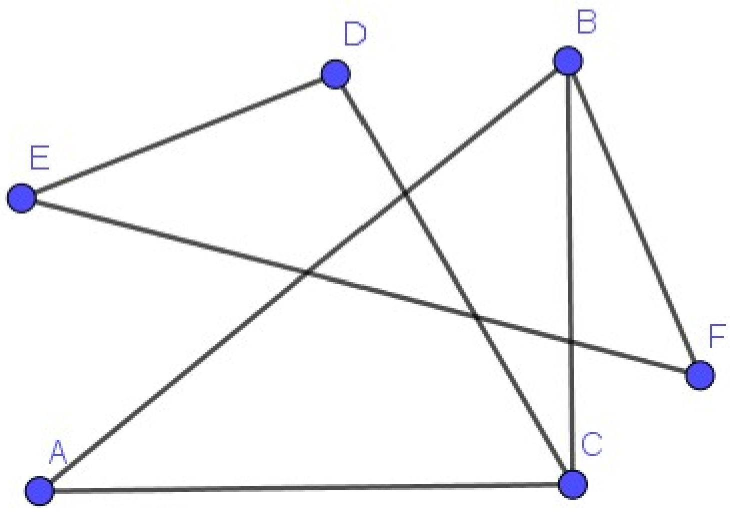


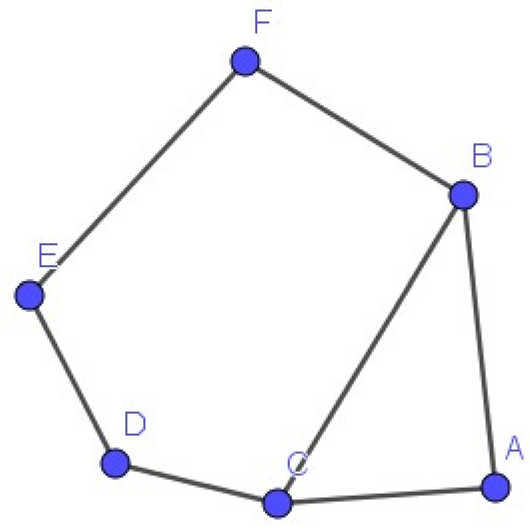


Problemi e soluzioni

Percorsi hamiltoniani

Problema: Organizziamo una cena:
I vertici del grafo in figura rappresentano 6 persone e gli archi uniscono i vertici che rappresentano persone che sono legate da una relazione di amicizia. Purtroppo le persone che non sono amiche tra loro si detestano e sicuramente litigherebbero aspramente se fossero sedute vicine
E' possibile far sedere attorno ad un tavolo le 6 persone in modo che ciascuno sia seduto vicino ad una persona amica.

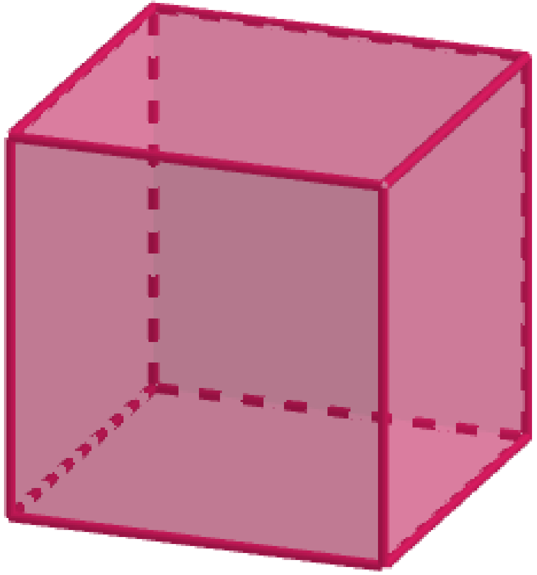




Problemi e soluzioni

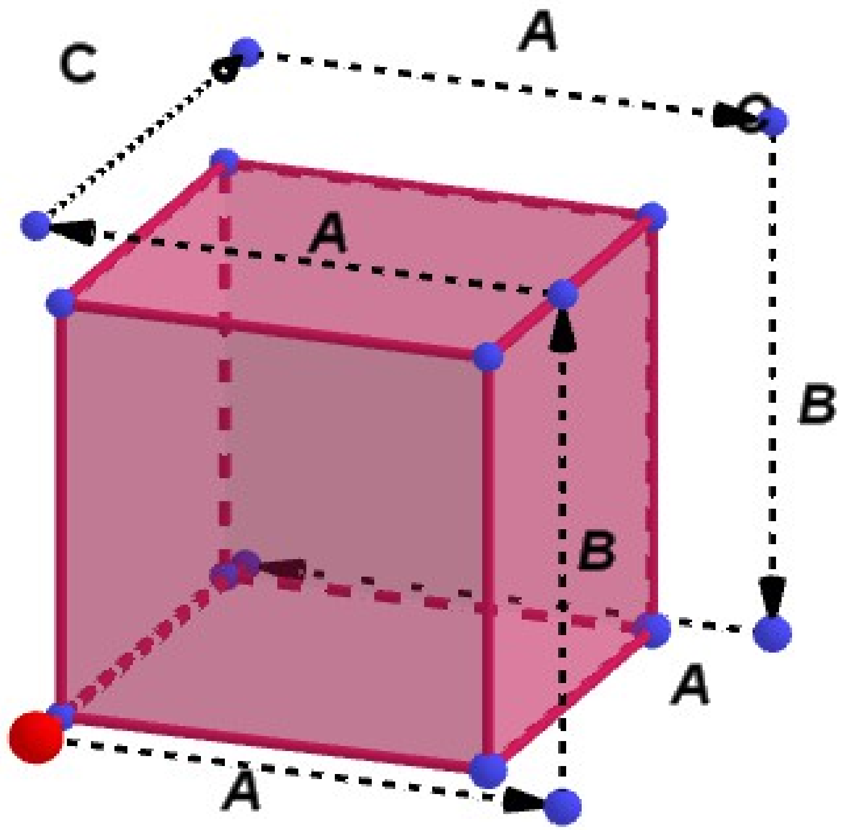
Percorsi hamiltoniani sui solidi

E' possibile passare per tutti i vertici di un cubo in modo che ciascuno sia visitato una e una sola volta?



Problemi e soluzioni

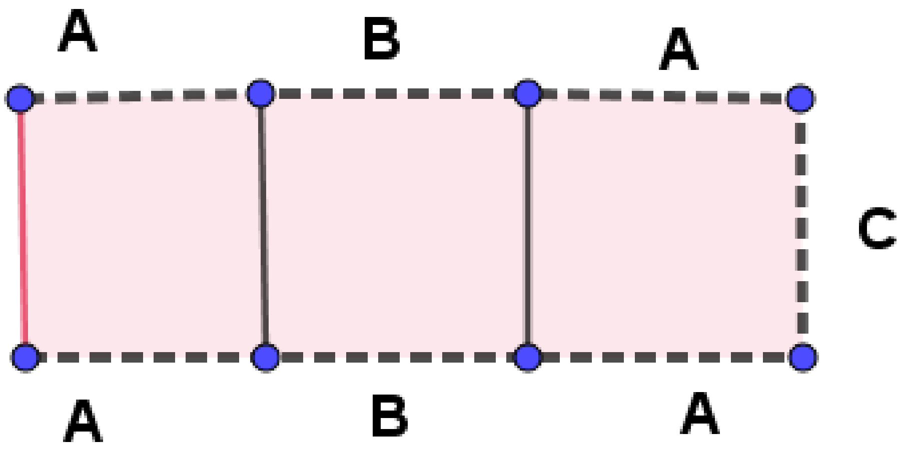
Percorsi hamiltoniani sui solidi



ABACABA

Problemi e soluzioni

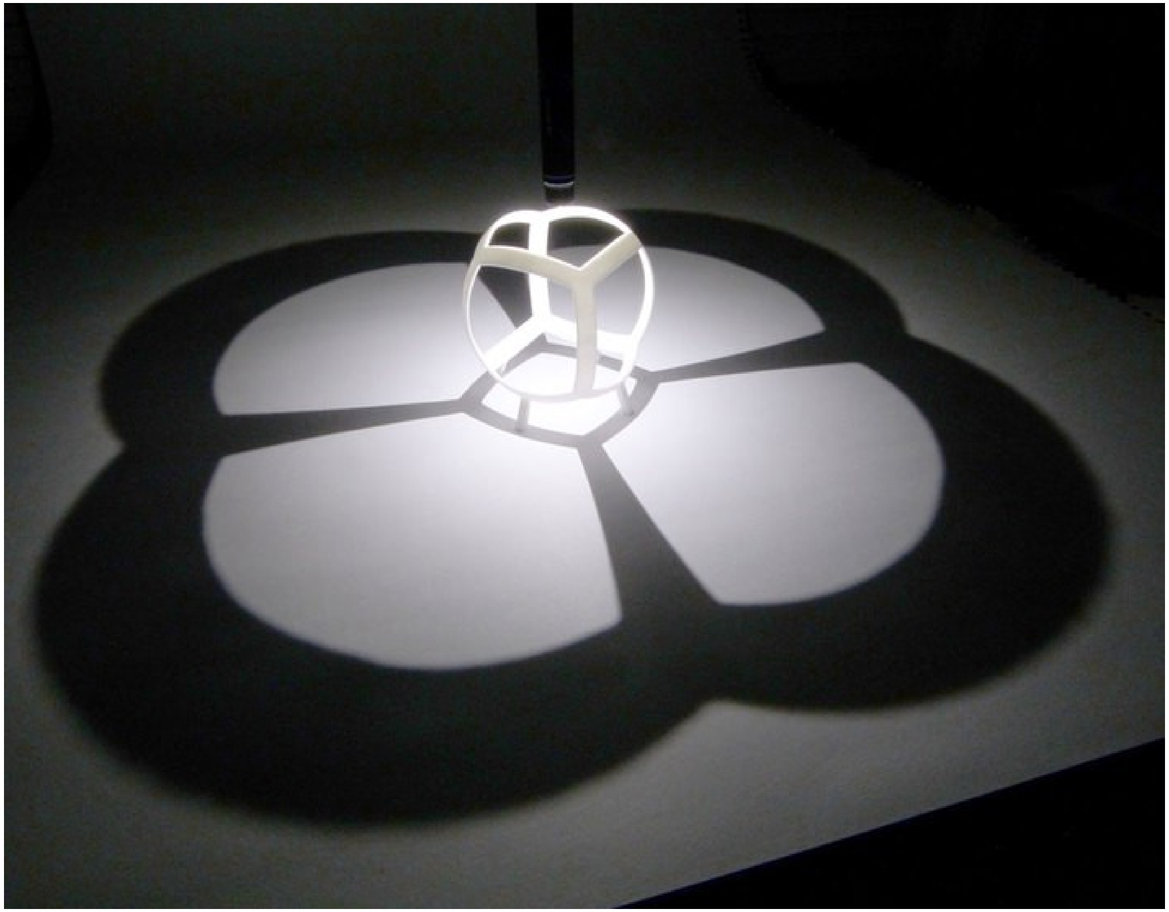
Percorsi hamiltoniani sui solidi



ABACABA

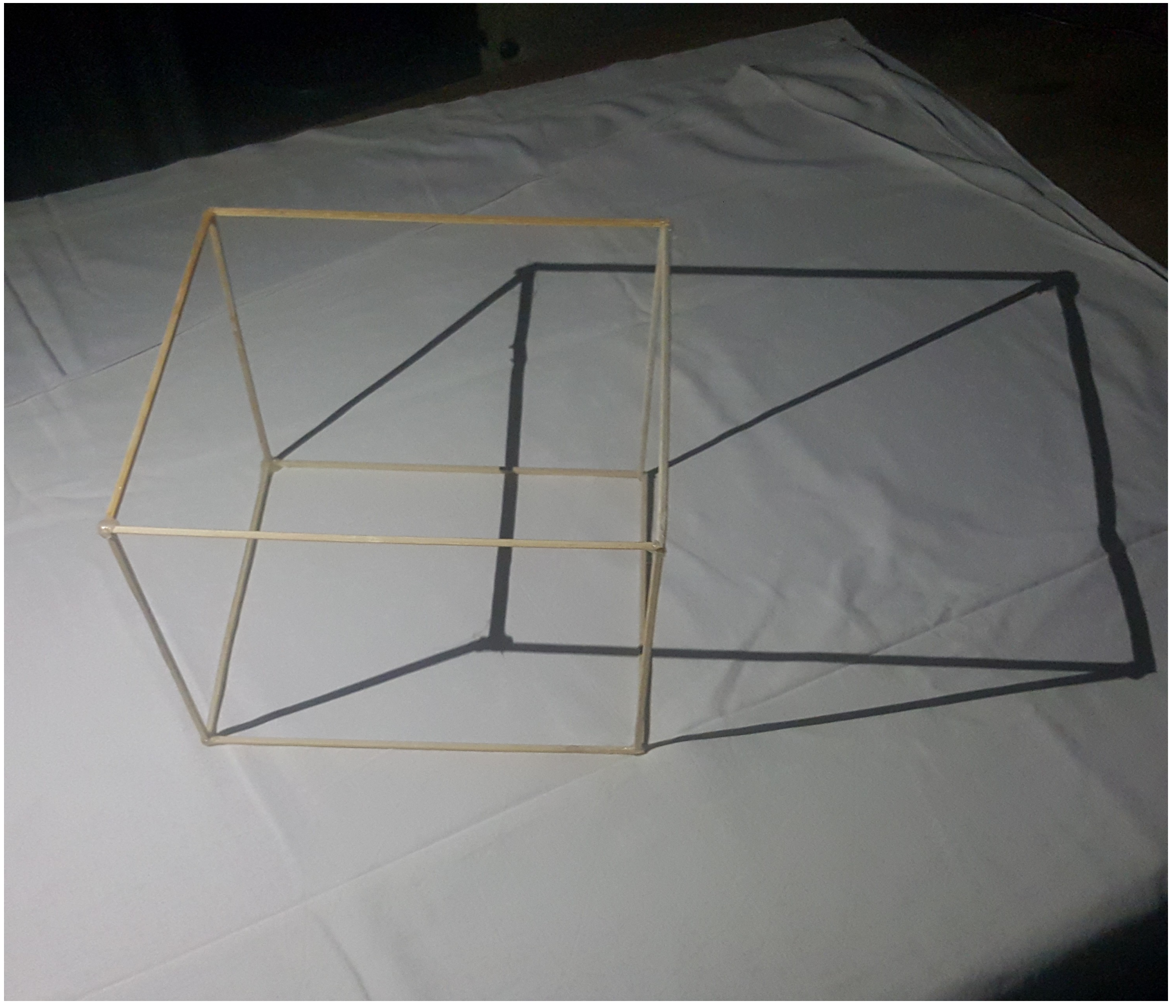
Problemi e soluzioni

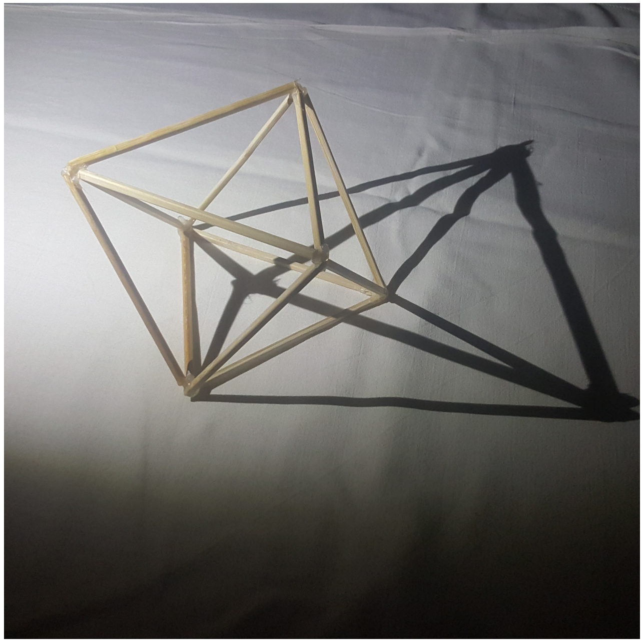
Percorsi euleriani sui solidi

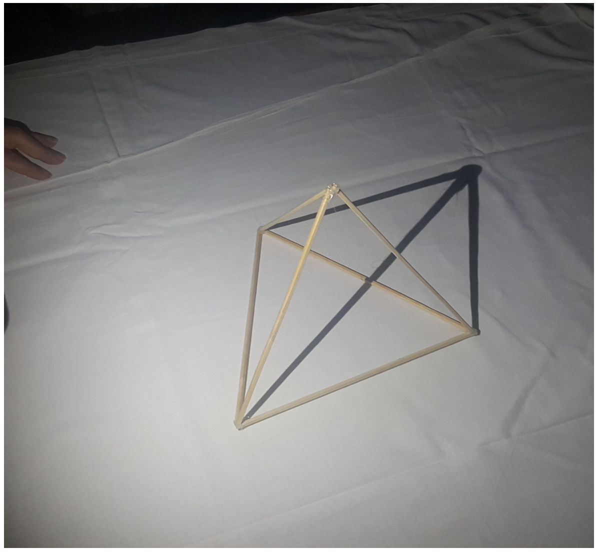


Problemi e soluzioni

Percorsi hamiltoniani sui solidi



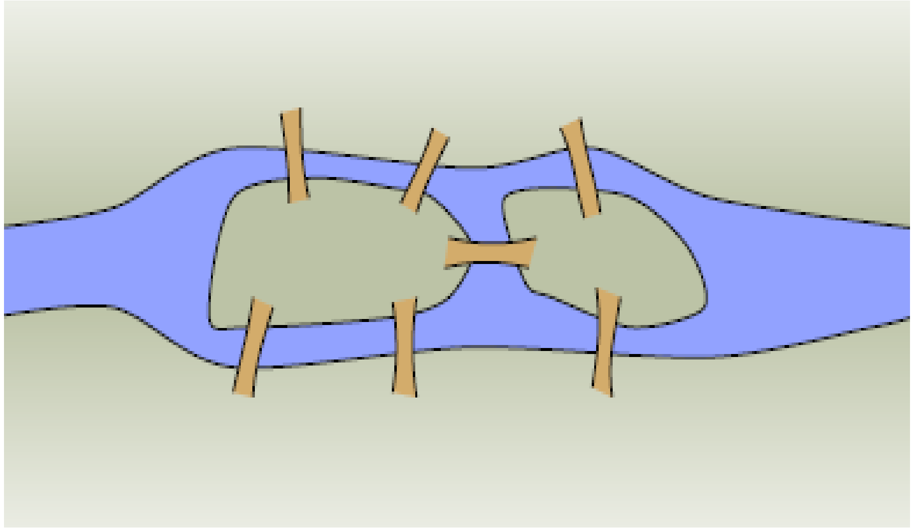


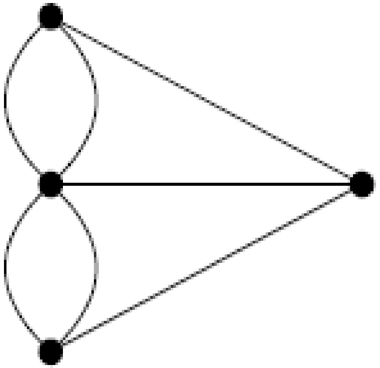


Problemi e soluzioni

Percorsi euleriani sui solidi

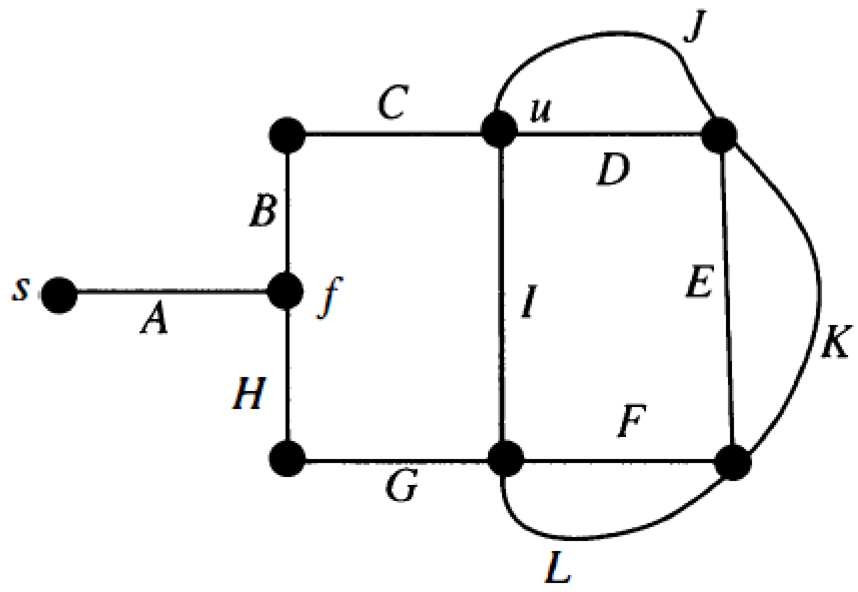
E' possibile percorrere tutti gli spigoli di un cubo passando per ciascuno spigolo una e una sola volta?





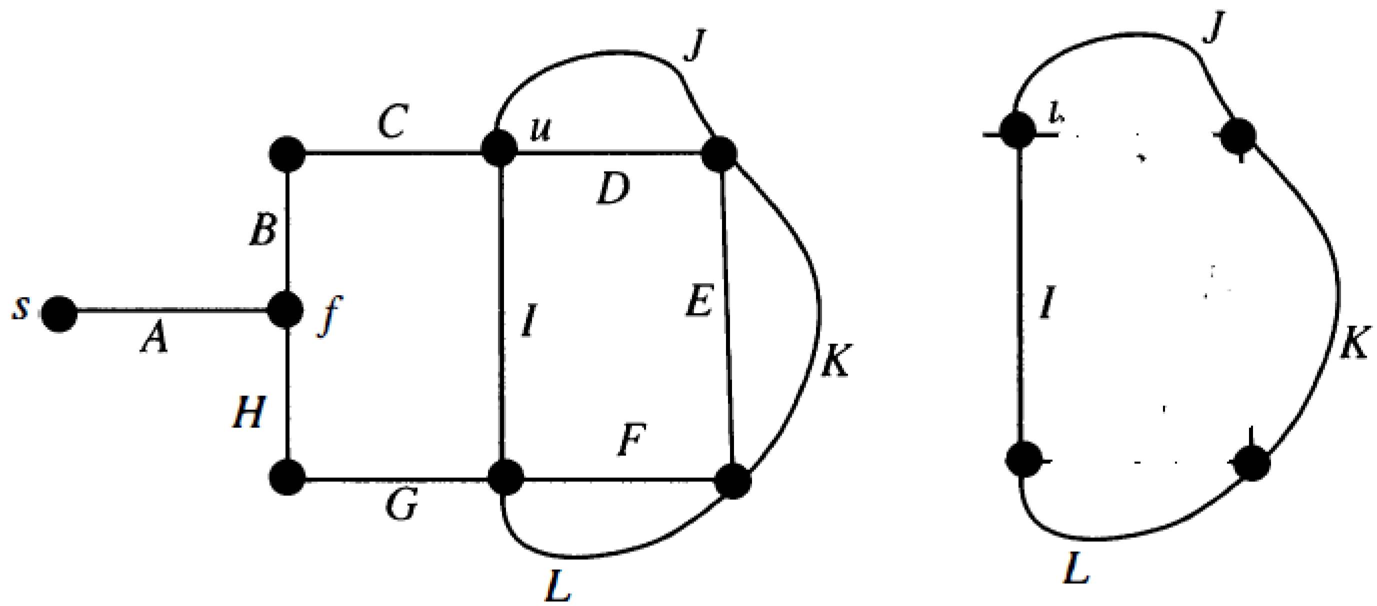
Problemi e soluzioni

Percorsi euleriani



Problemi e soluzioni

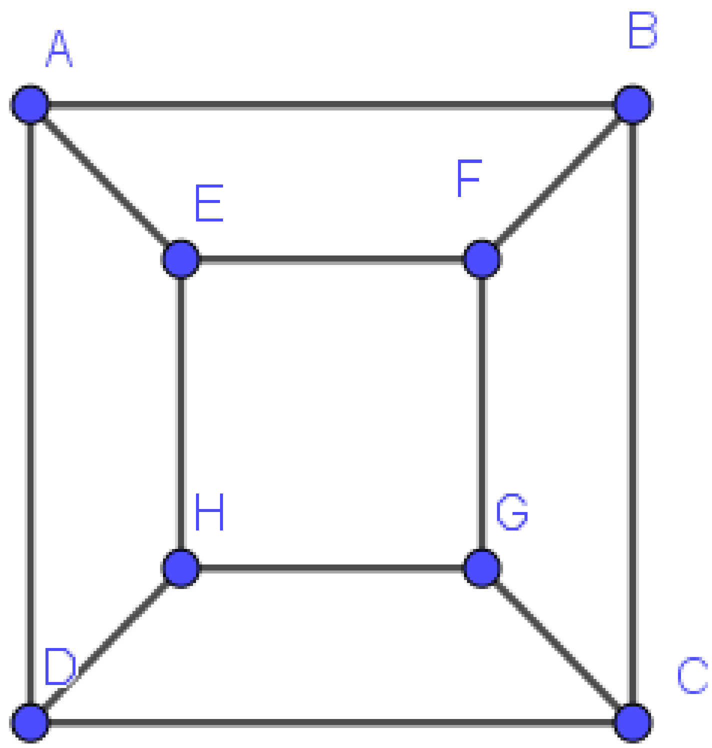
Percorsi euleriani



Algoritmo che permette di fissare, se possibile, un percorso euleriano

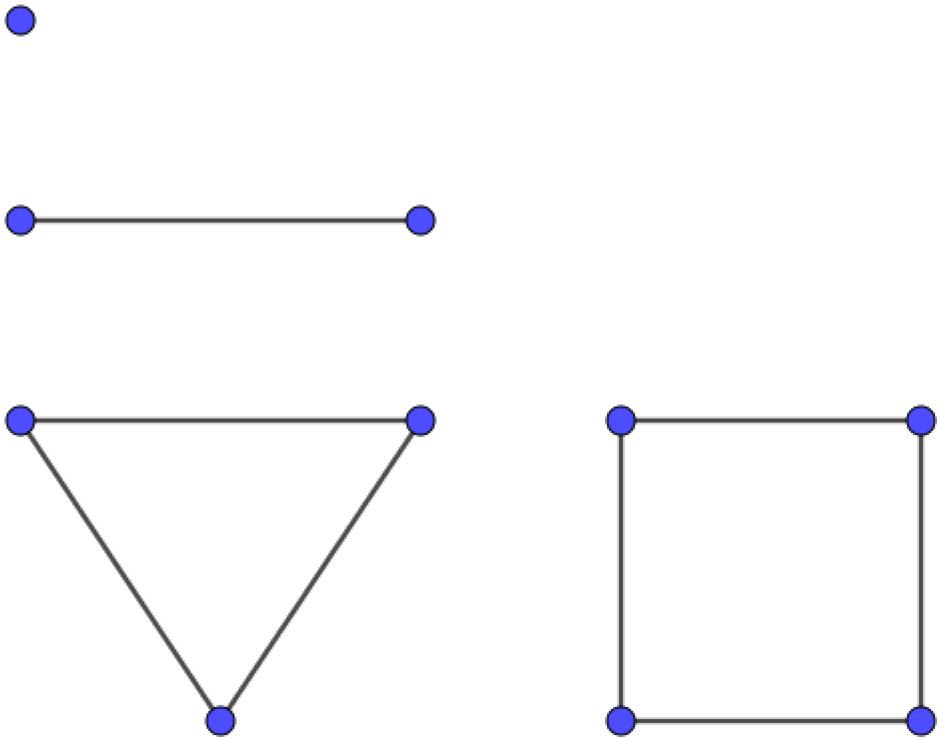
Problemi e soluzioni

Percorsi euleriani sui solidi



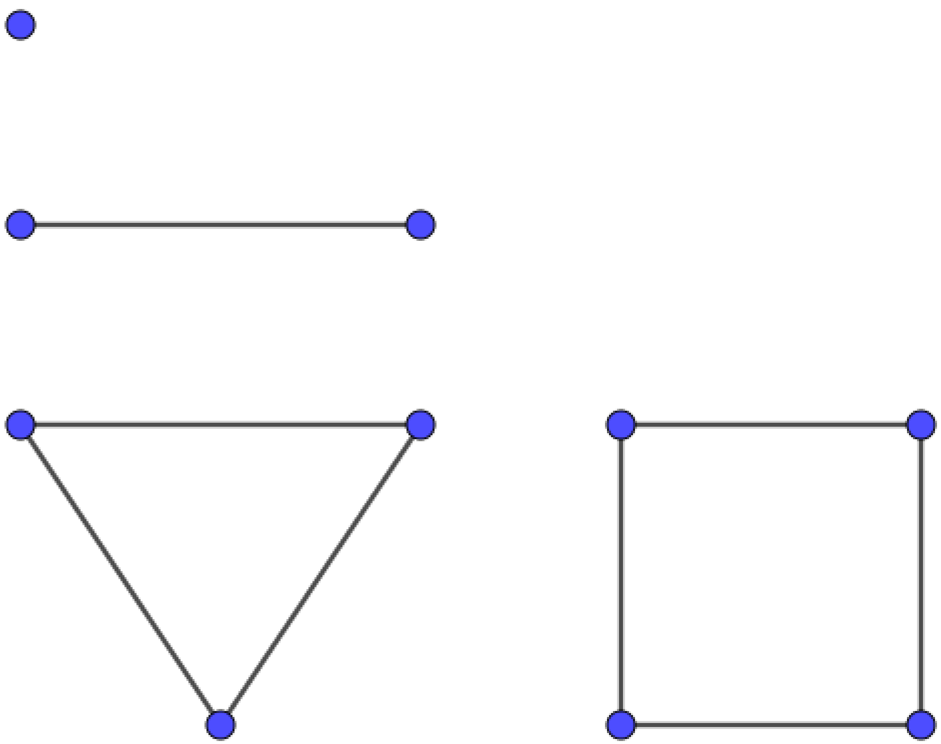
Problemi e soluzioni

La formula di Eulero



Problemi e soluzioni

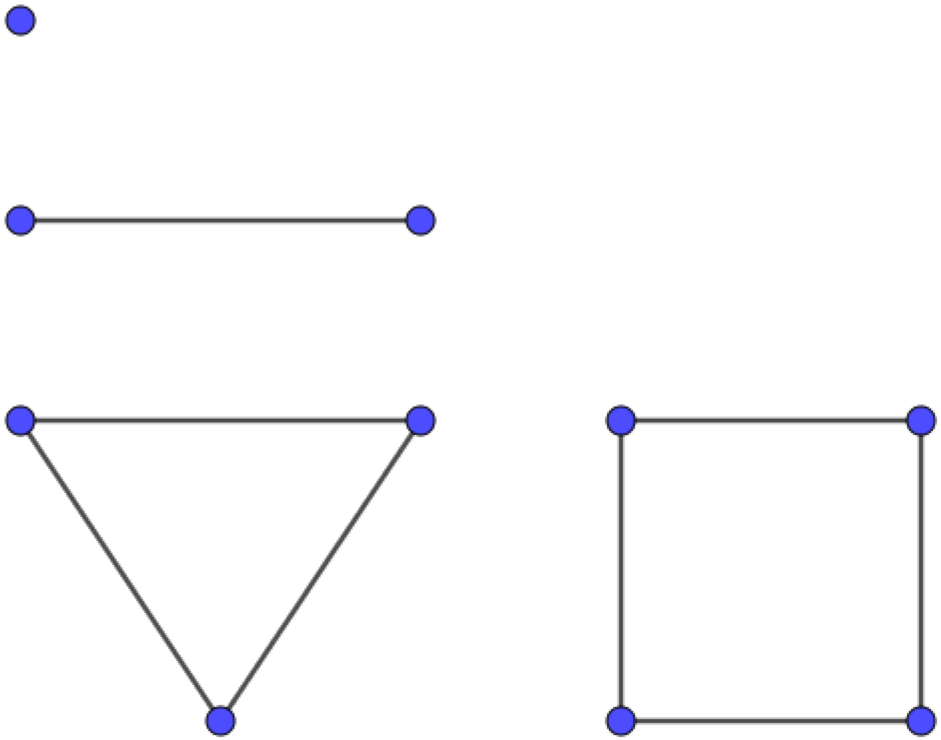
La formula di Eulero



vertici	archi	facce
v	e	f
1	0	1
2	1	1
3	3	2
4	4	2

Problemi e soluzioni

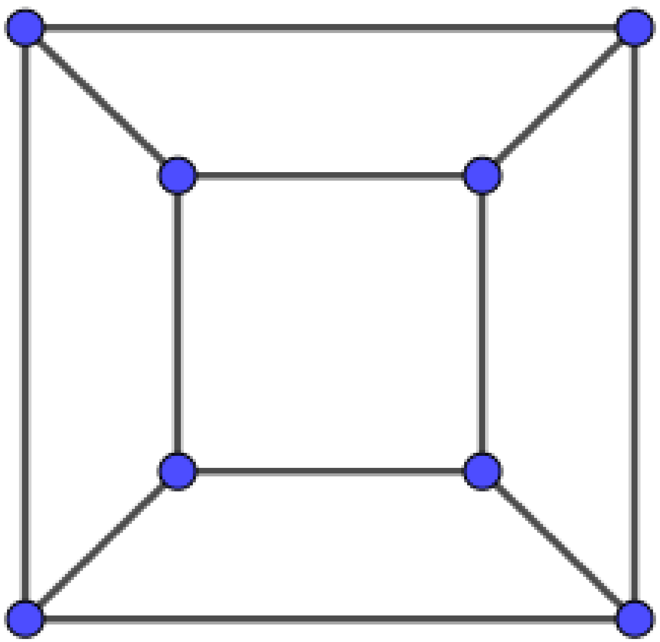
La formula di Eulero



vertici	archi	facce	Formula
v	e	f	v-e+f
1	0	1	2
2	1	1	2
3	3	2	2
4	4	2	2

Problemi e soluzioni

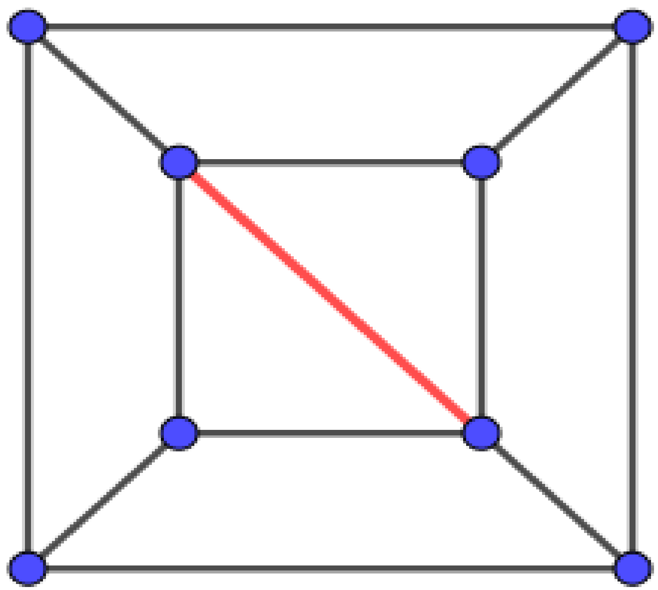
La formula di Eulero



vertici	archi	facce	Formula
v	e	f	v-e+f
1	0	1	2
2	1	1	2
3	3	2	2
4	4	2	2
8	12	6	2

Problemi e soluzioni

La formula di Eulero



vertici	archi	facce	Formula
v	e	f	v-e+f
1	0	1	2
2	1	1	2
3	3	2	2
4	4	2	2
8	12	6	2

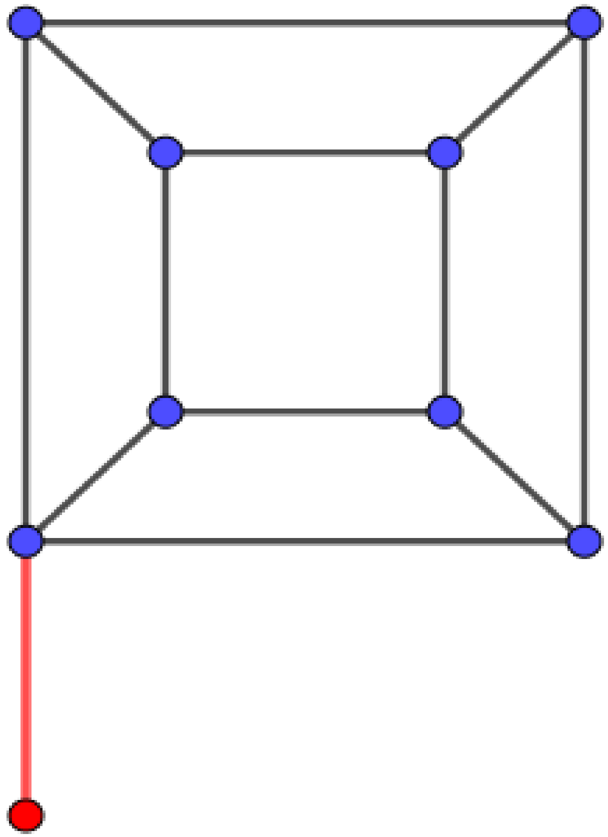
Aggiungendo un arco che congiunge due vertici già esistenti aumenta il numero delle facce

Problemi e soluzioni

La formula di Eulero

Aggiungendo un arco e un nuovo vertice non aumenta il numero delle facce

vertici	archi	facce	Formula
v	e	f	v-e+f
1	0	1	2
2	1	1	2
3	3	2	2
4	4	2	2
8	12	6	2

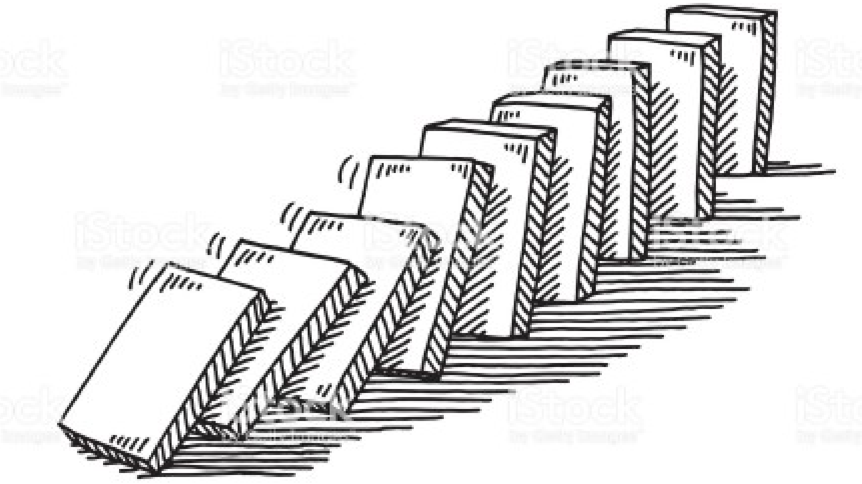


Problemi e soluzioni

La formula di Eulero

$v - e + f = 2$

Il Principio di induzione



"Se il numero 1 gode di una certa proprietà, e se si può dimostrare che se un numero *n* gode della stessa proprietà, la gode anche il suo successivo *n*+ 1, allora questa proprietà è goduta da tutti i numeri".[1]

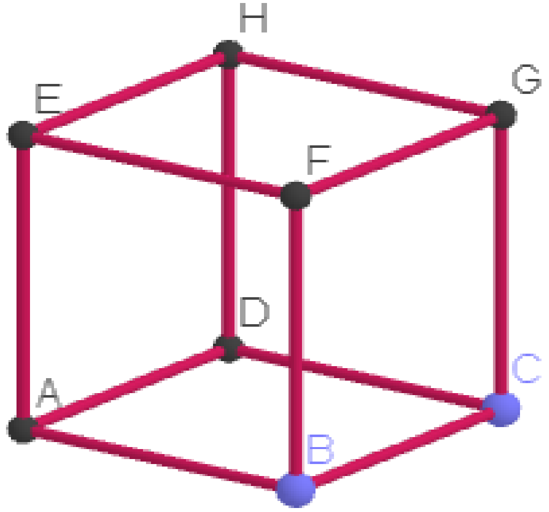
$$A(n)\, n \in N\, ;\, n \geqslant 1$$

1. controllo su $A(1)$
2. se $A(n) \Rightarrow A(n+1)$ allora $A(n)$ $\forall\, n \geqslant 1$

Problemi e soluzioni

La formula di Eulero

$v - e + f = 2$

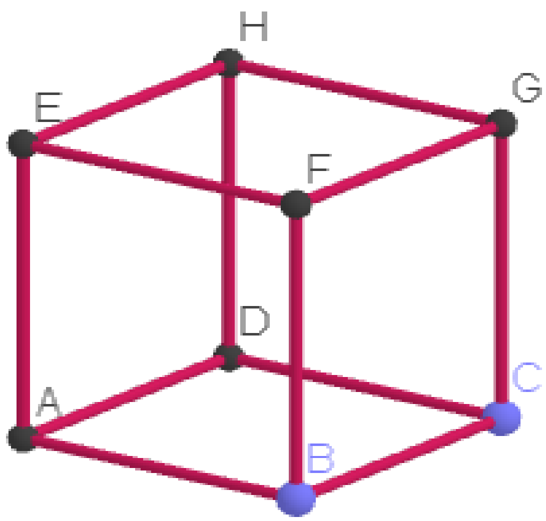


e → spigolo
f → faccia
v → vertice

Problemi e soluzioni

Poliedri e grafi

$v - e + f = 2$



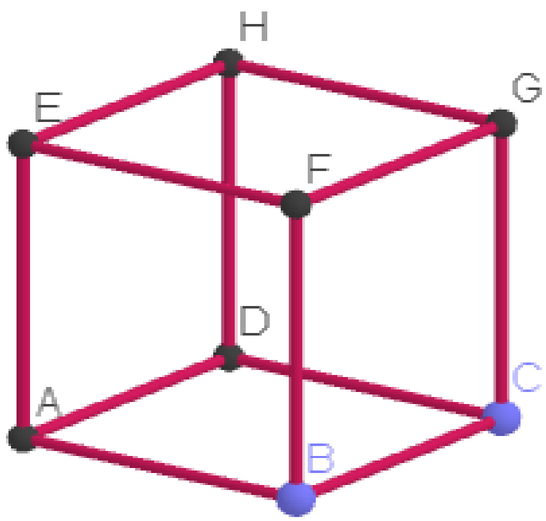
e → spigolo
f → faccia
v → vertice

E' possibile costruire un poliedro convesso che abbia tre triangoli e sei pentagoni come facce?

Problemi e soluzioni

Poliedri e grafi

$v - e + f = 2$



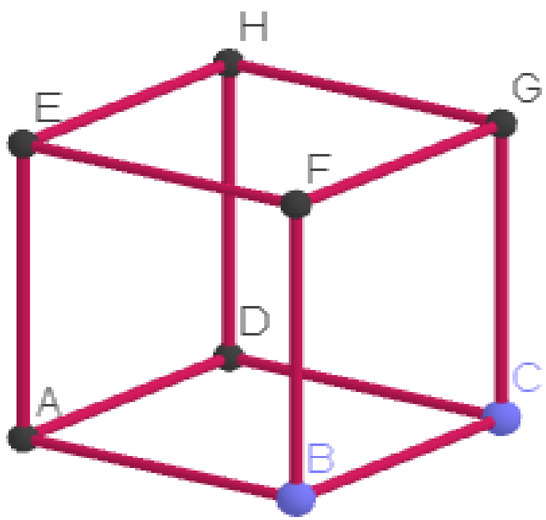
e → spigolo
f → faccia
v → vertice

E' possibile costruire un poliedro convesso che abbia tre triangoli e sei pentagoni e cinque eptagoni come facce?
In caso quanti spigoli e quanti vertici avrebbe?

Problemi e soluzioni

Poliedri e grafi

v – e + f = 2



e → spigolo
f → faccia
v → vertice

Quanti poliedri “regolari” si possono costruire?

“regolari” nel senso che
tutti i vertici hanno lo stesso grado (numero di spigoli-archi)

Problemi e soluzioni

Poliedri e grafi

v – e + f = 2

Quanti poliedri “regolari” si possono costruire a facce triangolari?

Sia k il grado di ciascun vertice.
Sia f il numero delle facce. → $e = \frac{k\,v}{2}$

Ogni faccia ha 3 lati e quindi → $e = \frac{3\,f}{2}$

Sostituendo nella formula di Eulero → $v = 2 + \frac{f}{2}$

Ricavando k in funzione di f → $k = \frac{6\,f}{4 + f}$

Problemi e soluzioni

Poliedri e grafi

v – e + f = 2

Quanti poliedri “regolari” si possono costruire a facce triangolari?

Sia k il grado di ciascun vertice.
Sia f il numero delle facce. → $e = \frac{kv}{2}$

Ogni faccia ha 3 lati e quindi → $e = \frac{3f}{2}$

Sostituendo nella formula di Eulero → $v = 2 + \frac{f}{2}$

Ricavando k in funzione di f → $k = \frac{6f}{4+f}$

f	k
3	2,571429
4	3
5	3,333333
6	3,6
7	3,818182
8	4
9	4,153846
10	4,285714
11	4,4
12	4,5
18	4,909091
19	4,956522
20	5
21	5,04