Problemi e soluzioni

Francesca Tovena Università di Roma Tor Vergata
Laura Lamberti Liceo Righi

Progetto con la mente e con le mani
Accademia dei Lincei
Polo di Roma
21 gennaio 2020

Problemi e soluzioni

1.Le partizioni e la parità con i colori

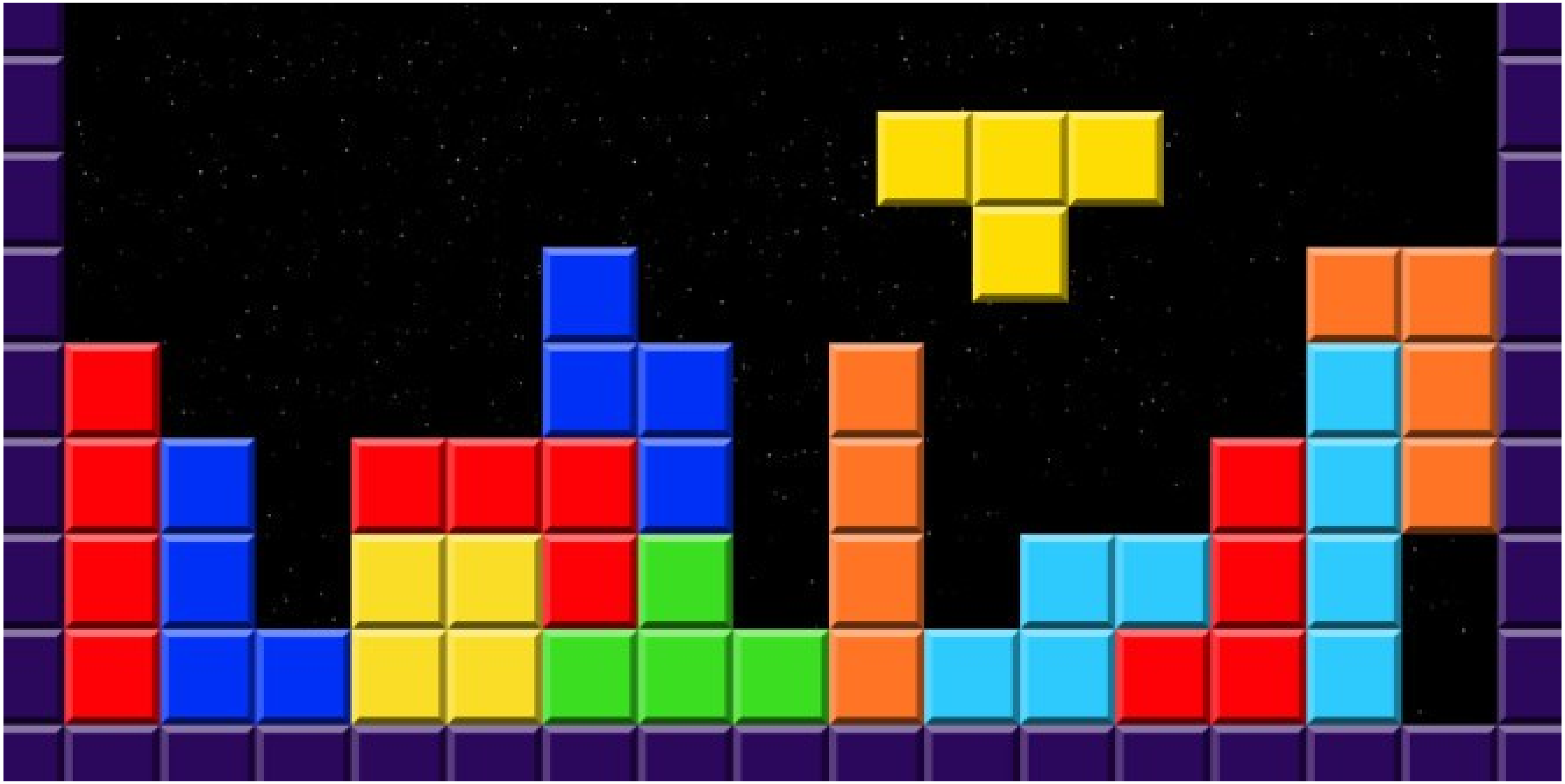
Il gioco del Tetris

1° incontro

21 gennaio 2020

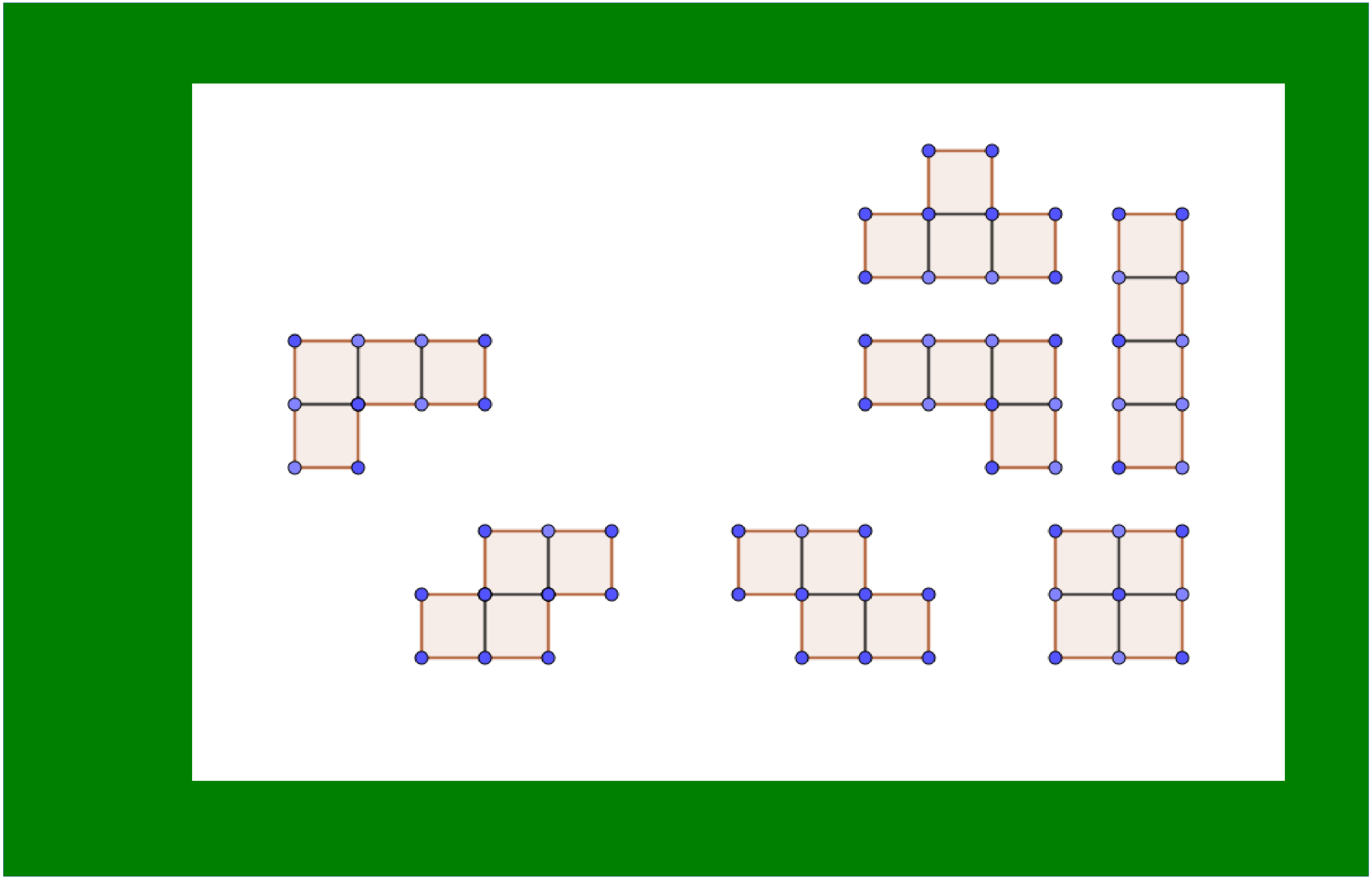
Problemi e soluzioni

Il gioco del tetris



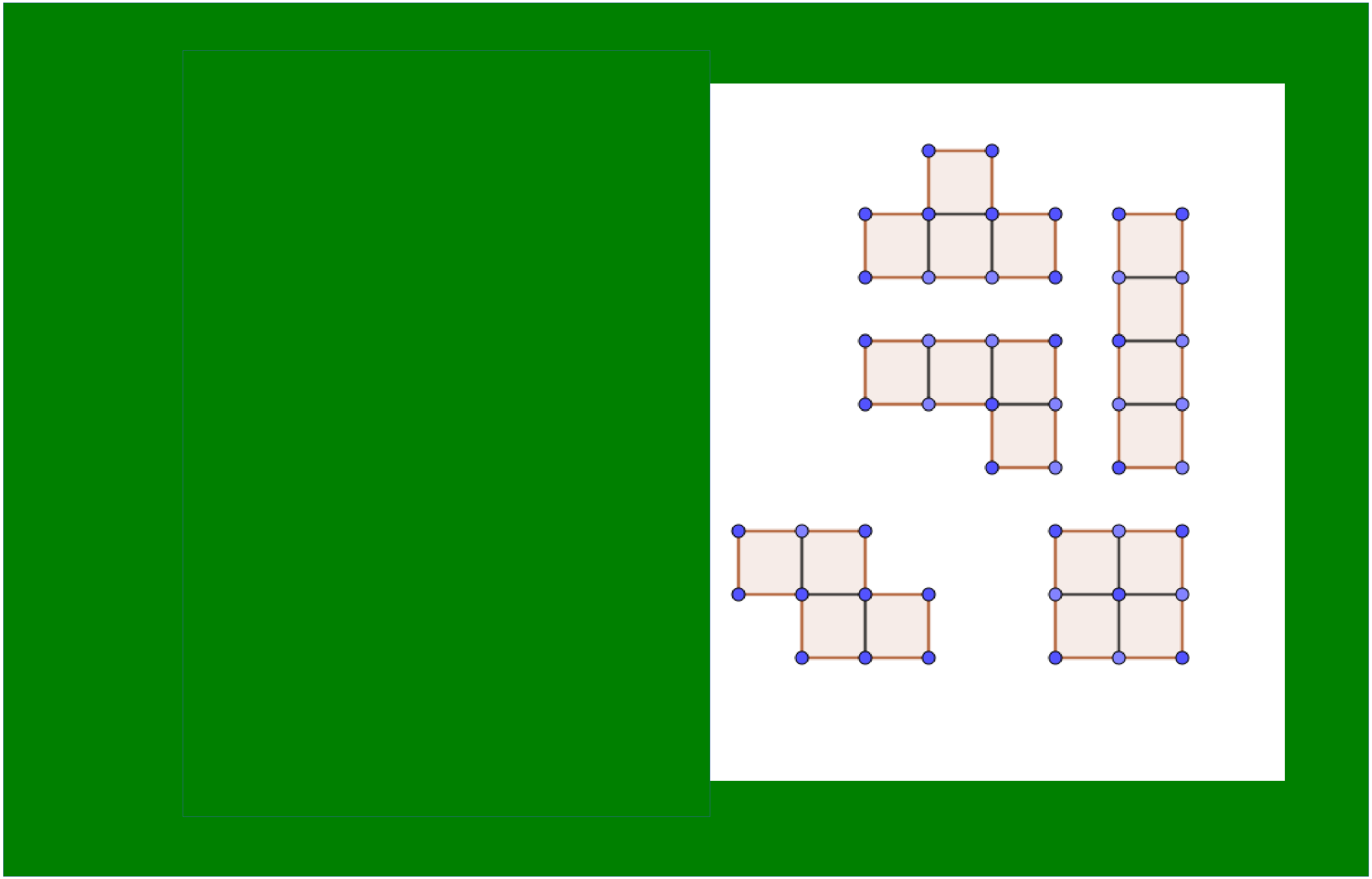
Problemi e soluzioni

Il gioco del tetris



Problemi e soluzioni

Il gioco del tetris

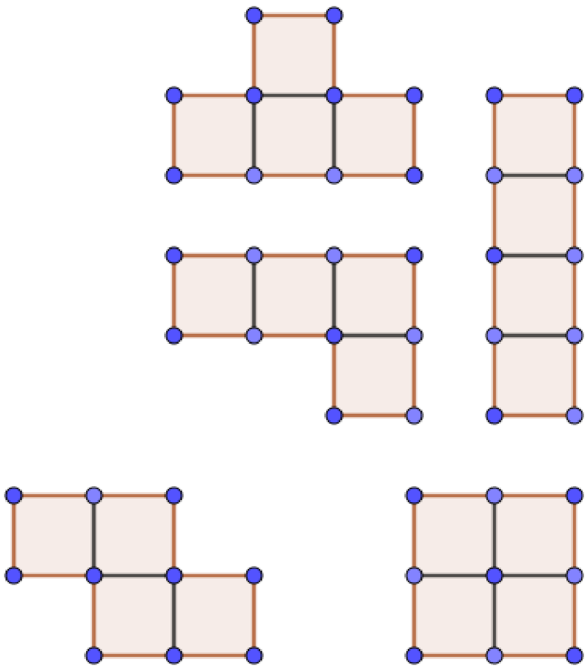


Problemi e soluzioni

Il gioco del tetris

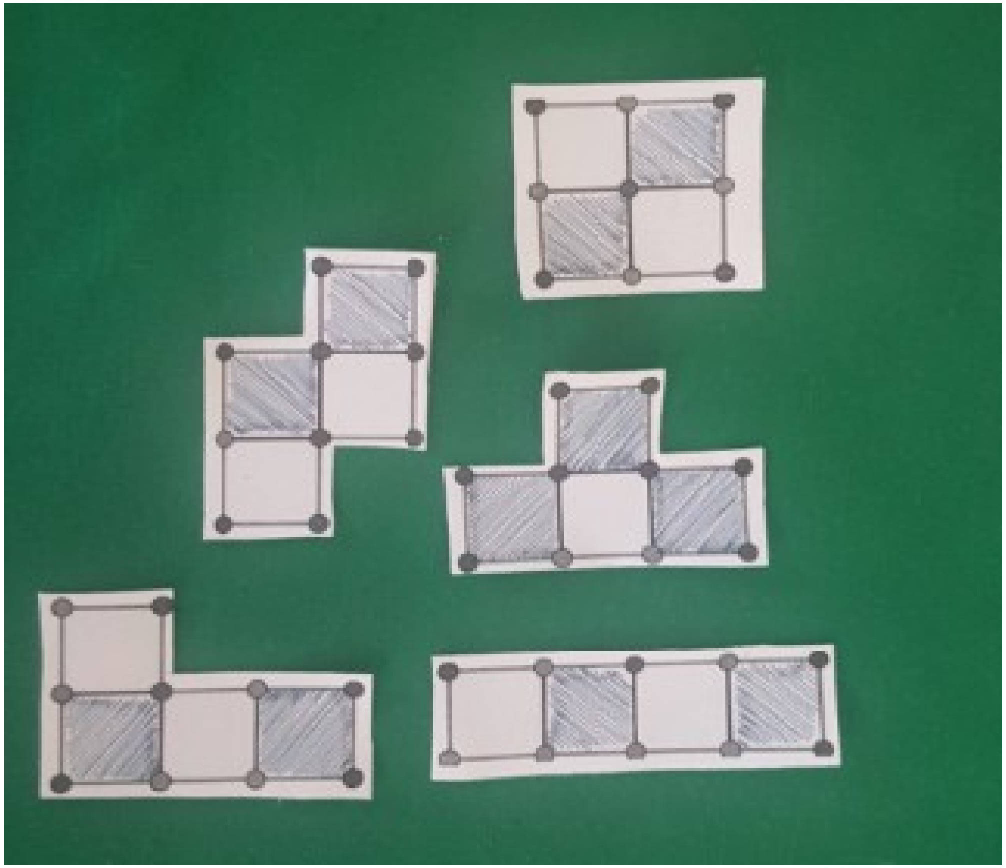
Problema:

E' possibile formare un rettangolo utilizzando i cinque tetramini ?



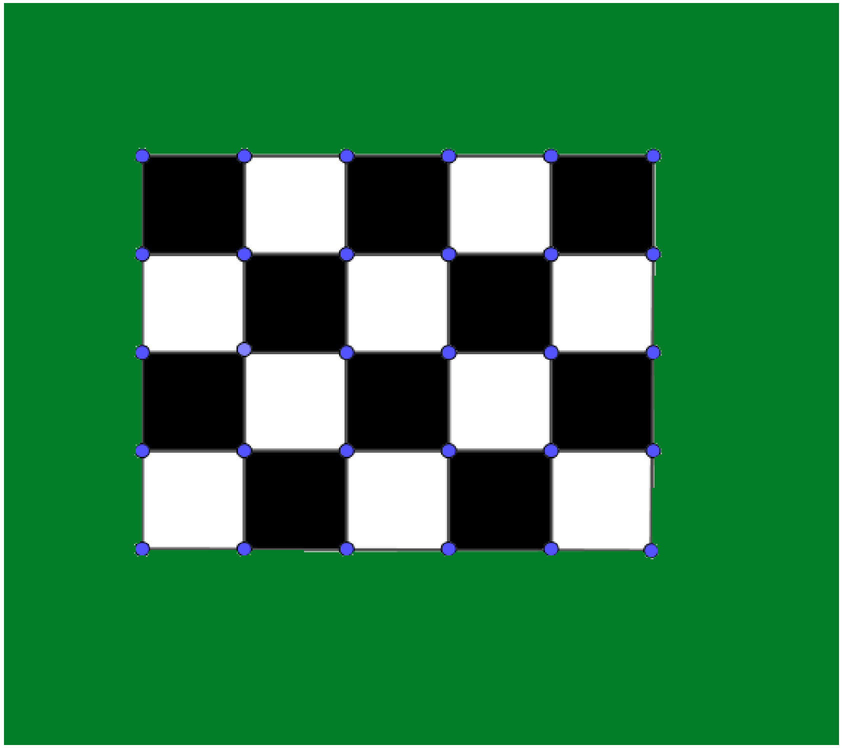
Problemi e soluzioni

Prove in classe con le mani



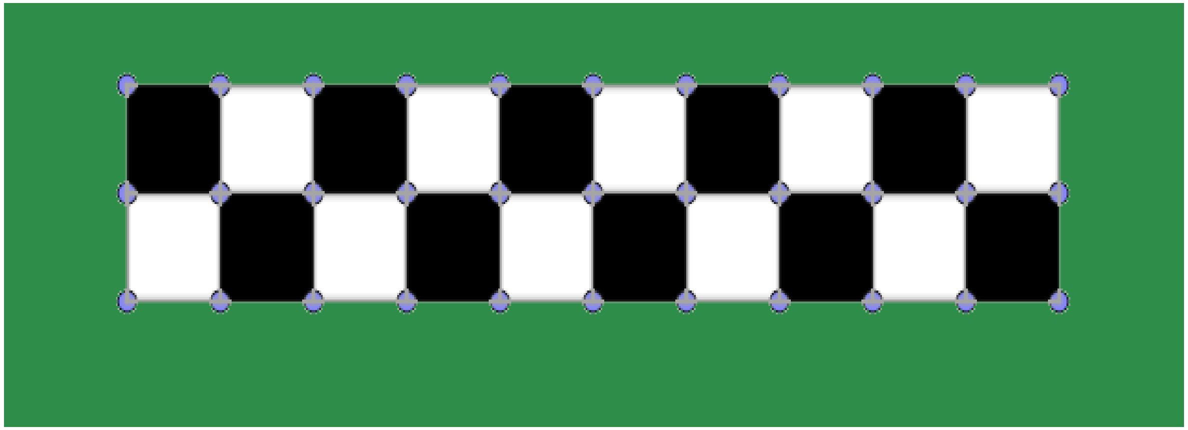
Problemi e soluzioni

Il gioco del tetris



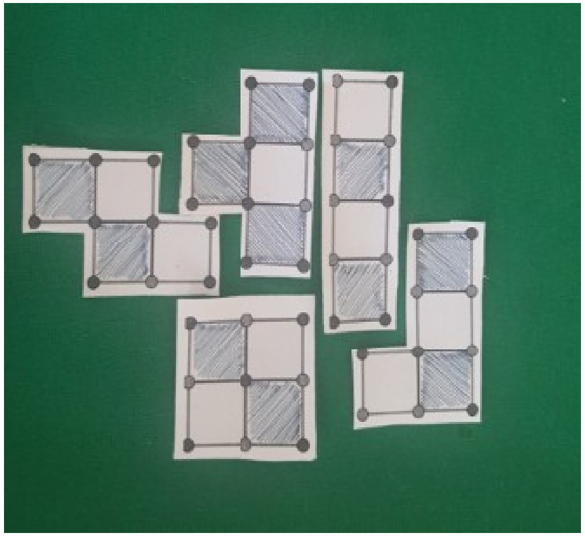
5 x 4

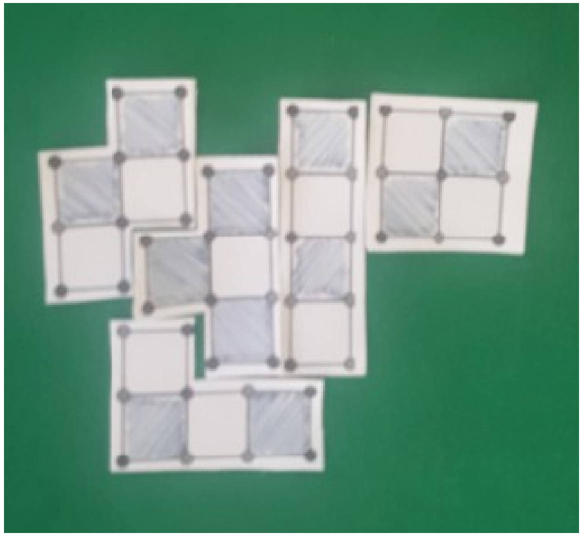
10 x 2



Problemi e soluzioni

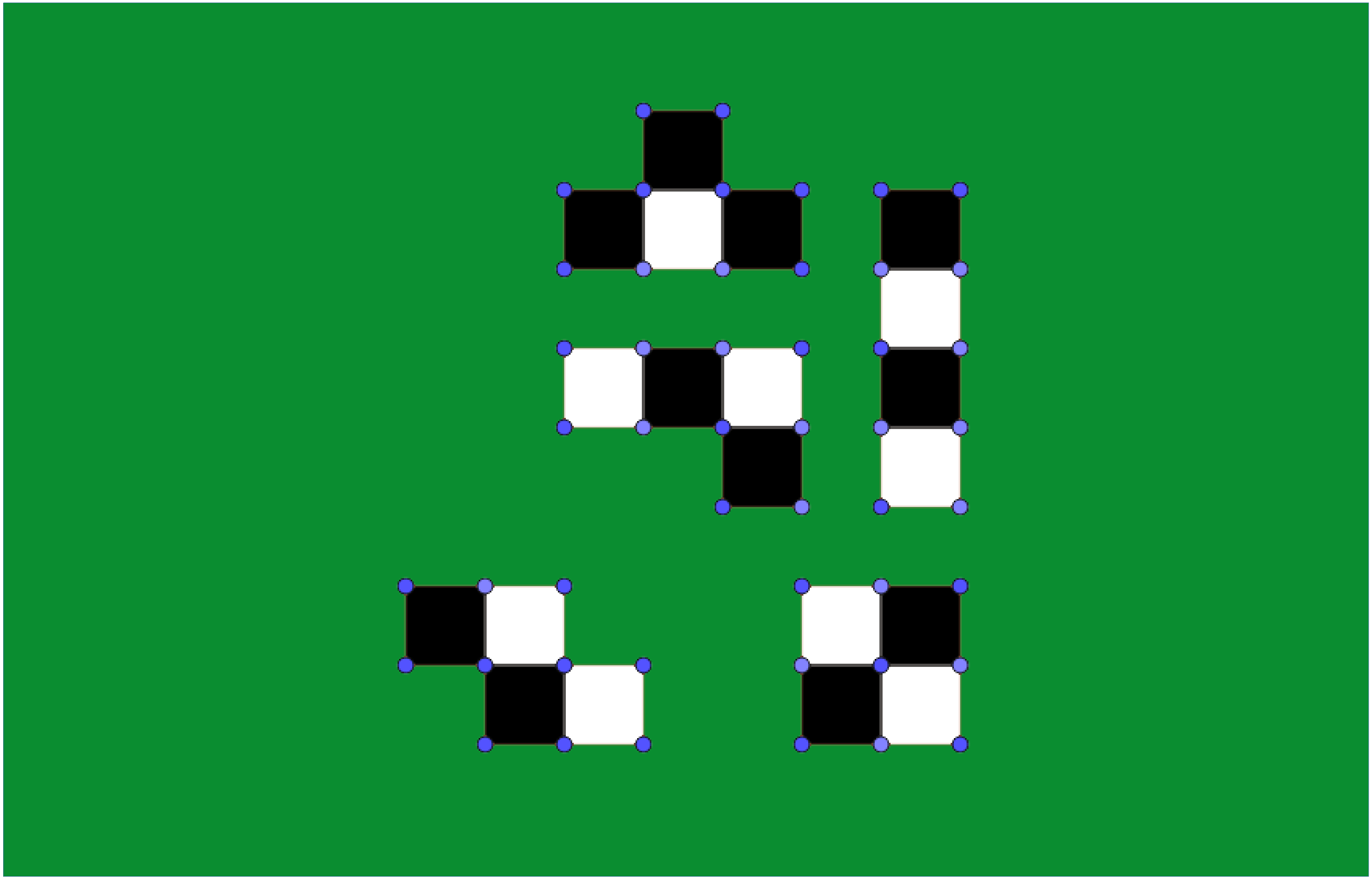
Prove di costruzione di un rettangolo con i 5 tetramini





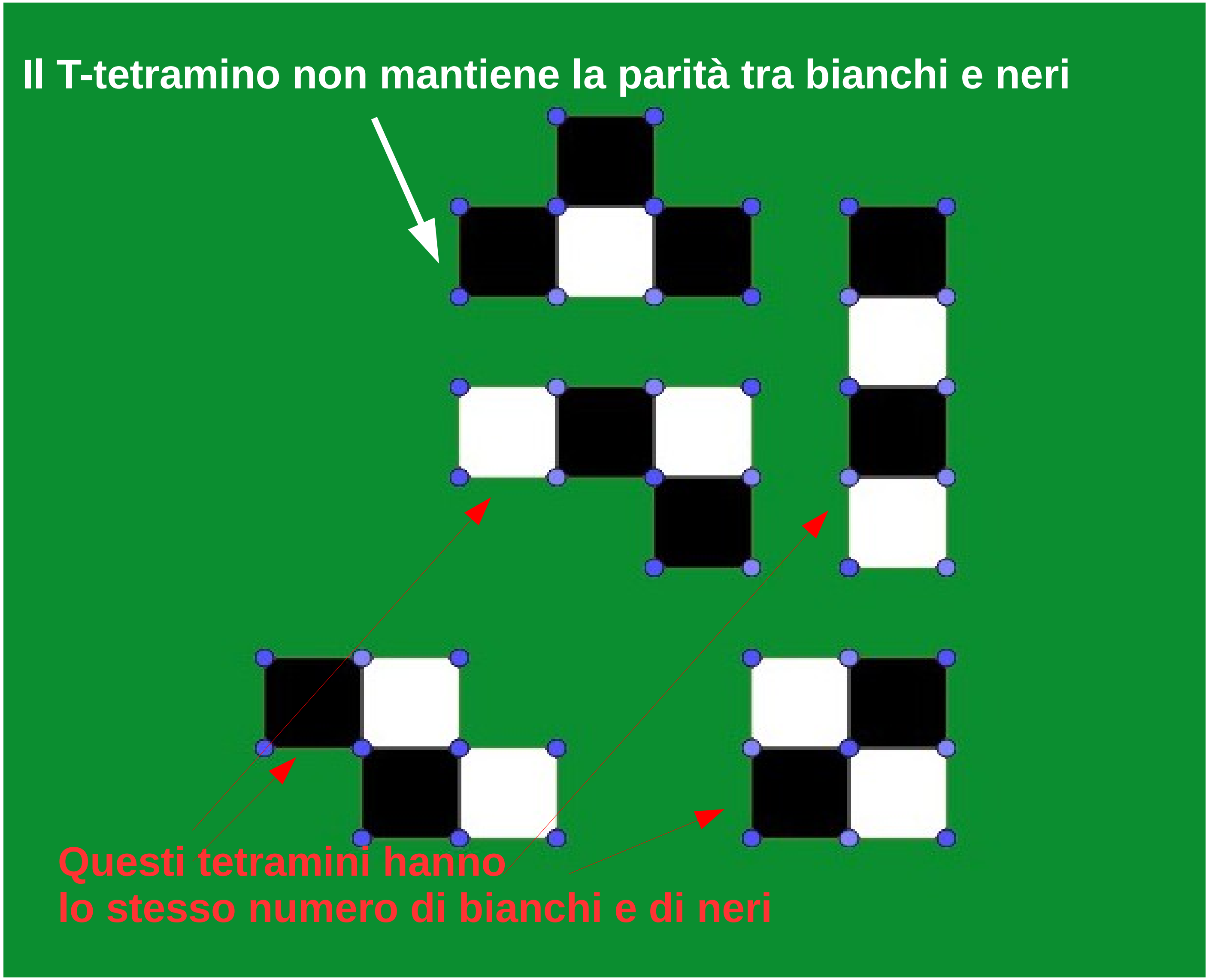
Problemi e soluzioni

Le 5 forme dei tetramini



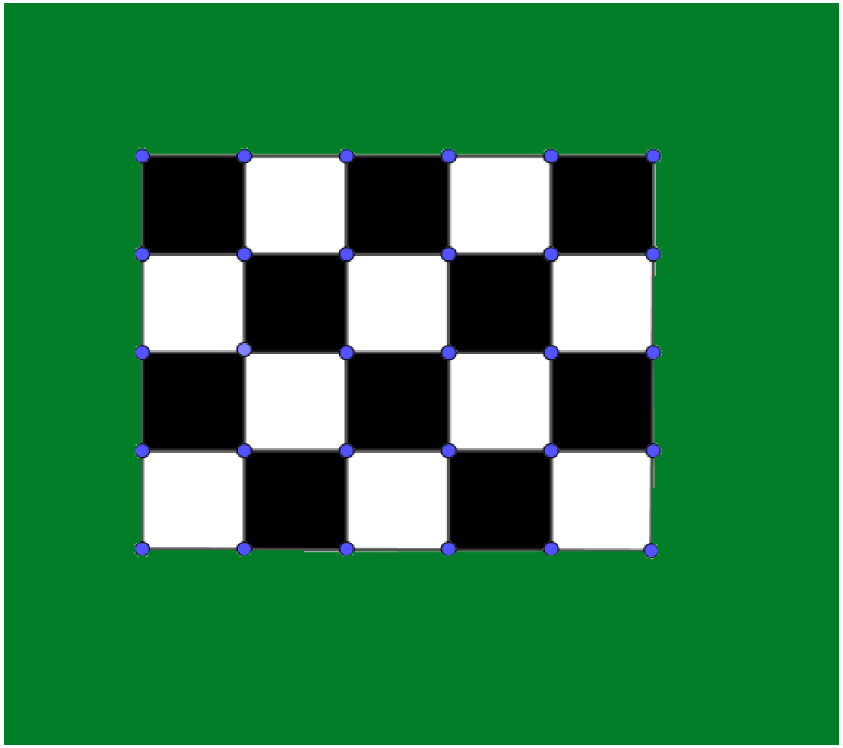
Problemi e soluzioni

Il gioco del tetris



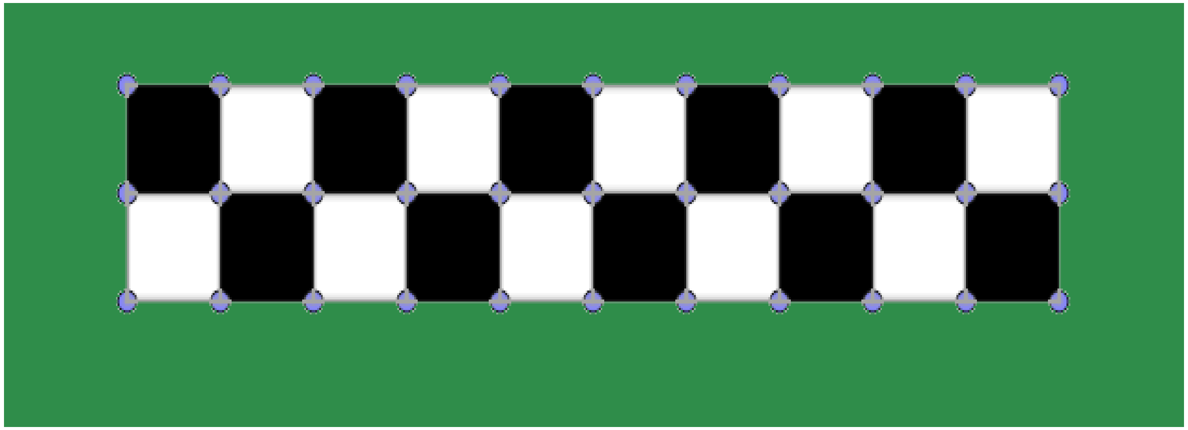
Problemi e soluzioni

Il gioco del tetris



5 x 4

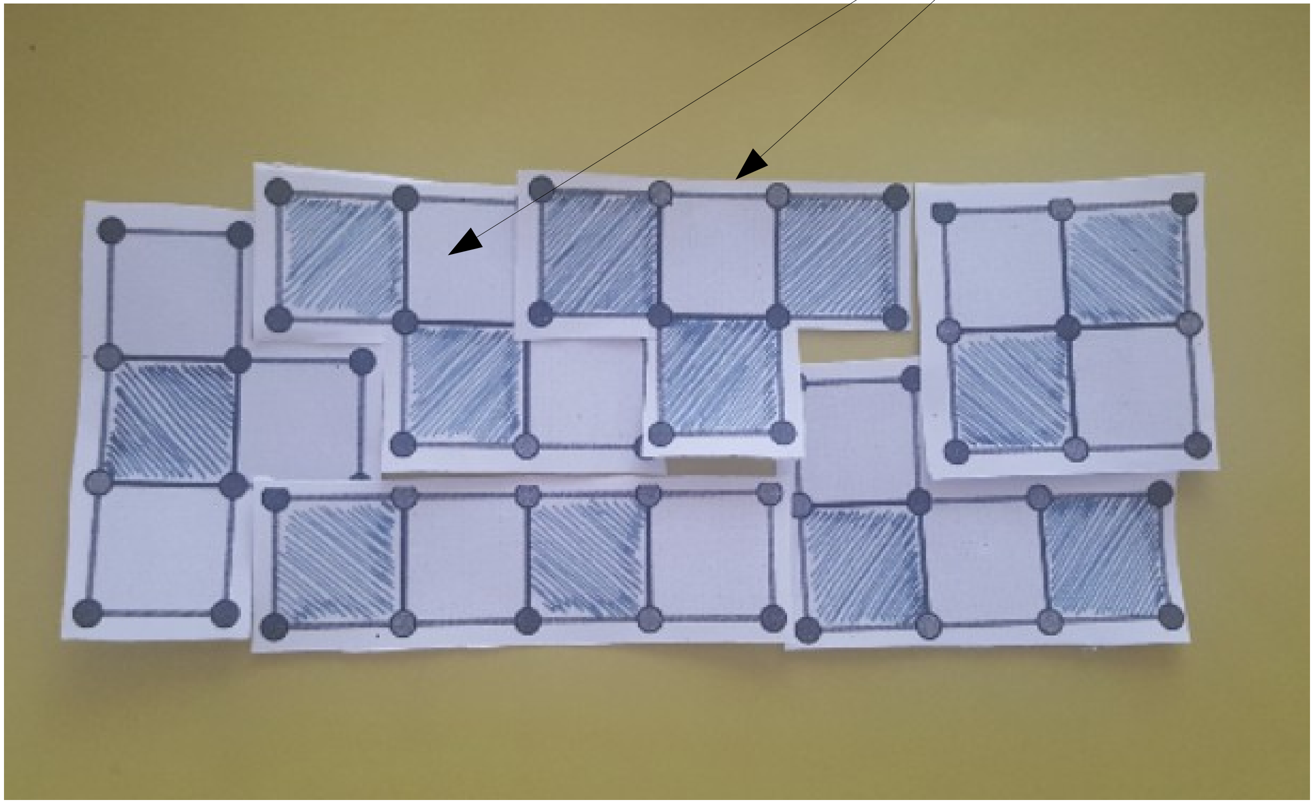
10 x 2



Problemi e soluzioni

Il gioco del tetris

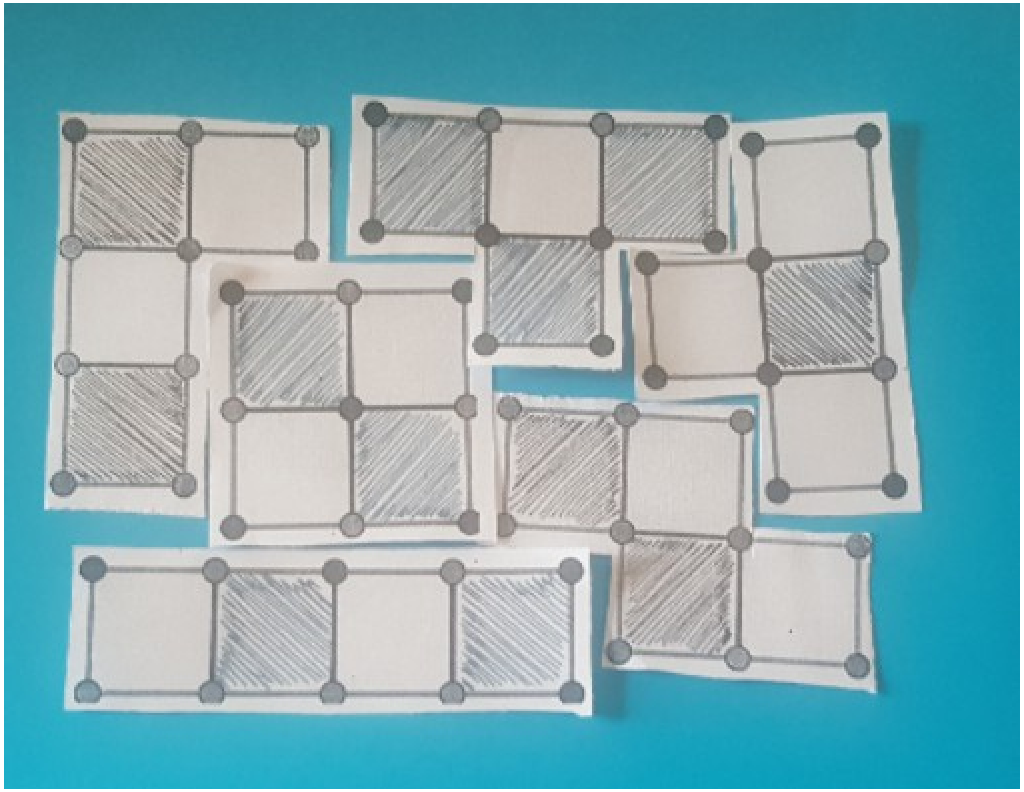
Ripristinando la parità aggiungendo un T-tetramino colorato in modo opposto
È possibile formare un rettangolo 3 x 8



Problemi e soluzioni

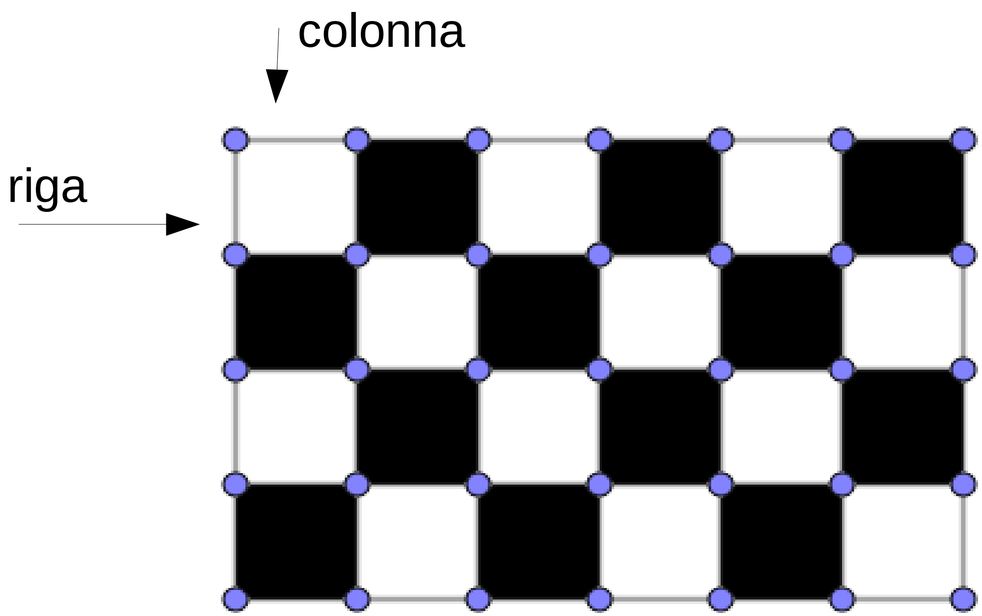
Il gioco del tetris

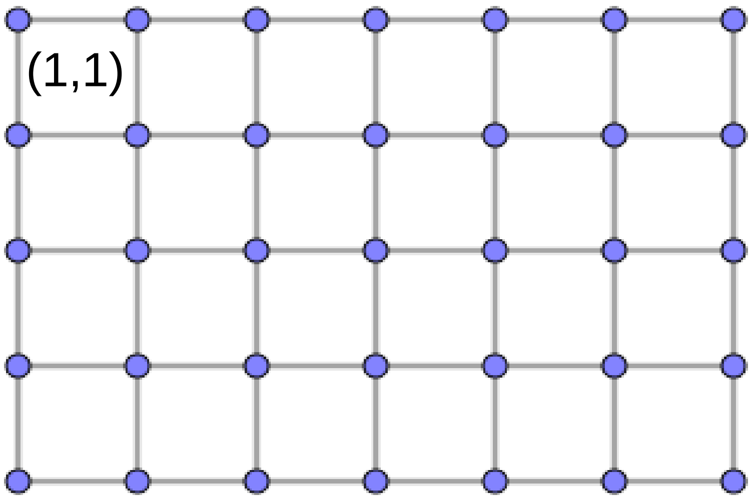
Ripristinando la parità aggiungendo un T-tetramino colorato in modo opposto
È possibile formare un rettangolo 4 x 6



Problemi e soluzioni

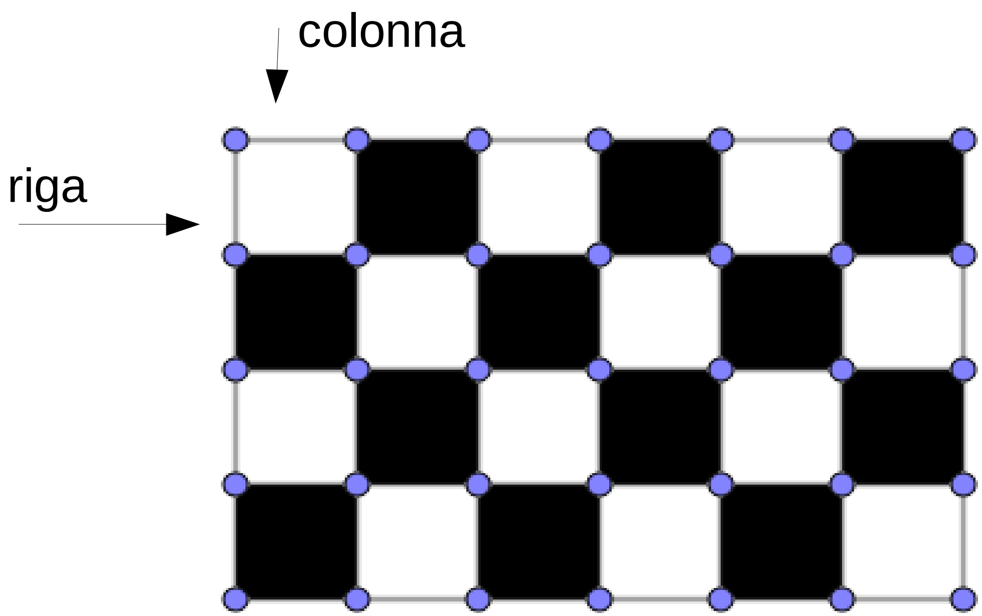
Una soluzione più classica





Problemi e soluzioni

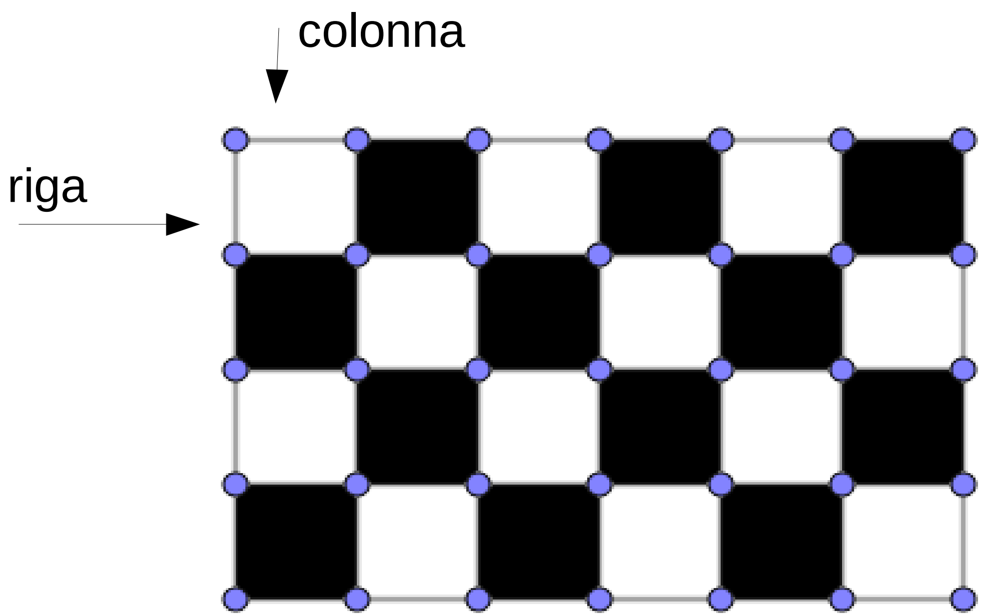
Una soluzione più classica



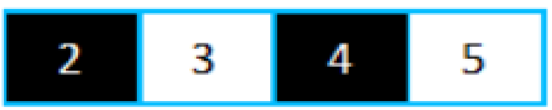
2	3	4	5	6	7
3	4	5	6	7	8
4	5	6	7	8	9
5	6	7	8	9	10

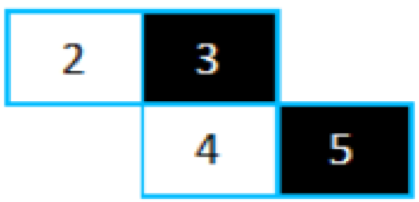
Problemi e soluzioni

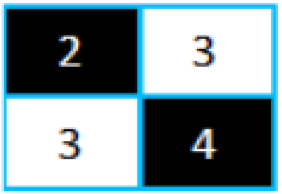
Una soluzione più classica

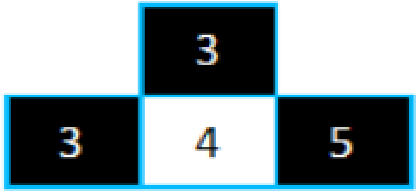


2	3	4	5	6	7
3	4	5	6	7	8
4	5	6	7	8	9
5	6	7	8	9	10



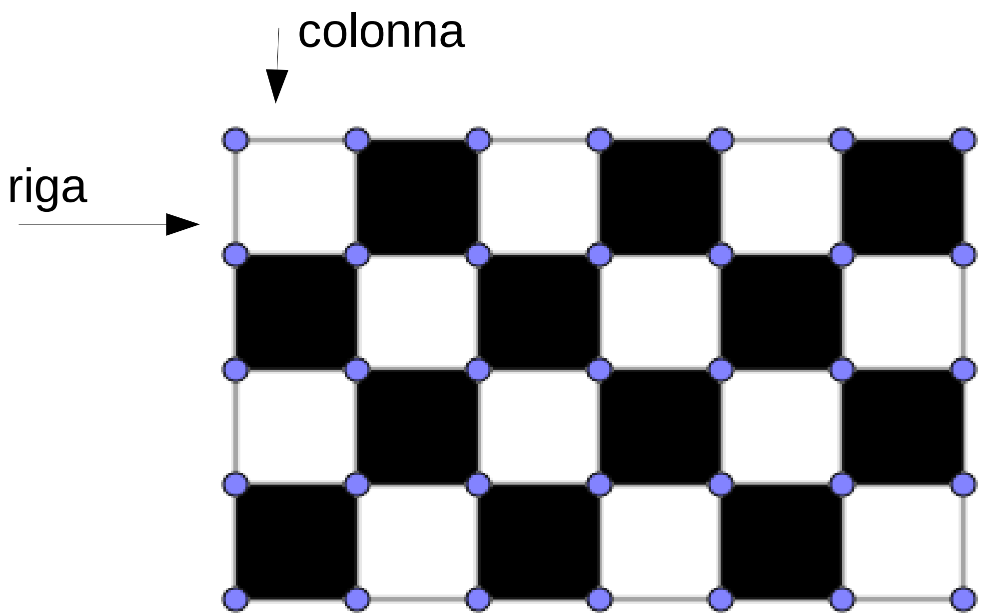




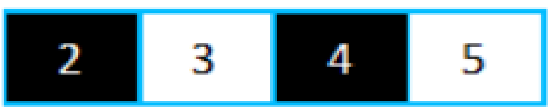


Problemi e soluzioni

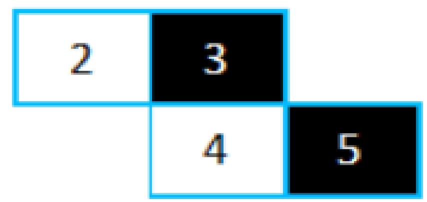
Una soluzione più classica



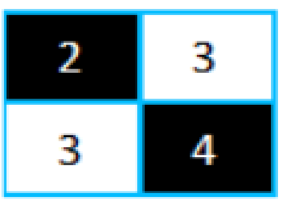
2	3	4	5	6	7
3	4	5	6	7	8
4	5	6	7	8	9
5	6	7	8	9	10



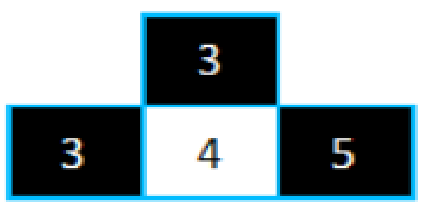
14



14



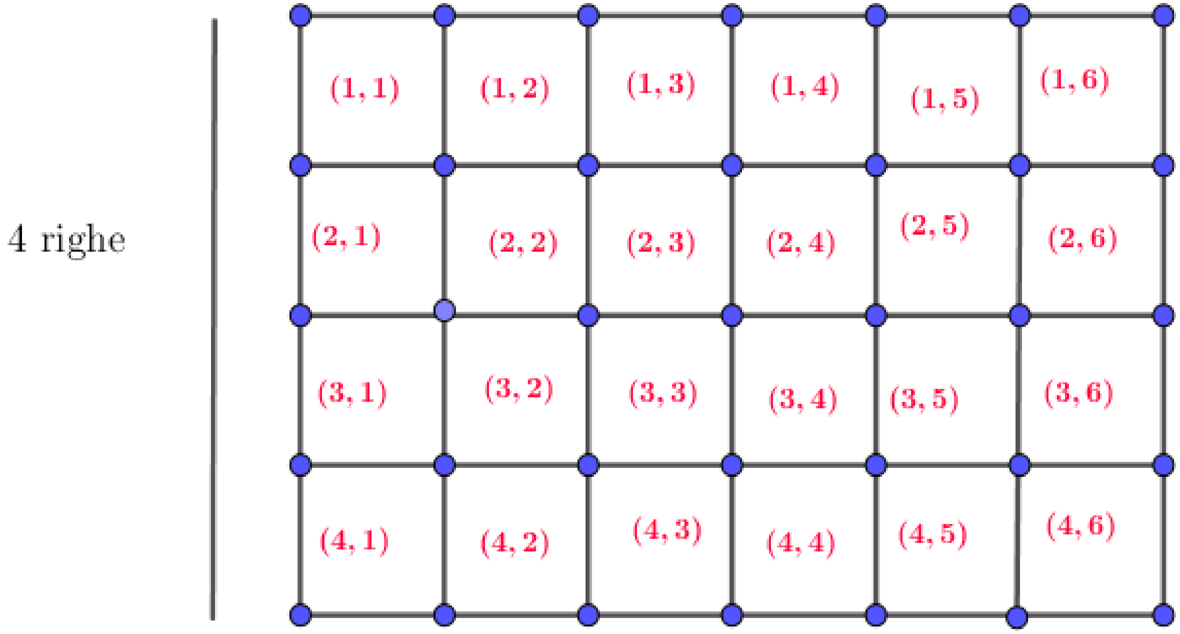
12



15

Problemi e soluzioni

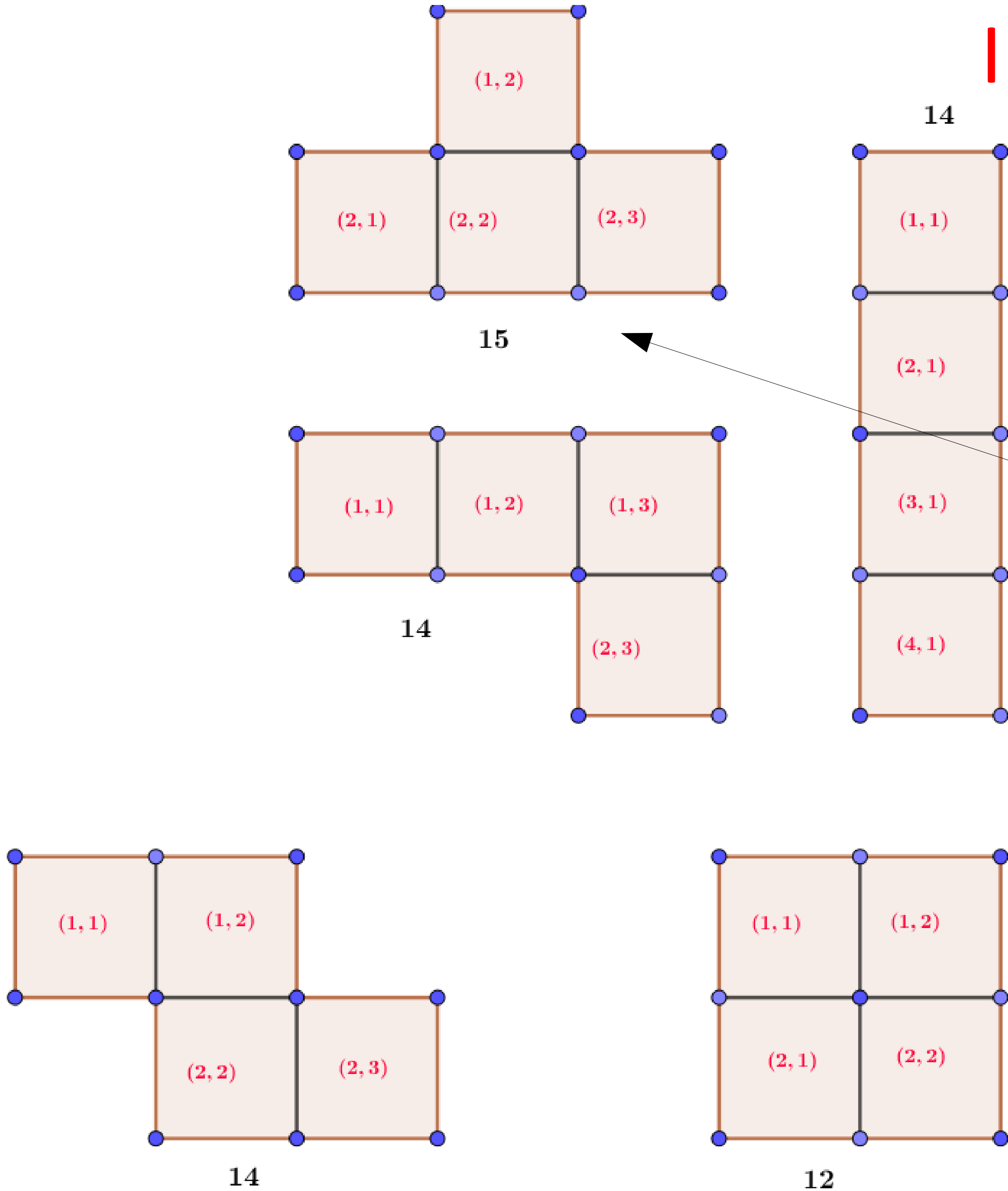
Il gioco del tetris



Somma totale $= 21 \cdot 4 + 6 \cdot (1 + 2 + 3 + 4) = 21 \cdot 4 + 6 \cdot 10 = 144$

Problemi e soluzioni

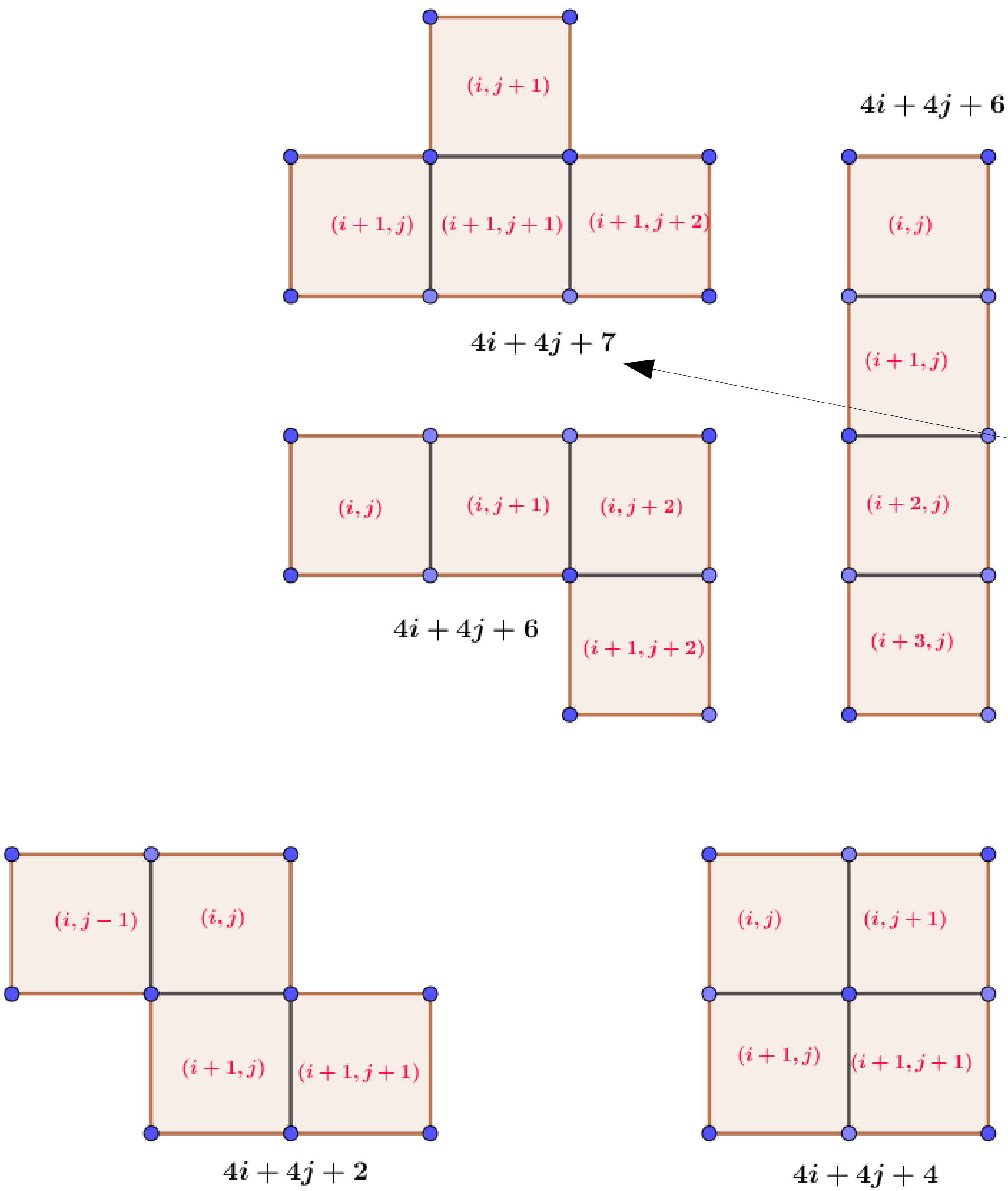
Il gioco del tetris



Solo il T tetramino
ha somma degli indici
dei quadretti
dispari

Problemi e soluzioni

Il gioco del tetris

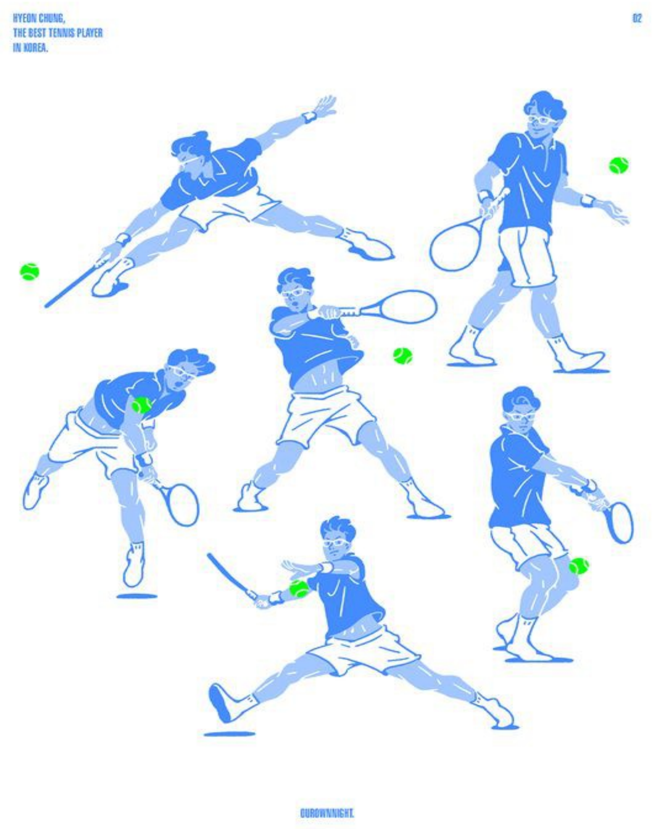


Solo il T tetramino
ha somma degli indici
dei quadretti
dispari

Problemi e soluzioni

Un problema simile…

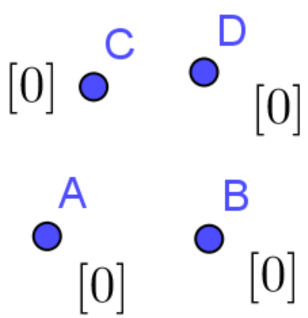
127 persone partecipano ad un torneo di tennis. **Dimostra** che alla fine del torneo il numero di persone che ha giocato un numero dispari di partite è pari.



Problemi e soluzioni

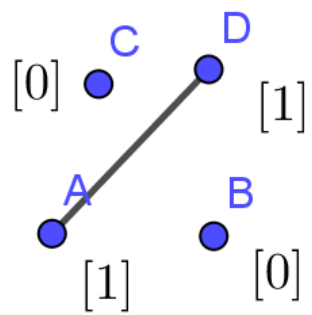
Un problema simile...

127 persone partecipano ad un torneo di tennis.
Dimostra che alla fine del torneo il numero di persone che ha giocato un numero dispari di partite è pari.



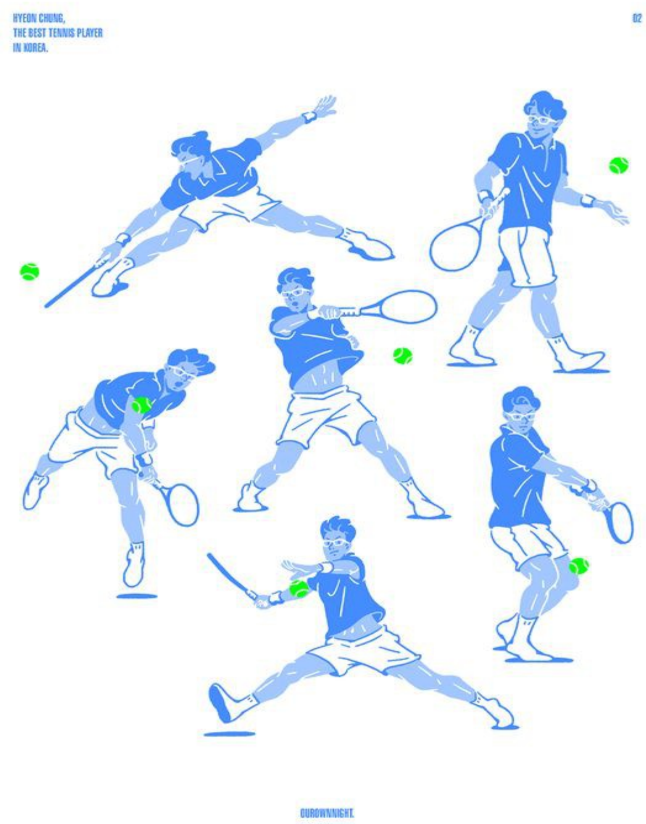
g(A)=[0]
g(B)=[0]
g(C)=[0]
g(D)=[0]

g_t=[0]



g(A)=[1]
g(B)=[0]
g(C)=[0]
g(D)=[1]

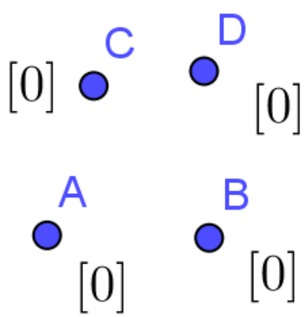
g_t=[2]



Problemi e soluzioni

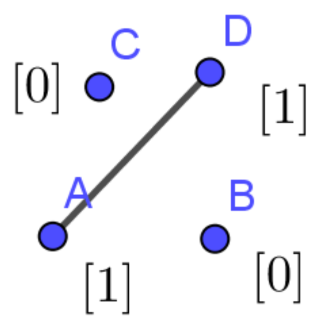
Un problema simile...

127 persone partecipano ad un torneo di tennis.
Dimostra che alla fine del torneo il numero di persone che ha giocato un numero dispari di partite è pari.



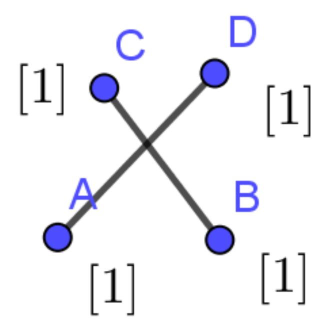
g(A)=[0]
g(B)=[0]
g(C)=[0]
g(D)=[0]

g_t=[0]



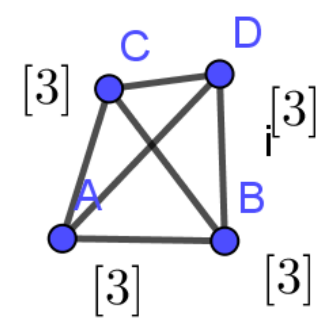
g(A)=[1]
g(B)=[0]
g(C)=[0]
g(D)=[1]

g_t=[2]



g(A)=[1]
g(B)=[1]
g(C)=[1]
g(D)=[1]

g_t=[4]



g(A)=[3]
g(B)=[3]
g(C)=[3]
g(D)=[3]

g_t=[12]

Il numero totale delle partite giocate da tutti i giocatori è uguale alla somma dei gradi di ciascun nodo
Mentre le partite giocate, cioè il numero degli archi è la metà

$$\sum [v_i] = 2 \sum e_i$$

Problemi e soluzioni

Un problema simile...

127 persone partecipano ad un torneo di tennis.
Dimostra che alla fine del torneo il numero di persone che ha giocato un numero dispari di partite è pari.

Sia g(i) numero di partite giocate dal giocatore i.
Se non vengono giocate partite nel torneo allora g(i)=0 per ogni i.

Per ogni partita giocata invece il numero di partite giocate da tutti i partecipanti al torneo aumenta di 2 perché ogni partita tra A e B fa crescere di 1 sia g(A) sia g(B).

La somma di g(i) è formata da un numero dispari di addendi
E può soltanto essere un numero pari per le considerazioni precedenti.

Dato che i partecipanti al torneo sono dispari il numero di addendi dispari deve essere pari.

Problemi e soluzioni

Un problema simile...

Scrivi la formula che restituisce la somma dei primi *n* numeri naturali.

Problemi e soluzioni

Un problema simile...

Scrivi la formula che restituisce la somma dei primi 20 numeri naturali.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
20	19	18	17	16	15	14	13	12	11

21	21	21	21	21	21	21	21	21	21	210

Scrivi la formula che restituisce la somma dei primi 19 numeri naturali.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
19	18	17	16	15	14	13	12	11	10

19	19	19	19	19	19	19	19	19	19	190

Problemi e soluzioni

Un problema simile...

Scrivi la formula che restituisce la somma dei primi n numeri naturali.

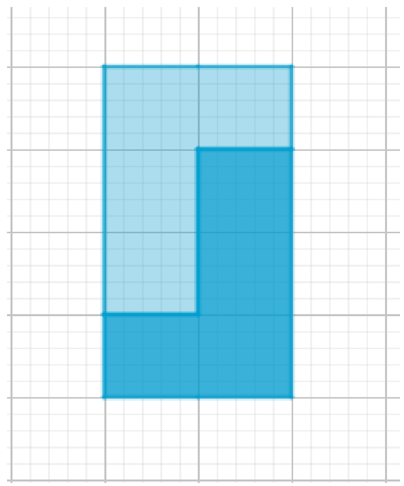
$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

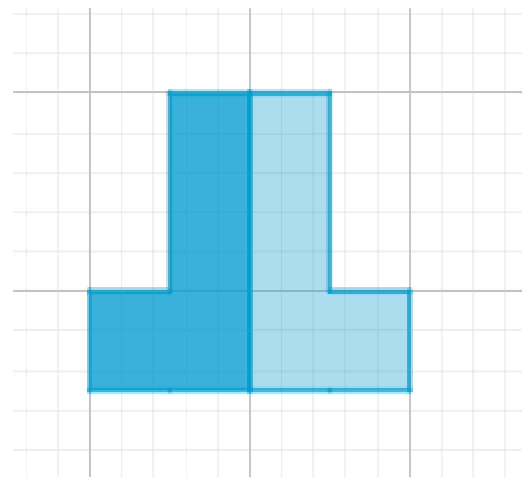
1	2	3	4	5	6	7	8	...	n/2
20	19	18	17	16	15	14	13	...	n/2+1

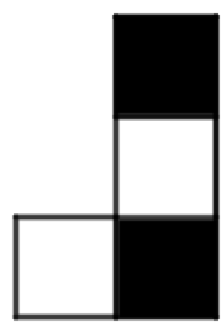
n+1	n+1	n+1	n+1	n+1	n+1	n+1	n+1	n+1	n+1	n(n+1)/2

Problemi e soluzioni

Quadrati con L-tetramini



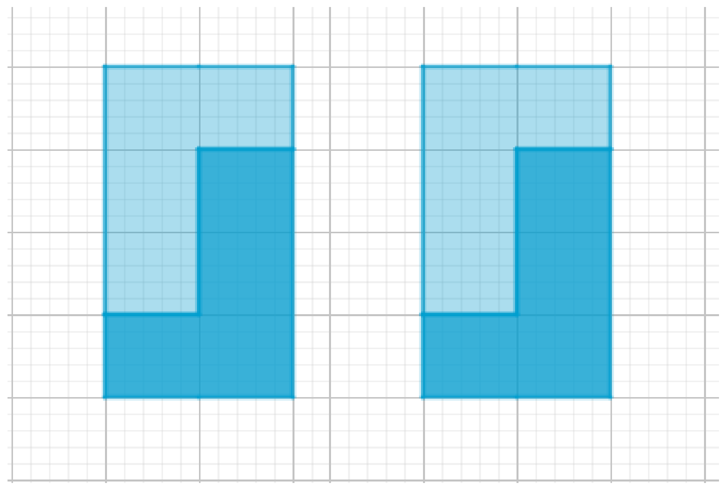


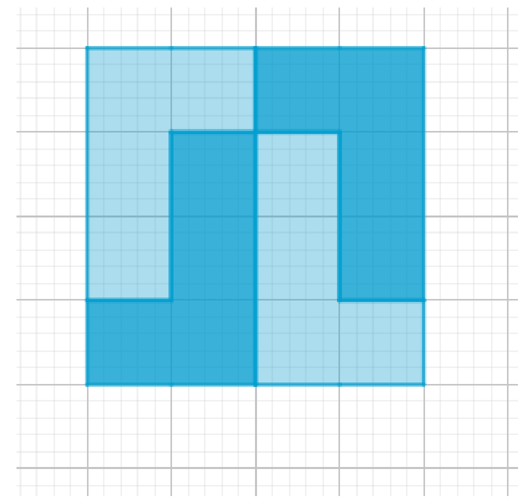


Accoppiando due L-tetramini otteniamo un rettangolo per cui la somma totale degli indici
Dei quadretti è un multiplo di quattro..... n^2 (n+ 1) multiplo di 4

Problemi e soluzioni

Quadrati con L-tetramini

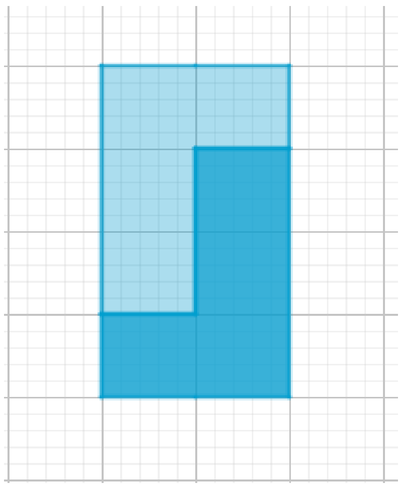


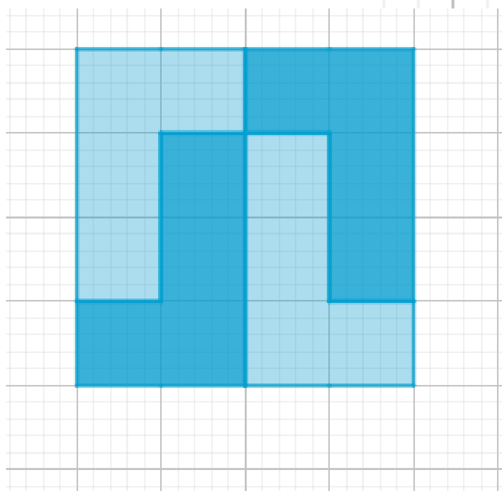


Quadrato 4x4

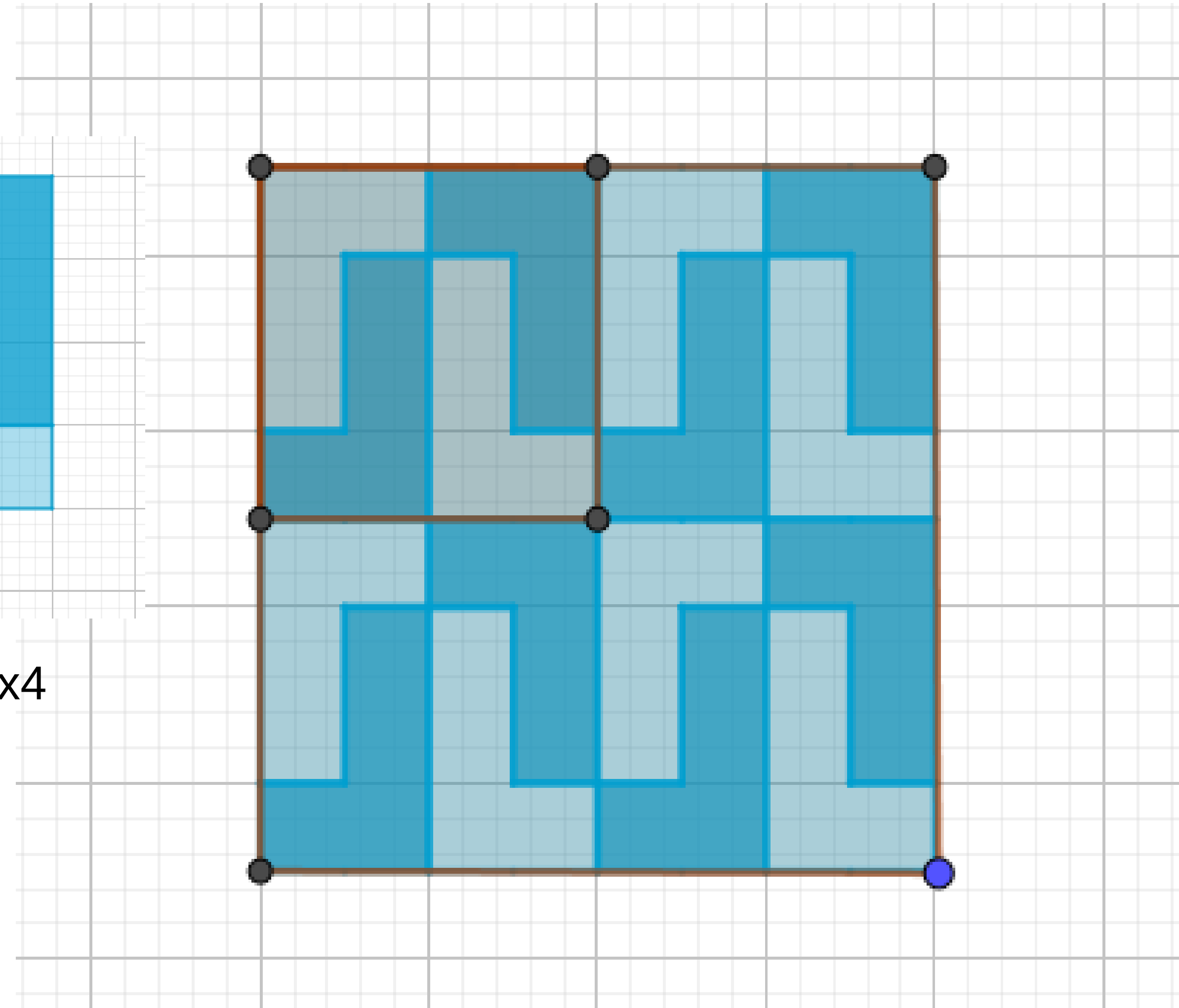
Problemi e soluzioni

Quadrati con L-tetramini





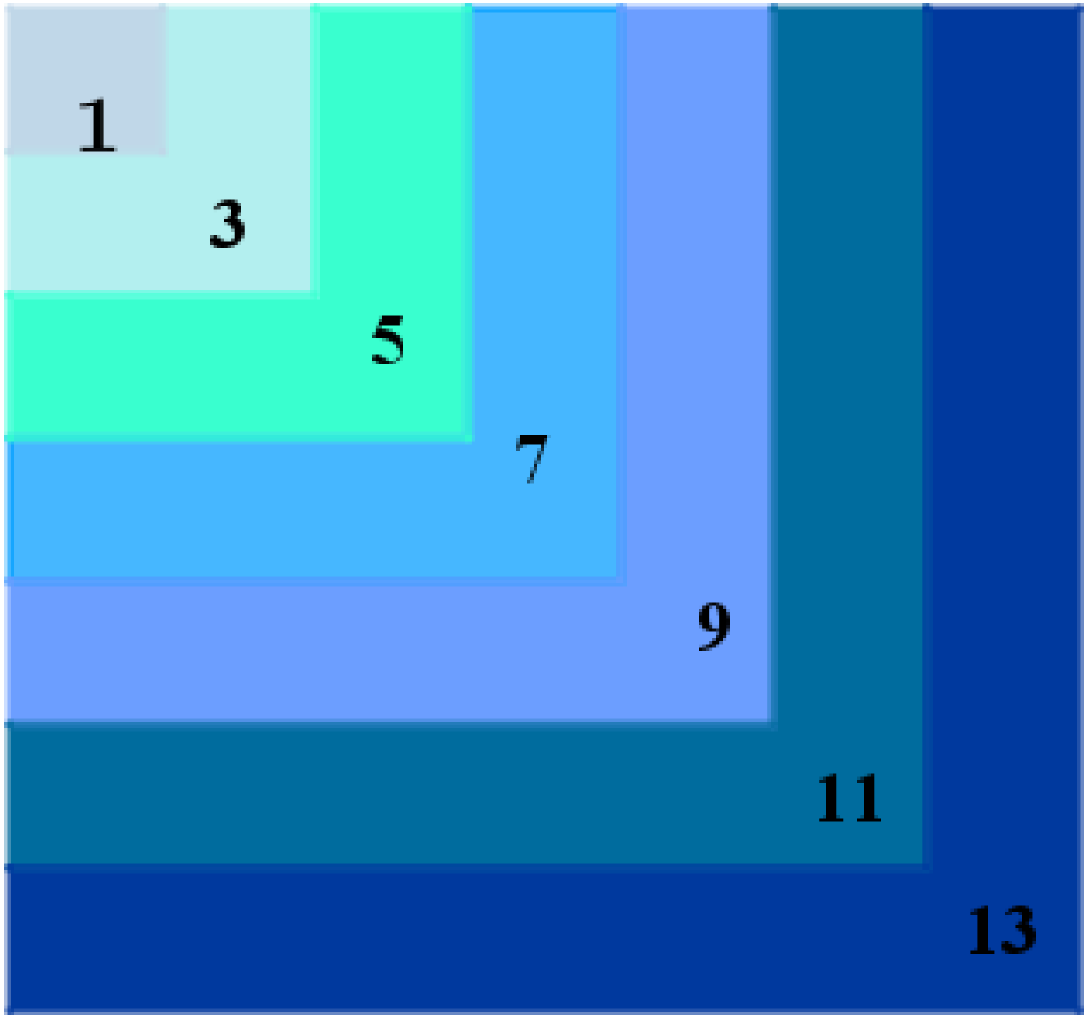
Quadrato 4x4



Quadrato 8x8

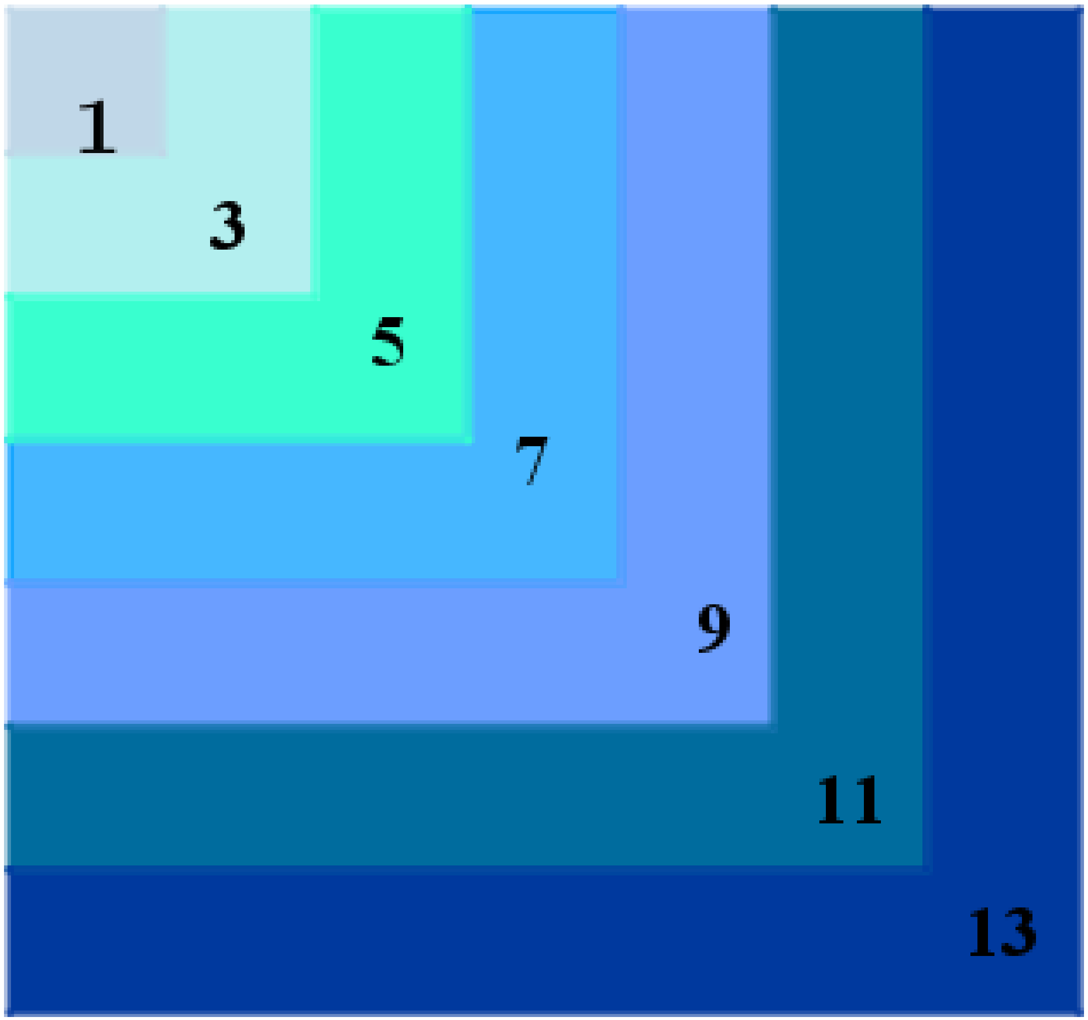
Problemi e soluzioni

La somma dei primi n numeri dispari



Problemi e soluzioni

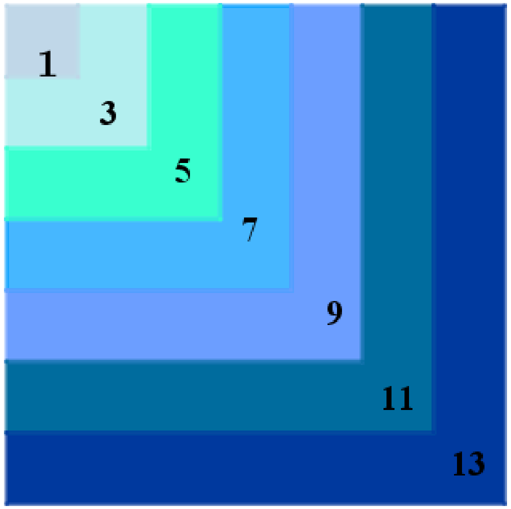
La somma dei primi n numeri dispari



Lato del quadrato grande	*Area totale*	*Numero Quadratini aggiunti*	*Somma parziale*
1	1	1	1
2	4	3	4
3	9	5	9
4	16	7	16
5	25	9	25

Problemi e soluzioni

La somma dei primi n numeri dispari



Le scacchiere che si possono ricoprire con L-tetramini hanno i lati multipli di 4.

Inoltre, partendo dal primo quadrato di dimensioni 4 x 4 , gli altri quadrati si ottengono aggiungendo altri quadratini intorno al quadrato precedente.
Dalla figura in cui sono rappresentati i quadrati si osserva che i numeri di quadratini da aggiungere ogni volta è uguale ai numeri dispari consecutivi.

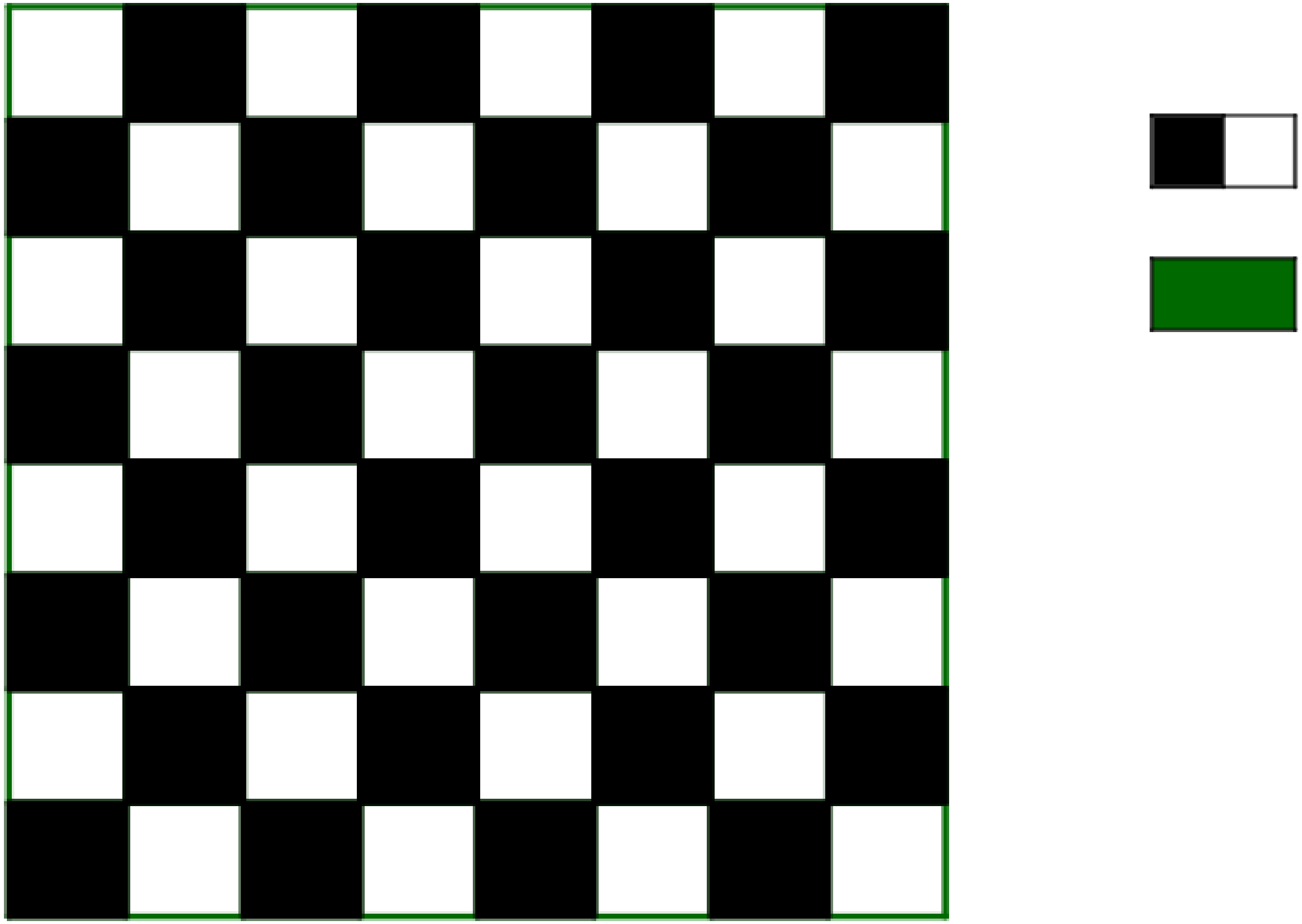
Pertanto la somma dei primi n numeri dispari è n^2

$$\sum_{k=0}^{k=n} (2k+1) = n^2$$

Problemi e soluzioni

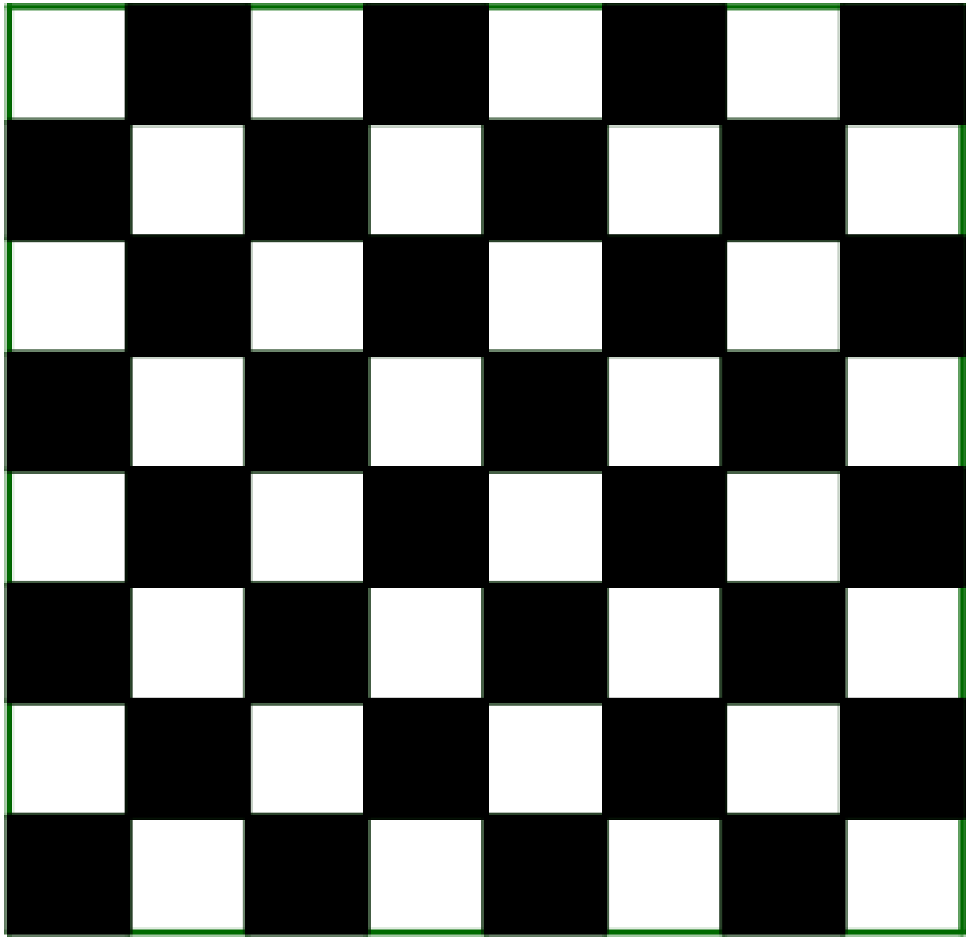
La scacchiera

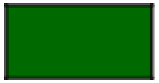
E' naturalmente possibile ricoprire una scacchiera 8 x 8 con le tessere del domino



Il professor Fisher nel 1961 risolse il problema per una scacchiera 8 x 8
come quella rappresentata in figura,
trovando che questa poteva essere ricoperta da tessere del domino in

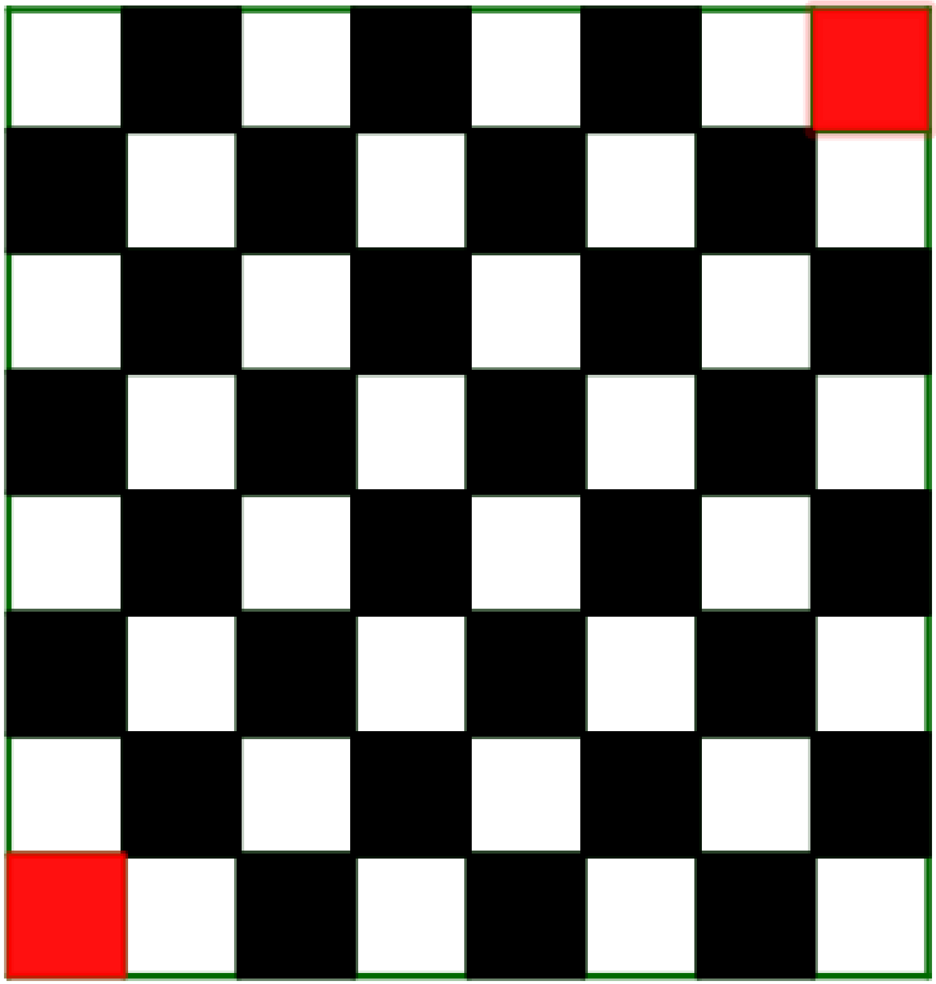
$$2^4 \times 901^2 = 12{,}988{,}816$$ modi

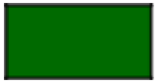


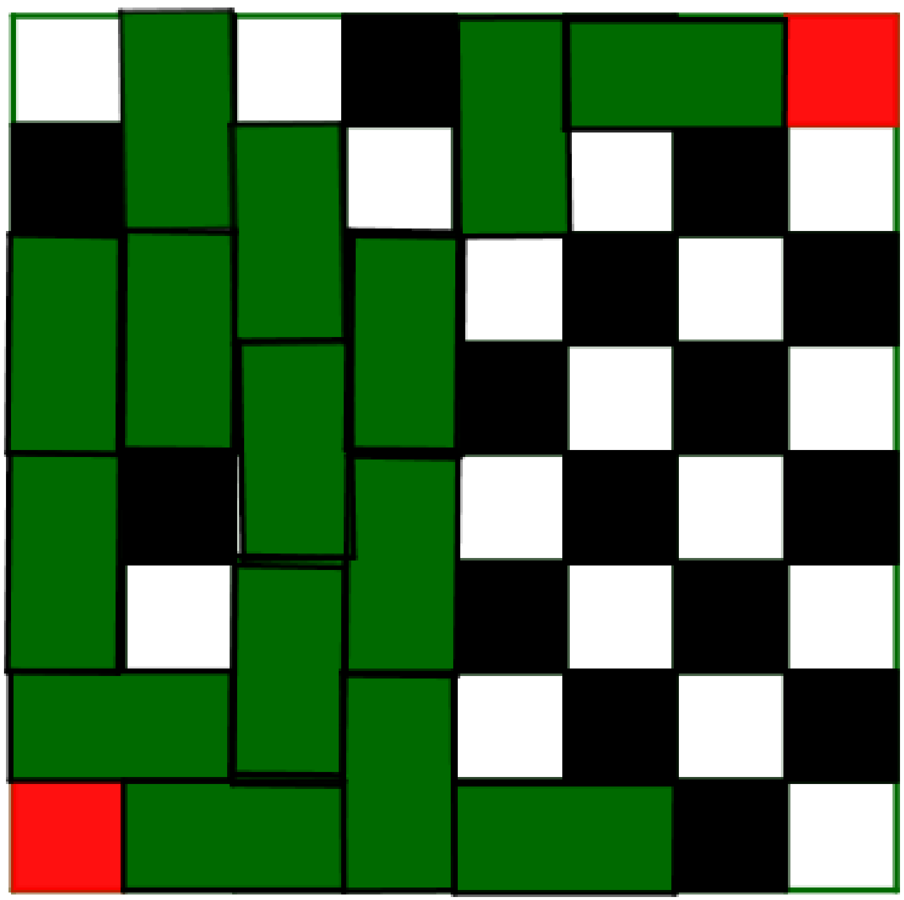


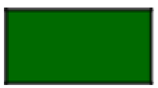
32 bianchi e 32 neri

Problema: E' possibile ricoprire una scacchiera 8 x 8
a cui sono stati tolti i due quadretti diagonalmente opposti ?

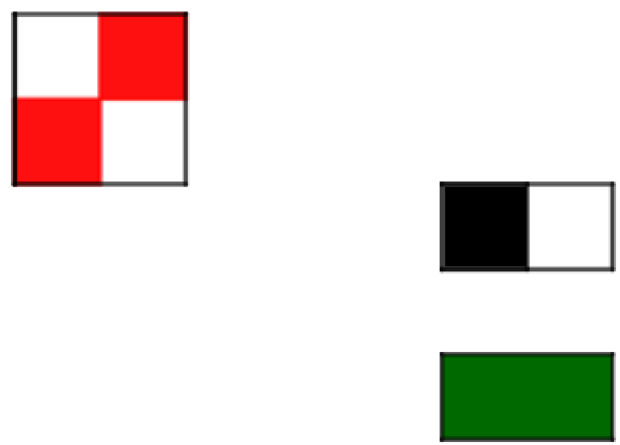




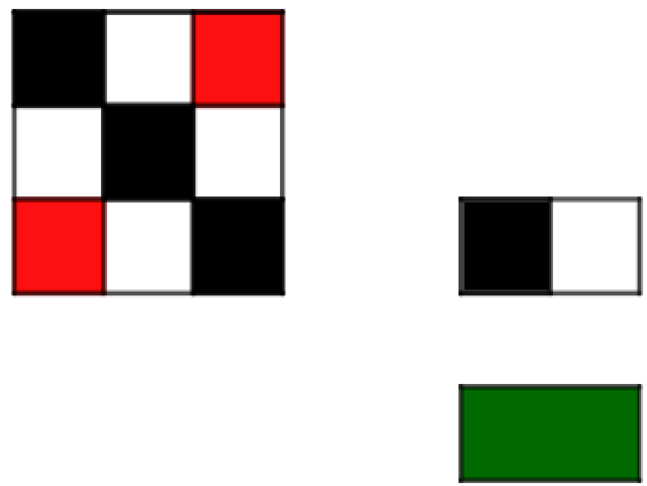




Data la complessità del problema il “bravo risolutore” (Polya) studierà una semplificazione del problema



Data la complessità del problema il “bravo risolutore” studierà una semplificazione del problema

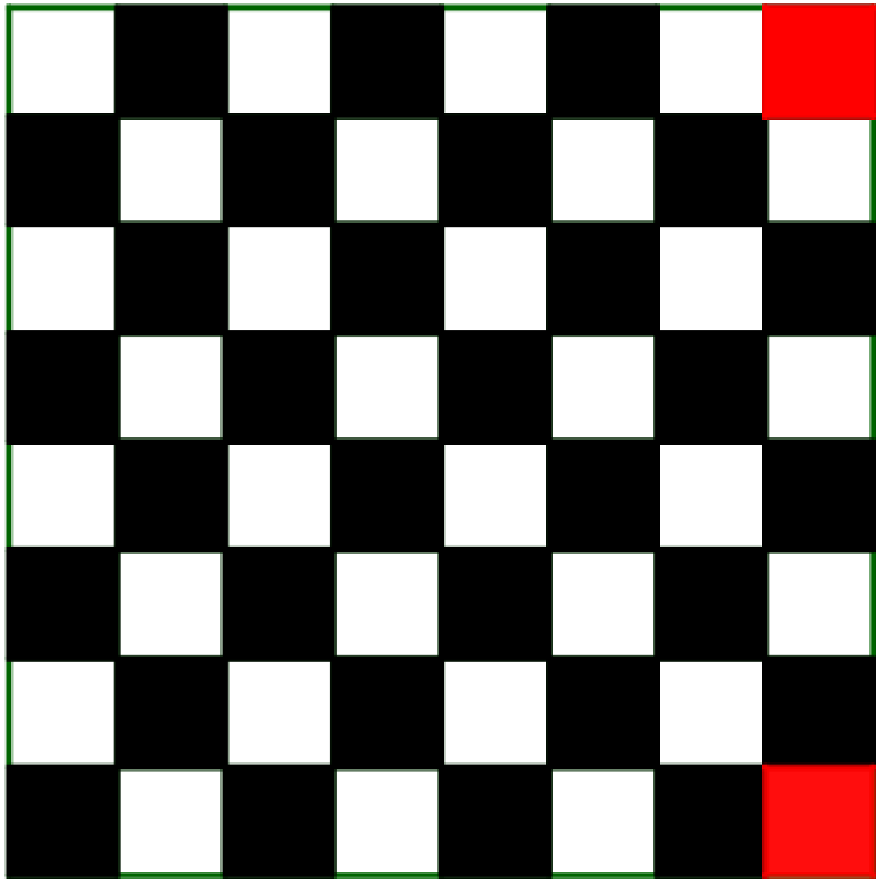


E' possibile ricoprire questa nuova scacchiera
con le stesse tessere 2 x 1 del domino?
Ed eventualmente lo fosse
in quanti modi?

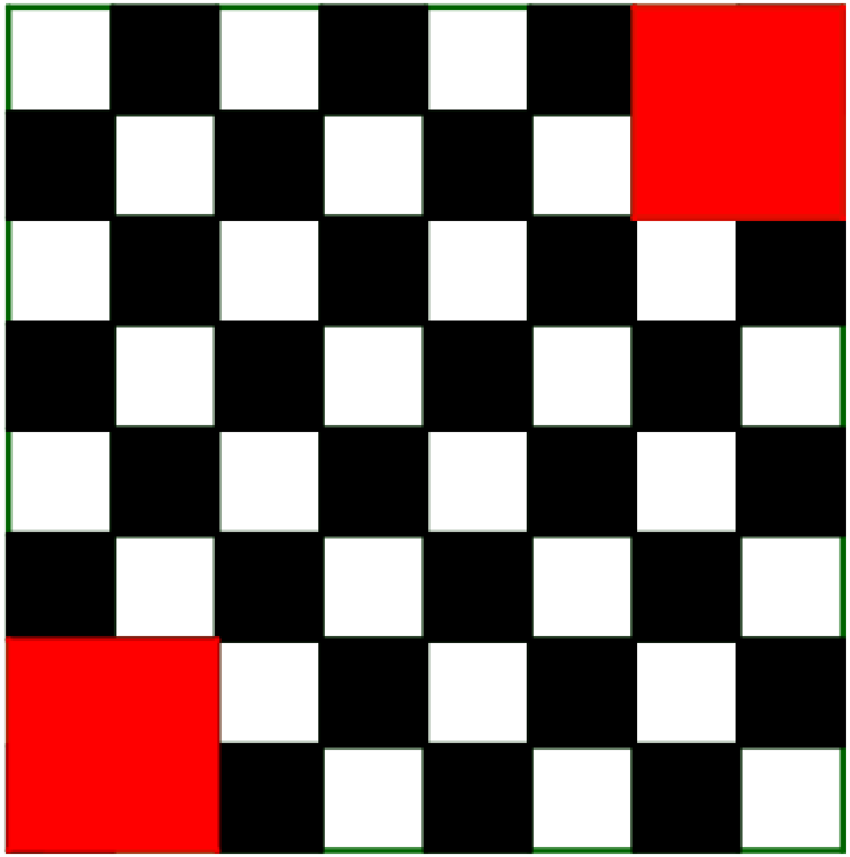
Le prove sono fattibili e risulta utile, più che la scacchiera 8x8 proporre
alla classe la risoluzione di questo caso (4x4)

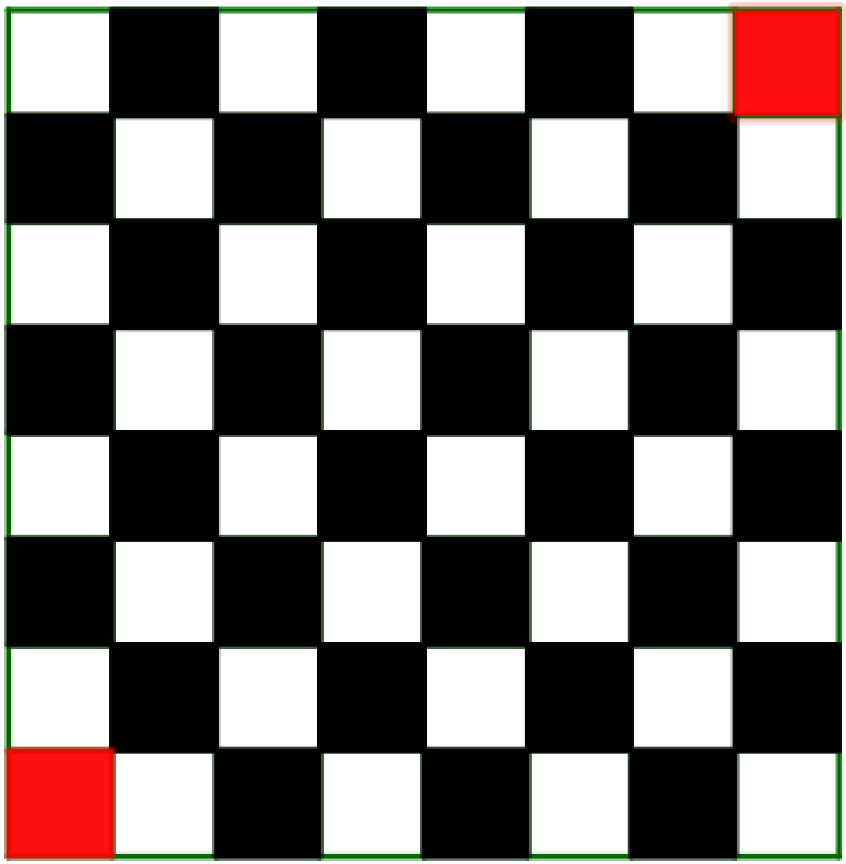
Ritornando poi alla scacchiera 8x8 si può inizialmente proporre una
modifica del problema :

E' possibile ricoprire una scacchiera 8 x 8
a cui sono stati tolti due quadretti adiacenti allo stesso lato?

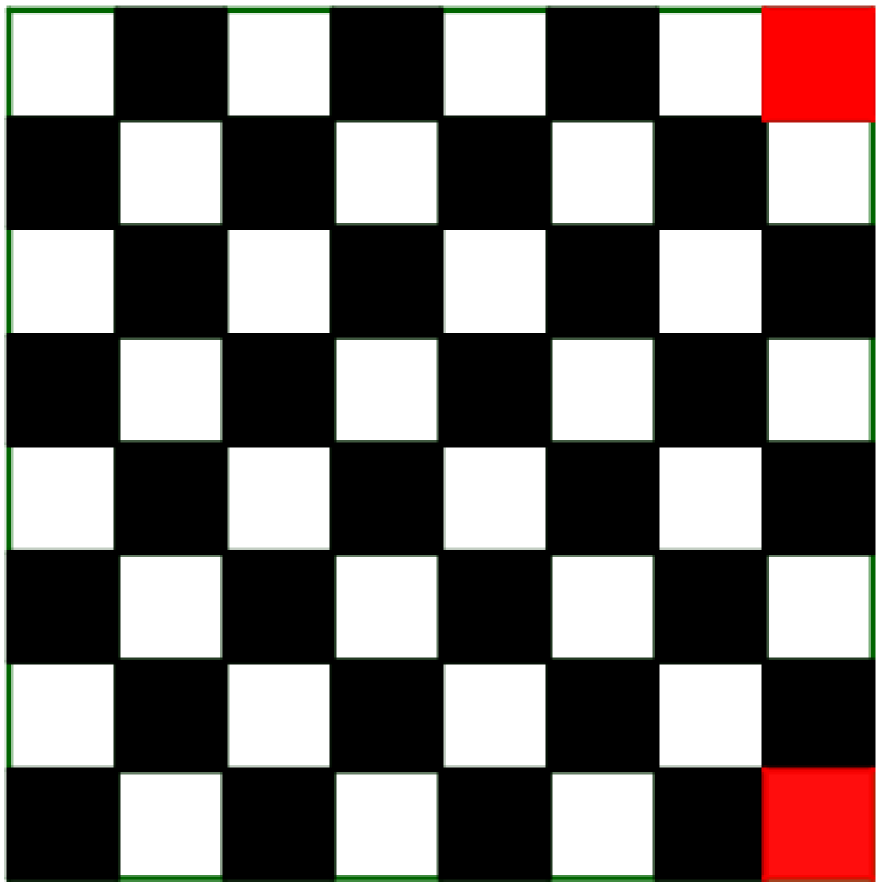


E' possibile ricoprire una scacchiera 8 x 8
a cui sono stati tolti i due quadretti 2 x 2 diagonalmente
opposti ?



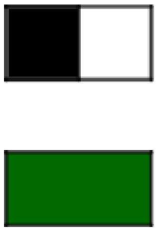


32 → 31 tesserine del domino



32 → 31 tesserine del domino

Le tesserine rispettano la parità tra bianchi e neri



2	3	4	5	6	7	8	9
3	4	5	6	7	8	9	10
4	5	6	7	8	9	10	11
5	6	7	8	9	10	11	12
6	7	8	9	10	11	12	13
7	8	9	10	11	12	13	14
8	9	10	11	12	13	14	15
9	10	11	12	13	14	15	16

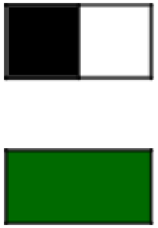
Somma totale= 576

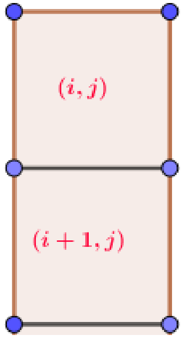
La somma degli indici delle tesserine, sia orizzontali che verticali, è un numero dispari

2	3

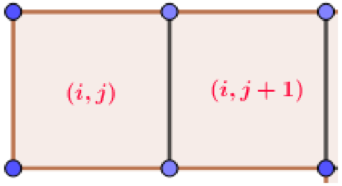
5
6

Le tesserine rispettano la parità tra bianchi e neri



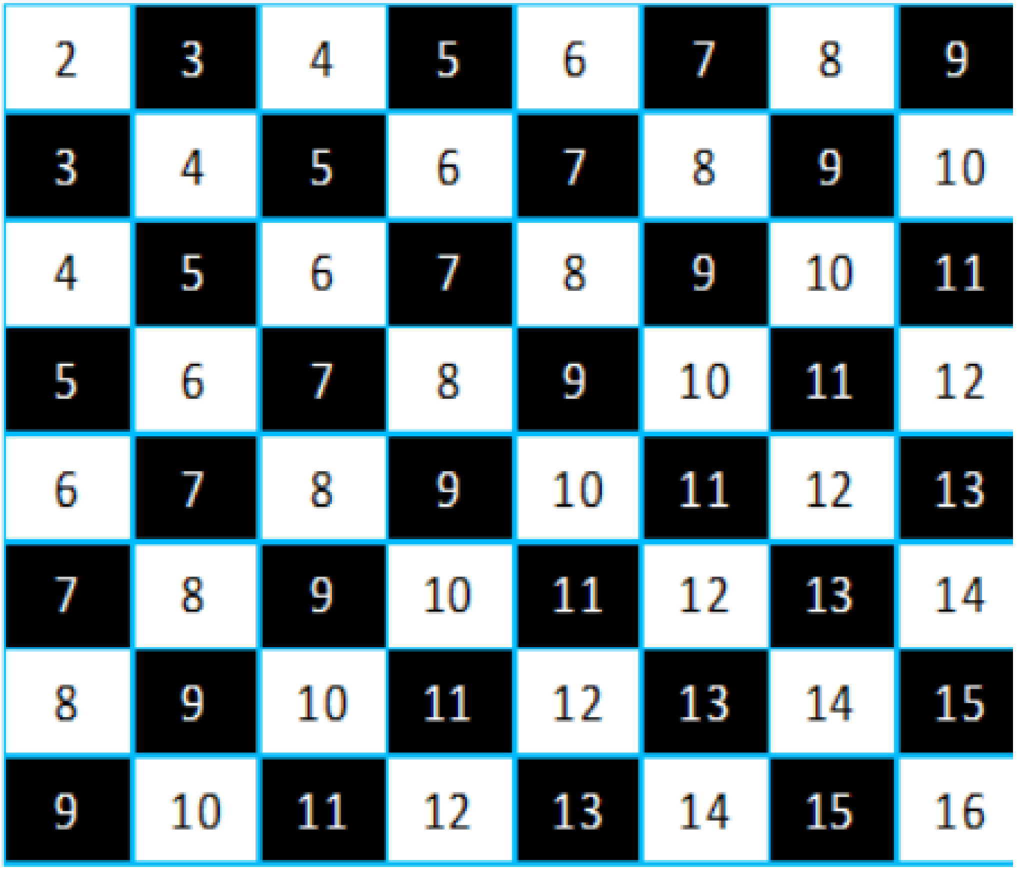


$2i + 2j + 1$

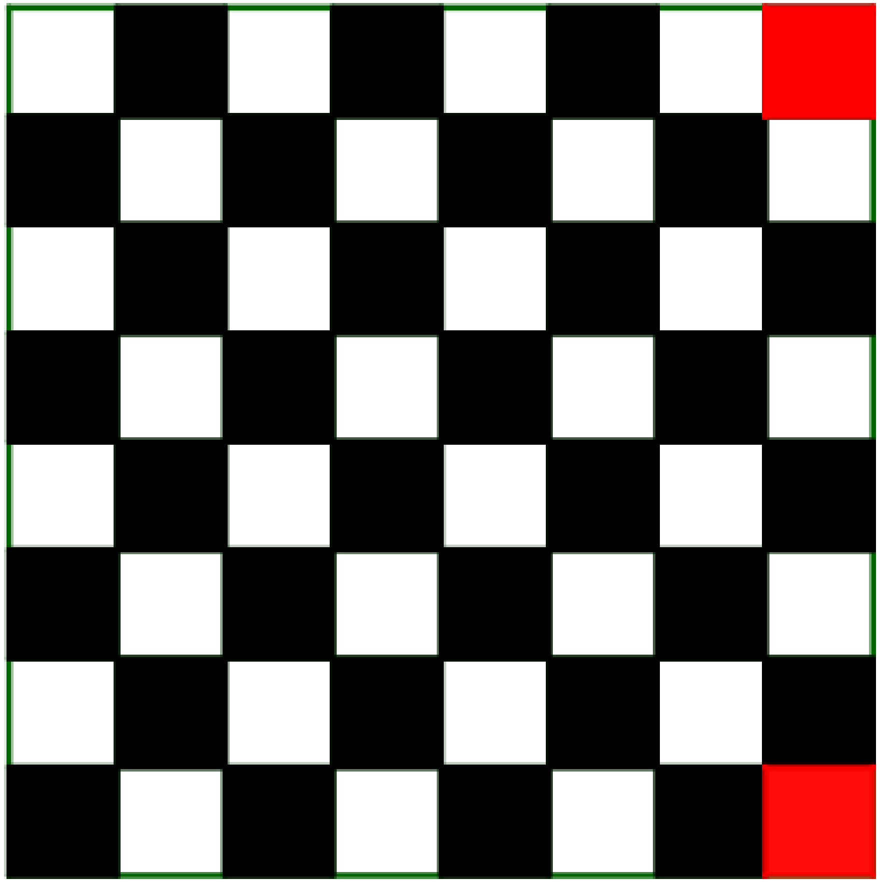


$2i + 2j + 1$

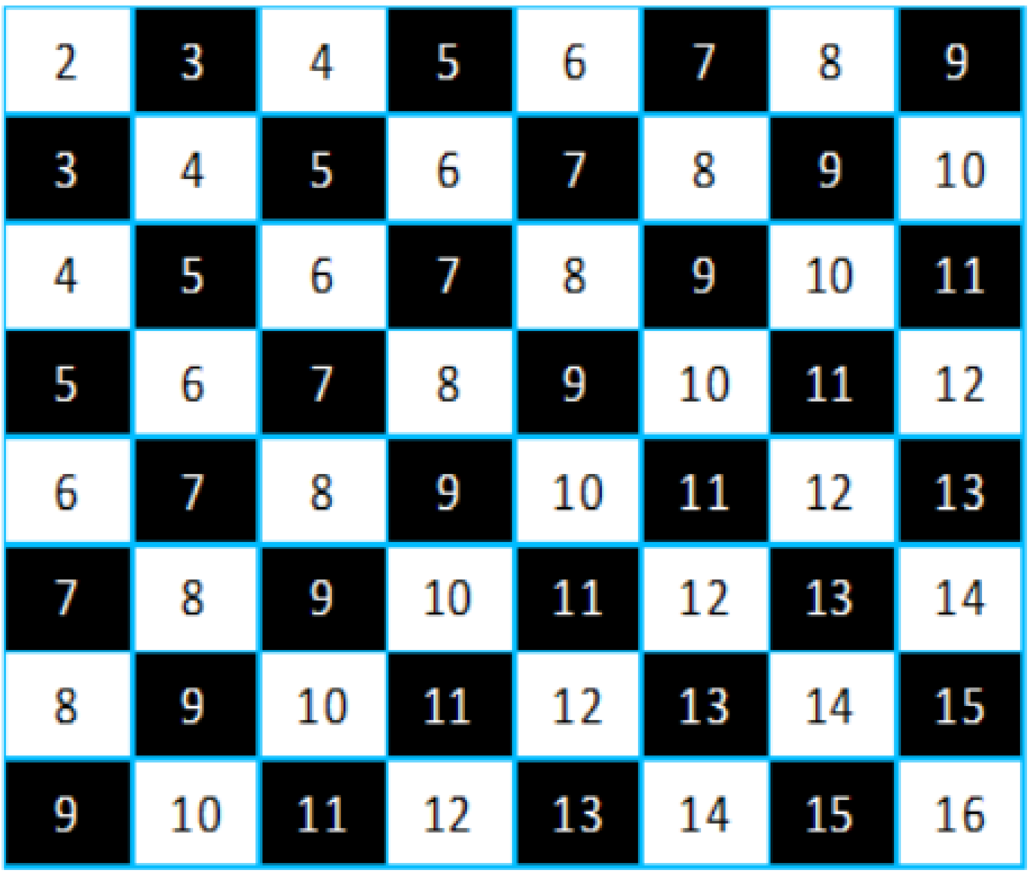
La somma degli indici delle tesserine, sia orizzontali che verticali, è un numero dispari



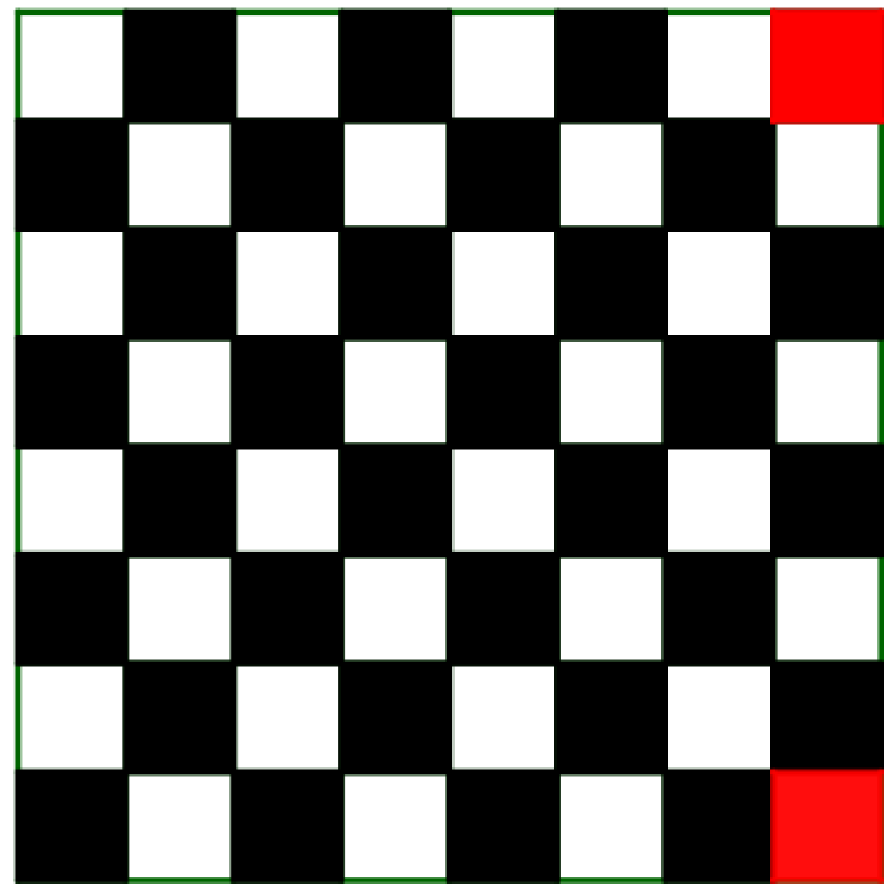
32 tesserine del domino



31 tesserine del domino



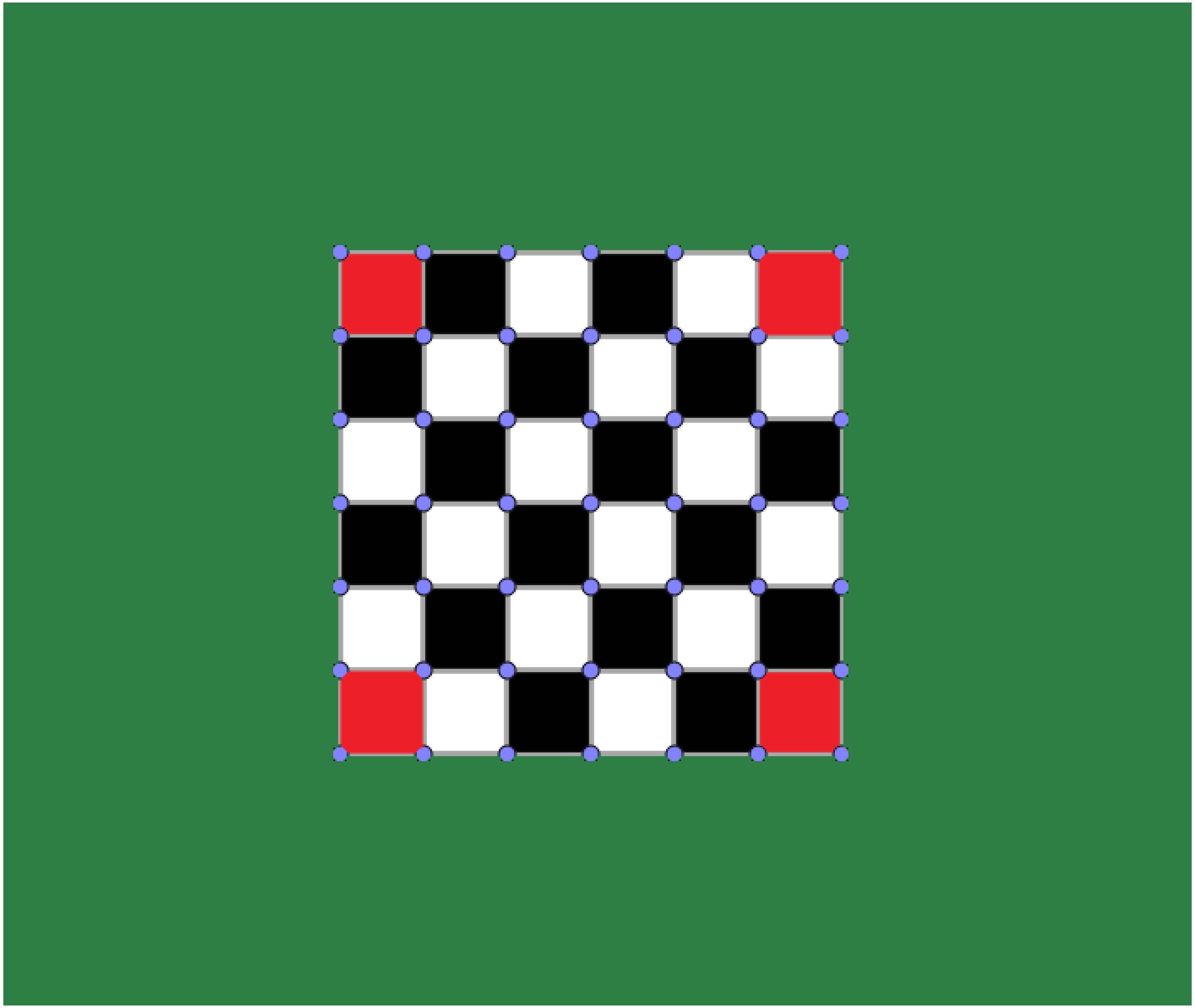
32 tesserine del domino

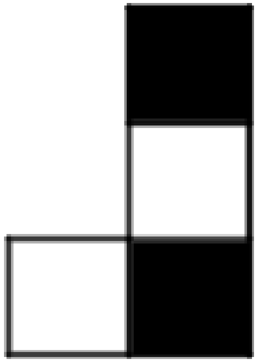


31 tesserine del domino

Problemi e soluzioni

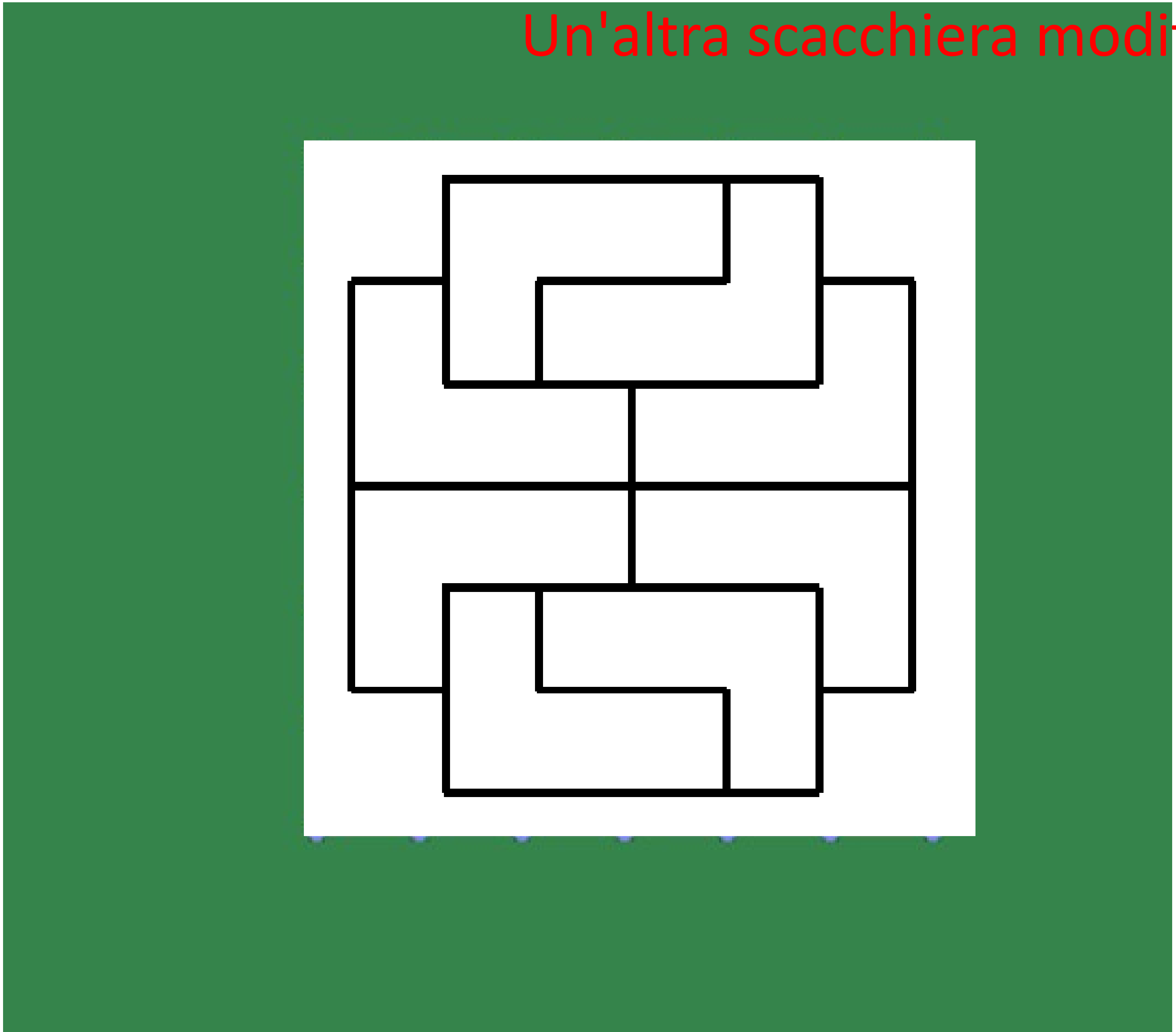
Scacchiera 6x6 modificata

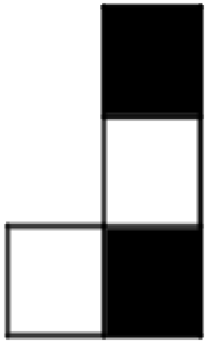




Problemi e soluzioni

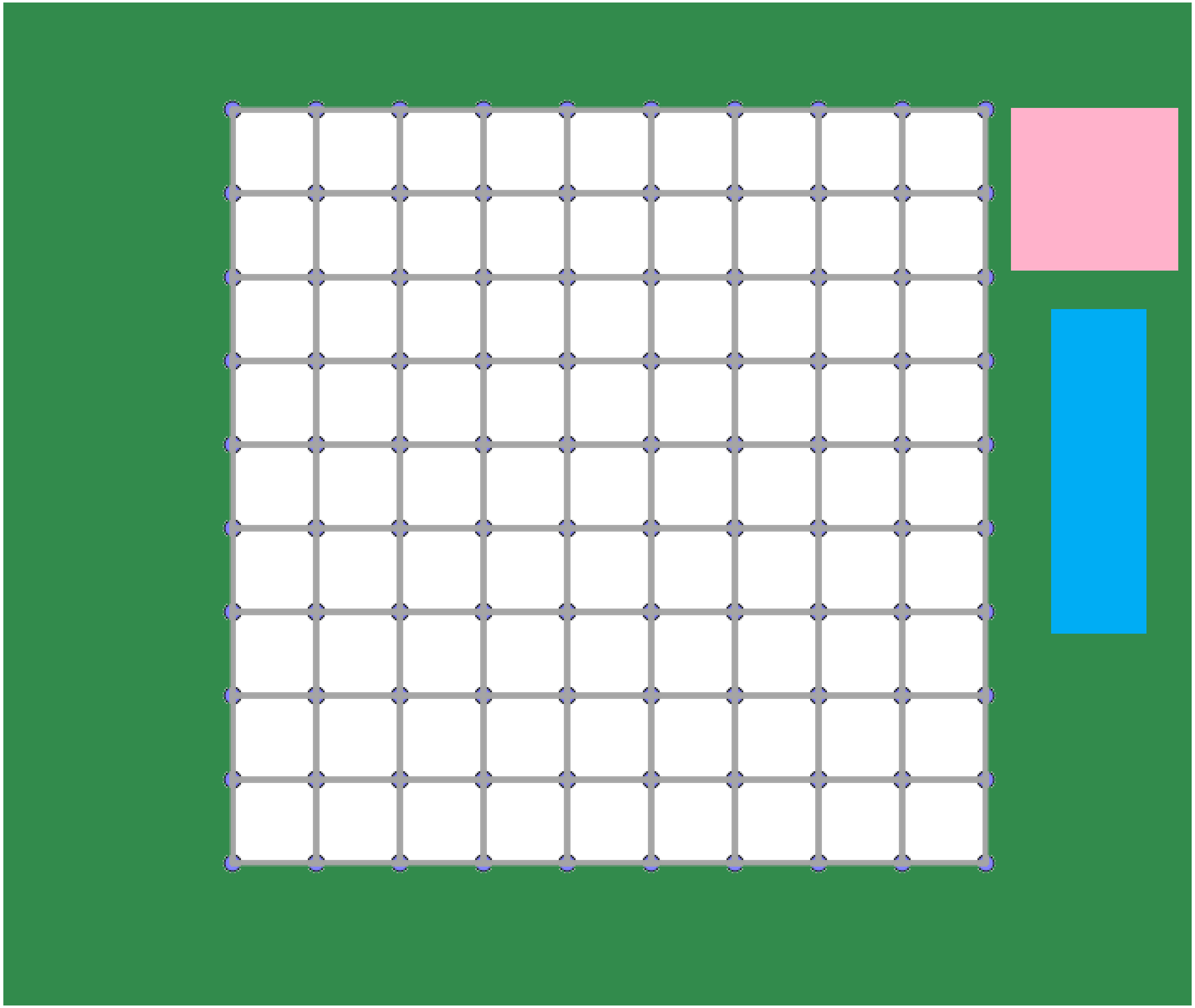
Un'altra scacchiera modificata





Problemi e soluzioni

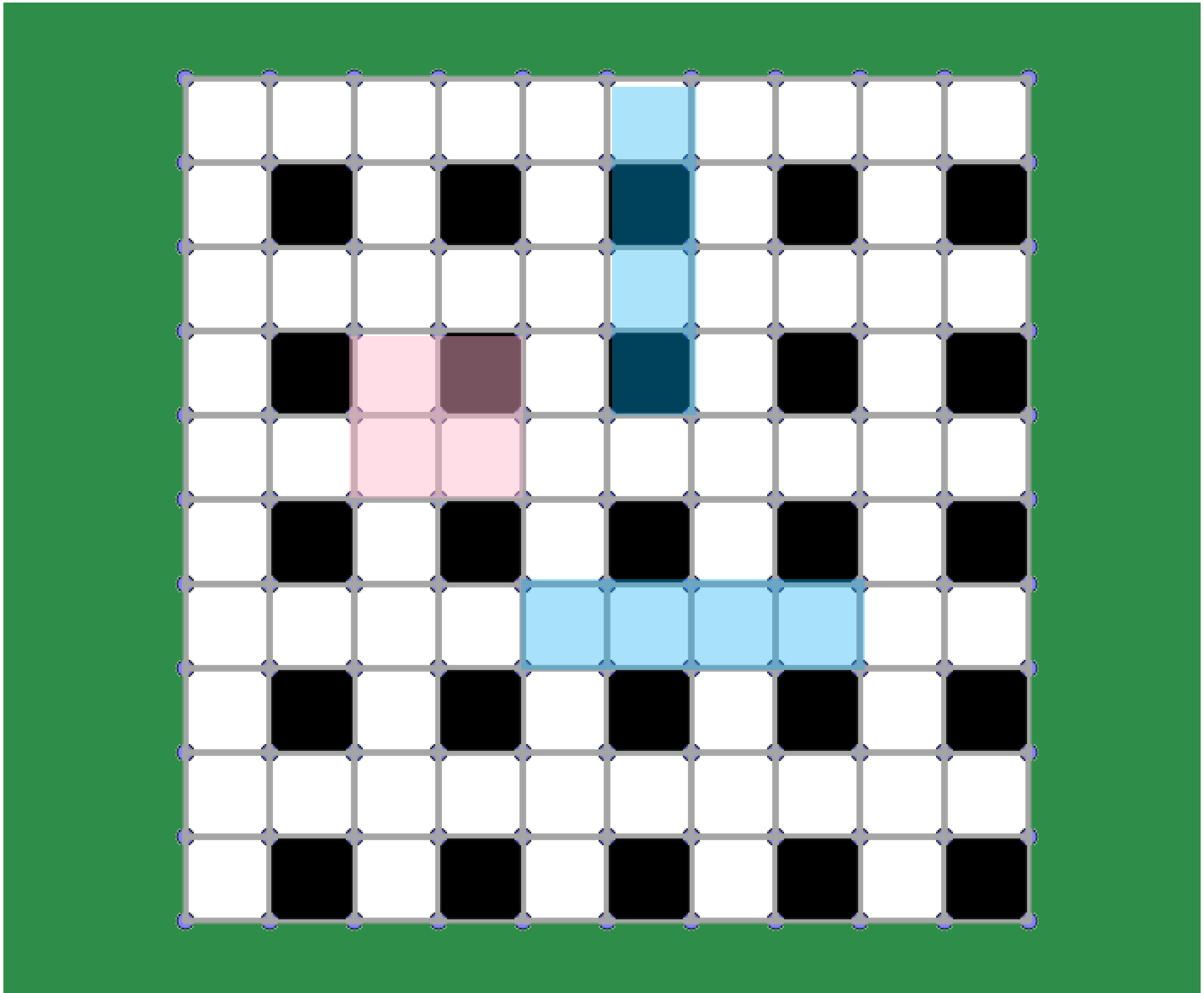
Ricoperture



La scacchiera 10x10 è ricoperta di mattonelle 2x2.
E' possibile sostituire una di queste mattonelle con una 1x4 ?

Problemi e soluzioni

Ricoperture



La scacchiera è ricoperta di mattonelle 2x2.
E' possibile sostituire una di queste mattonelle con una 1x4 ?

Problemi e soluzioni
un altro problema di parità

Problema: Sul giornale è riportato nella sezione di cronaca questa notizia:
9 matematici si sono riuniti per discutere la soluzione di un problema particolarmente difficile. Durante la riunione ci sono alcuni diverbi e ognuno ha litigato a tal punto con due suoi colleghi che lasciando la stanza per salutare ha stretto la mano soltanto a 7 suoi colleghi.

La notizia è una fake-news. Perché?

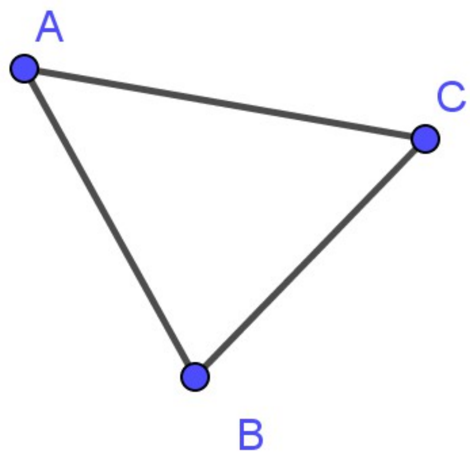
Perché è una fake-news?

A. i matematici non litigano mai tra loro
B. non esistono 9 matematici al mondo e pertanto nella stanza c'erano meno persone
C. per lo stesso motivo per cui ciascuno non avrebbe potuto stringere la mano a solo una persona
D. perché 7 è un numero primo

Perché è una fake-news?

Si può invitare gli alunni a fare le prove, per stabilire se è possibile la soluzione, oppure se si può fare con un numero diverso di persone

Problemi e soluzioni
un altro problema di parità

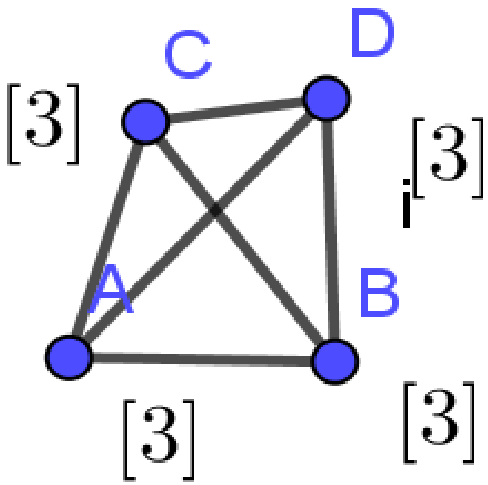


Supponiamo che i matematici siano 3:A,B,C
Quindi....

g(A)=[2]
g(B)=[2]
g(C)=[2]

Non è possibile disegnare un grafo in cui ciascun nodo ha un solo arco.
Al più possiamo immaginare che A e C siano connessi tra loro tramite un arco, ma allora B risulterebbe sconnesso.

Problemi e soluzioni
un altro problema di parità



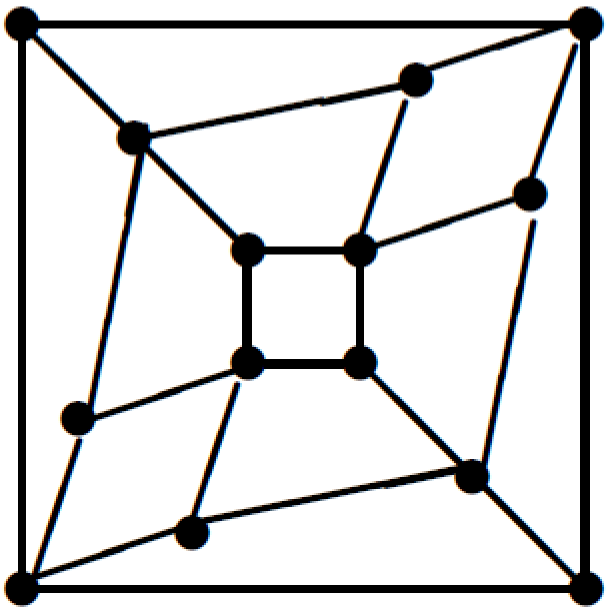
Anche aumentando il numero delle persone resta invariata la parità tra strette di mano.

g(A)=[2]
g(B)=[2]
g(C)=[2]

Problemi e soluzioni
Dimostriamo con i colori

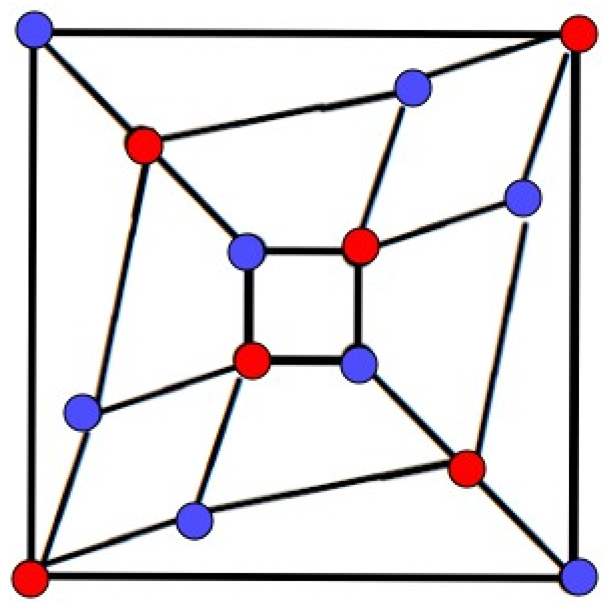
Problema: Il grafo in figura rappresenta i collegamenti stradali (gli archi del grafo) tra 14 città (i vertici del grafo)

E' possibile disegnare un percorso che permetta di visitare
Tutte le città passando per ciascuna di esse una sola volta?

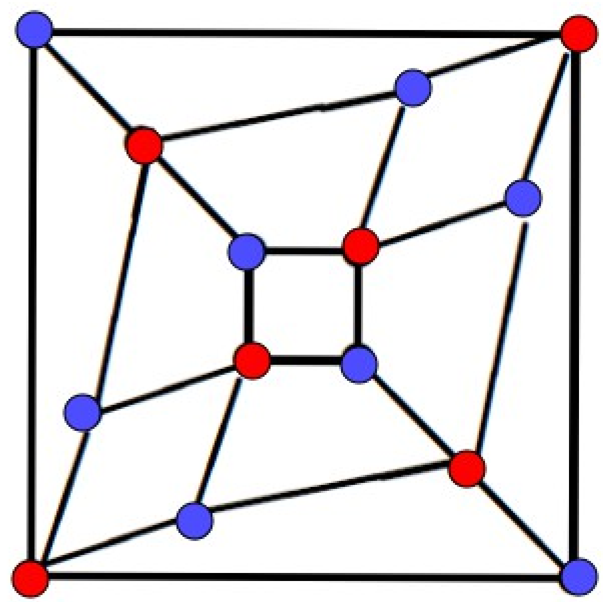


Problemi e soluzioni

Dimostriamo con i colori

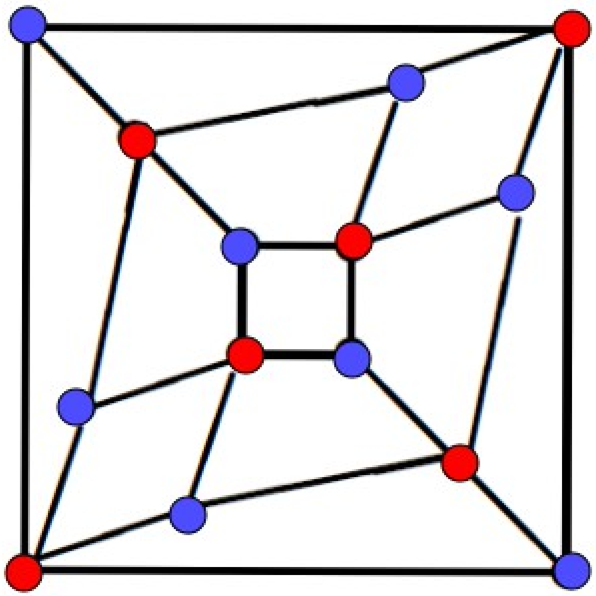


Problemi e soluzioni
Dimostriamo con i colori



Colorando le città di rosso R e blu B in modo tale da non avere due città adiacenti con lo stesso colore osserviamo che un cammino che passi per tutte le città una e una sola volta deve essere descritto da una sequenza
RBRBRBRBRBRBRB oppure
BRBRBRBRBRBRBR
In entrambe le sequenze ci sono 7 R e 7 B,
mentre invece sul grafo abbiamo 8 B e 6 R

Problemi e soluzioni
Dimostriamo con i colori

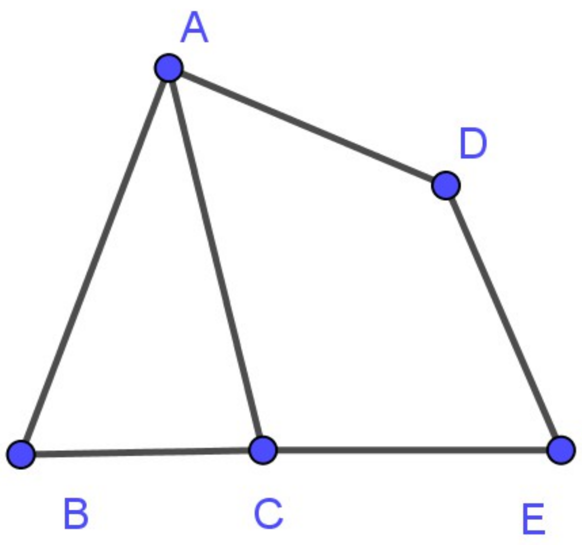


Un percorso in cui è possibile disegnare un percorso che passi per ogni nodo esattamente una volta si chiama HAMILTONIANO in onore del matematico Hamilton (irlandese del 19° secolo) che li ha studiati

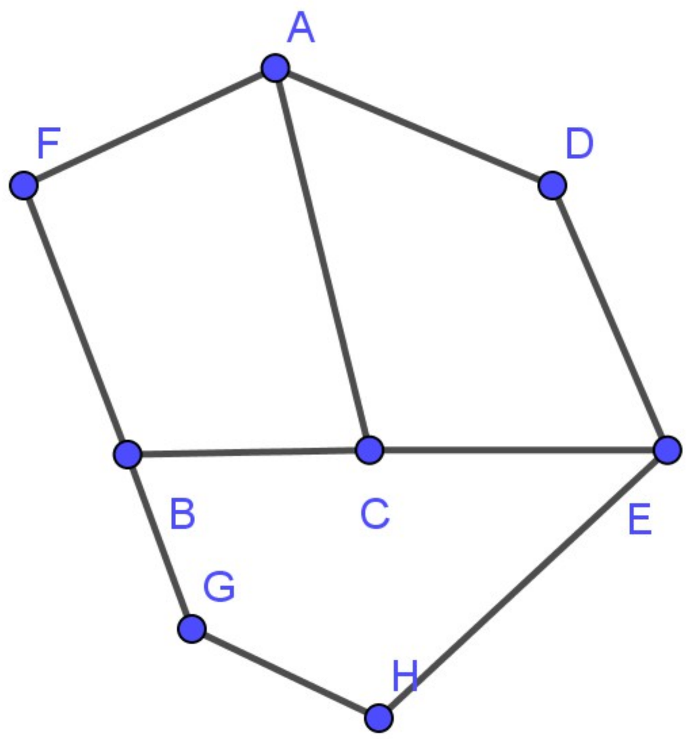
Problemi e soluzioni
Dimostriamo con i colori

Il problema precedente è stato risolto colorando il grafo con due colori in modo tale
Che ogni arco congiungesse due colori differenti.

Problema: E' sempre possibile colorare il grafo in questo modo? Si può cioè colorare i vertici del grafo in figura in modo che ogni arco colleghi due colori differenti?

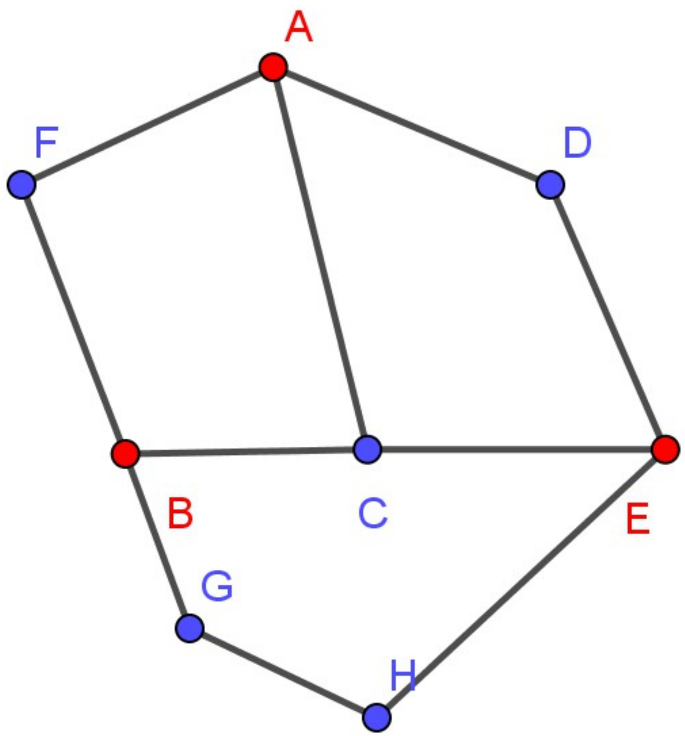


Problemi e soluzioni
Dimostriamo con i colori



Si può colorare i vertici del grafo in figura in modo che ogni arco colleghi due colori differenti? Si può fare con una visita in ampiezza.

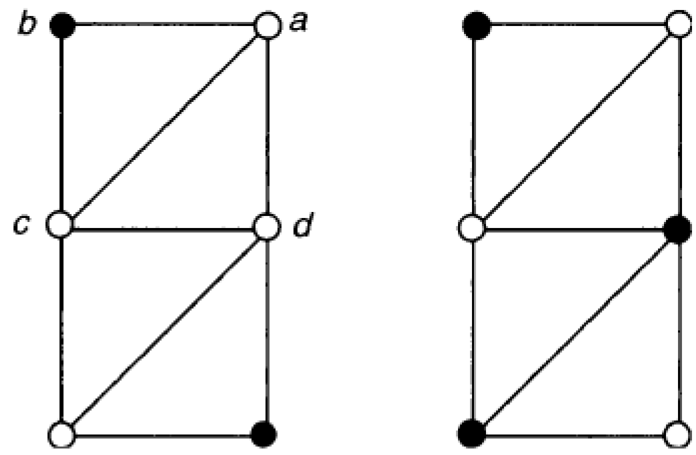
Problemi e soluzioni
Dimostriamo con i colori



La visita del grafo in ampiezza ci mostra che non è possibile.
L'arco GH non è bilanciato.

Tutti i nodi risultano però connessi con un numero di vertici di colore differente maggiore o uguale al numero di vertici dello stesso colore.
Il grafo si dice integrato e la colorazione è una di quelle che hanno il massimo numero di archi bilanciati.

Problemi e soluzioni
Dimostriamo con i colori



Uno dei due grafi è integrato?

Come posso colorare il grafo in modo da renderlo integrato?
[Massimizzare il numero di archi bilanciati
Dimostrazione per assurdo.

Problemi e soluzioni
Dimostriamo con i colori

Hall's marriage problem: