Problema della galleria d'arte

Nel 1973 Victor Klee pose la seguente domanda:

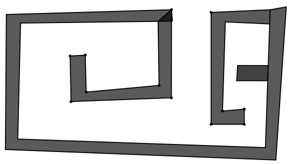
"Quale è il minimo numero di guardie necessario a sorvegliare una galleria d'arte?"

che viene ricordata come il Problema della Galleria d'Arte.
Per discutere questo problema in una forma semplificata, identifichiamo la galleria d'arte con un poligono, come se stessimo guardando dall'alto. Vasec Chvátal[1] ha dimostrato che, per un poligono semplice con n lati, sono sempre sufficienti $[n/3]$ guardie, ove con $[n/3]$ si indichi la parte intera di $n/3$. Successivamente, Fisk[2] ha proposto per il risultato di Chvátal una dimostrazione più semplice, che sarà seguita in queste note.

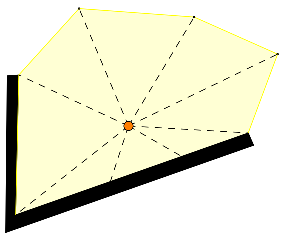
Il problema della galleria d'arte ha molte applicazioni pratiche, quali ad esempio la disposizione di videocamere in un centro commerciale, di fonti luminose per l'illuminazione, di stazioni radar in una regione geografica. Inoltre, ha avuto un ruolo molto importante nello sviluppo di campi quali robotica, visione, ottimizzazione e grafica computazionale; è stato generalizzato in vari modi, e presenta tutt'oggi aspetti non risolti.

Modellizzazione del problema

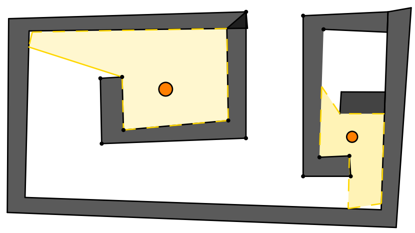
Identificando la galleria d'arte con un poligono. Non vengono fatte limitazioni sulla forma della galleria, tranne il fatto che il poligono sia semplice, cioè da segmenti che si intersecano solo negli estremi. Si cerca *il numero minimo di guardie necessarie, tra tutte le gallerie poligonali semplici con n lati*.



Rappresentiamo le guardie tramite punti arancioni. I muri della galleria non sono trasparenti e non hanno buchi: la singola guardia può vedere il punto P solo se il segmento che la congiunge con P è contenuto nel poligono (lati inclusi).



Coloriamo in giallo il luogo dei punti che la guardia può vedere.



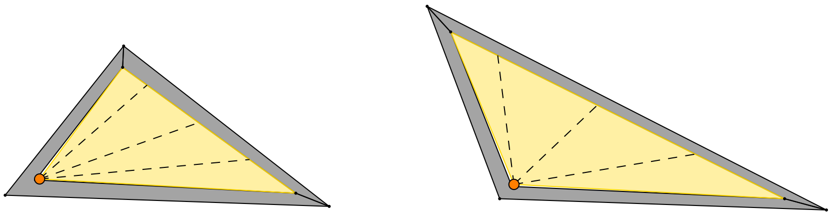
Supponiamo che siano disposte delle guardie nella galleria: diciamo che *la galleria è ben presidiata se ogni suo punto è visibile da almeno una guardia*. Studieremo *il caso in cui le guardie sono posizionate nei vertici e non si possono muovere***.**
Possiamo schematizzare i muri con segmenti, senza metterne in evidenza lo spessore.

[1] V. Chvátal. A combinatorial theorem in plane geometry. J. Combinatorial Theory Series , 18:39-41, 1975.
[2] Steve Fisk. A short proof of Chvátal's watchman theorem. J. Comb. Theory, Ser. B, 24(3):374, 1978.

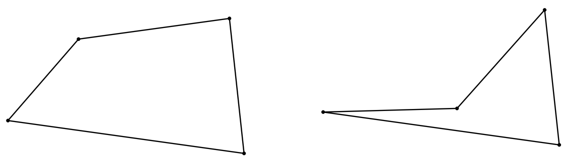
Osservazioni e tentativi preliminari

Procediamo esaminando esempi con un numero *n* piccolo di lati. Ricordiamo che stiamo considerando solo *guardie posizionate nei vertici e che non si possono muovere*.

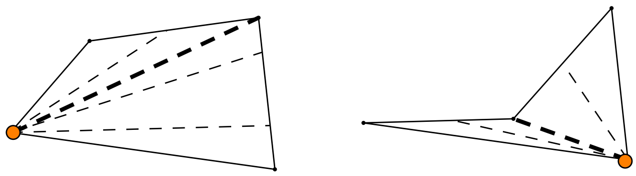
Se la galleria ha forma triangolare (*n*=3), è sufficiente una guardia, posizionata in un qualsiasi vertice (o in un qualsiasi punto). Infatti, ogni punto del triangolo è visibile da un suo vertice.



Per i quadrilateri (*n* = 4), la situazione è maggiormente articolata, perché è possibile che da un vertice non siano visibili alcuni punti del quadrilatero:



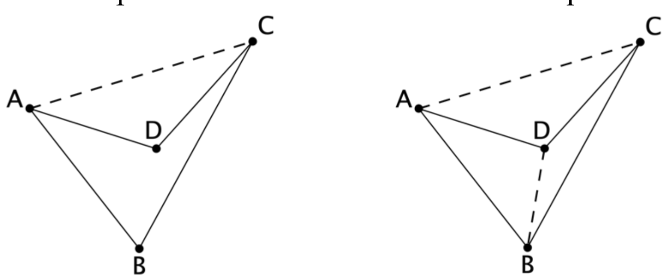
È comunque sempre possibile scegliere in modo opportuno un vertice nel quale posizionare una guardia che è in grado di vedere tutti i punti del quadrilatero.



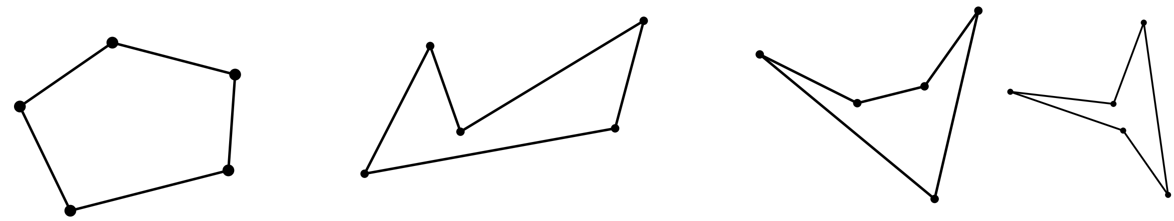
È facile convincersi, facendo un disegno o articolando i lati di un modellino, che la presenza di angoli interni maggiori di un angolo piatto riduce i punti visibili da alcuni vertici.

La dimostrazione del fatto che sia sufficiente una guardia richiede un poco di pazienza, ma sarà poi utile nel caso generale. Osserviamo che, se la diagonale che congiunge due vertici non è contenuta nel quadrilatero, allora una guardia in uno dei due vertici non può vedere l’altro; se, invece, la diagonale tra due vertici è contenuta nel quadrilatero, tracciando quella diagonale e posizionando la guardia su un vertice della diagonale stessa, il quadrilatero risulta suddiviso in due triangoli e la guardia può vedere i punti di entrambi i triangoli (e quindi di tutto il quadrilatero). Quindi, per mostrare che è sufficiente una guardia per presidiare un qualsiasi quadrilatero, è sufficiente mostrare che almeno una delle diagonali è interna al quadrilatero (cioè contenuta nel quadrilatero).

Per mostrare l’esistenza di una diagonale interna al quadrilatero, iniziamo osservando che il quadrilatero ha almeno un angolo minore dell’angolo piatto (perché la somma degli angoli interni è 2 volte un angolo piatto): sia *B* il vertice di tale angolo e siano *A*, *C* i vertici adiacenti. Se la diagonale *AC* che congiunge *A* e *C* è interna, abbiamo già la diagonale cercata. Altrimenti, il vertice *B* individua un semipiano delimitato dalla retta *r* per *A* e *C* e tale semipiano contiene anche il quarto vertice *D* del quadrilatero. La diagonale *BD* deve essere una diagonale interna, perché il triangolo di vertici ABD e il triangolo di vertici BCD non possono contenere altri vertici del quadrilatero.

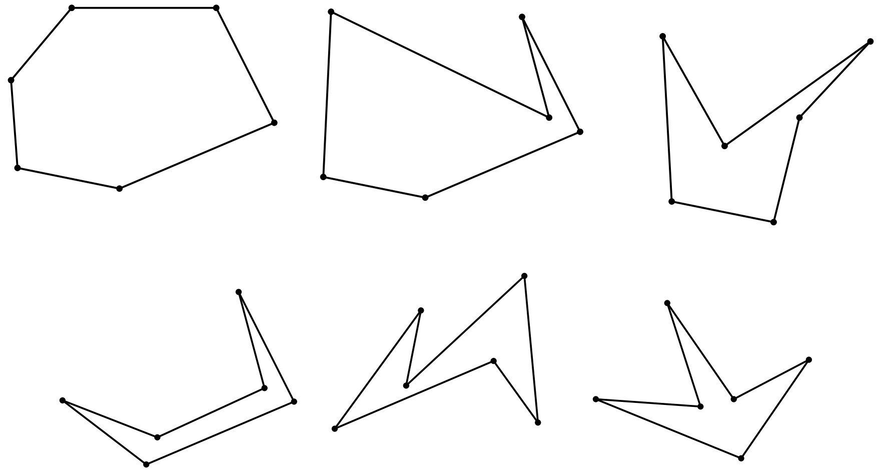


Per n=5, il poligono può avere nessuno, 1 o 2 angoli interni maggiori di un angolo piatto:



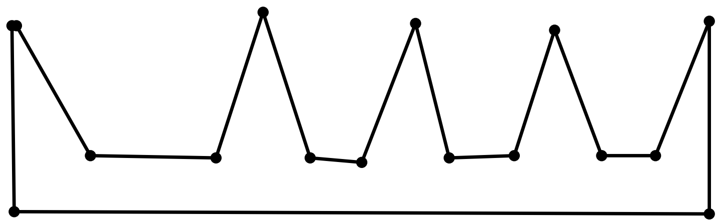
In ogni caso, è sufficiente una guardia.

Per $n = 6$, il poligono può avere nessuno, 1 o 2 angoli interni maggiori di un angolo piatto:

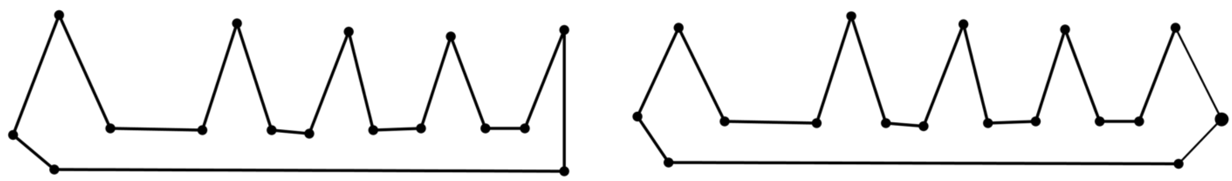


Con una guardia sola, non sempre è possibile assicurare che la galleria sia ben presidiata. Ma con due guardie, è sempre possibile presidiare la galleria.

Generalizzando, osserviamo che per $n = 15$, servono almeno 5 guardie



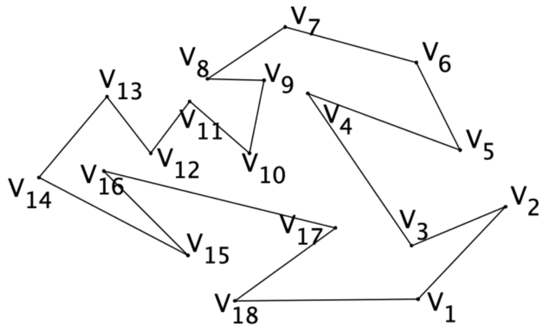
e tale figura può essere modificata in modo da produrre un poligono con n=3h lati che richiede h=n/3 guardie. La figura può anche essere modificata in modo da produrre un poligono con n=3h+1 o 3h+2 lati che richiede h=[n/3] guardie (indicando con [n/3] la parte intera di n/3). Ad esempio, la figura seguente illustra poligoni con $n = 16$ e $n = 17$, per presidiare i quali servono almeno 5 guardie:



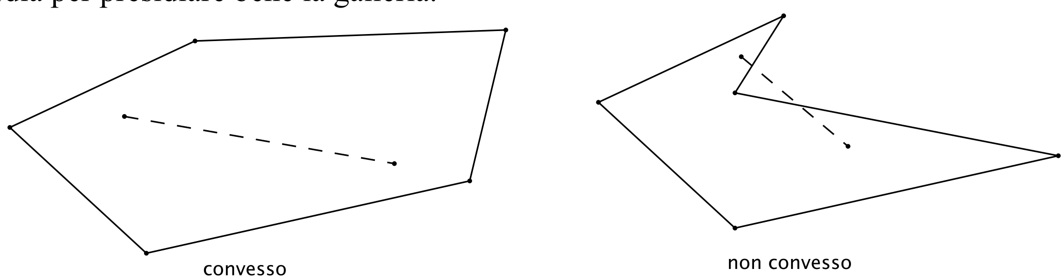
Terminologia

Il teorema della curva di Jordan assicura che ogni spezzata poligonale semplice piana divide il piano in due parti: una regione illimitata (detta *esterno*) e una regione limitata (detta *interno*). Il poligono è l'insieme formato dalla regione interna e dai punti della spezzata che costituisce il perimetro: l'*interno* di un poligono è dunque il poligono privato dei suoi lati.

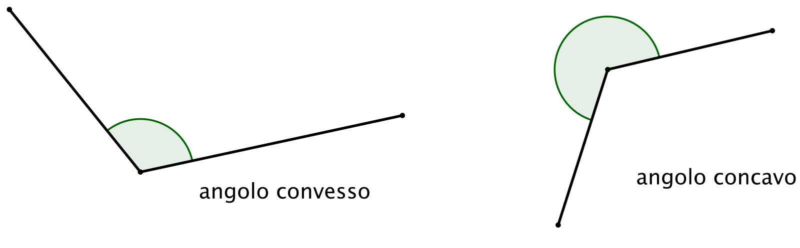
È spesso conveniente assegnare il nome dei vertici in modo ordinato, percorrendo il perimetro in un verso:



Un poligono semplice si dice *convesso* se, per ogni coppia di suoi punti, il segmento che li congiunge è contenuto nel poligono. Indipendentemente dal numero di lati, in un poligono convesso è sufficiente una guardia per presidiare bene la galleria.

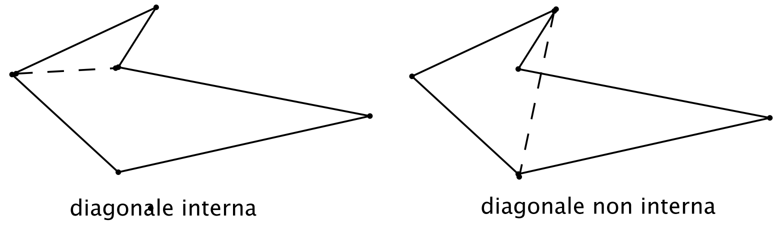


In analogia, un angolo è detto *convesso* se è minore di un angolo piatto, non convesso o concavo altrimenti.



Ogni poligono ha almeno un angolo convesso.

In un poligono, una *diagonale* è il segmento che congiunge due vertici non adiacenti; la diagonale è *interna* se, tranne che per i due estremi, è composta solo da punti interni del poligono.



Il teorema di Chvátal sulla galleria d'arte poligonale

Torniamo al teorema di Chvátal, che ora possiamo dimostrare:

Teorema (Chvátal[3]) Per un poligono semplice con n lati, sono sempre sufficienti $[n/3]$ guardie, ove con $[n/3]$ si indichi la parte intera di $n/3$. Per qualche poligono semplice di n lati occorrono effettivamente $[n/3]$ guardie.

Dimostrazione

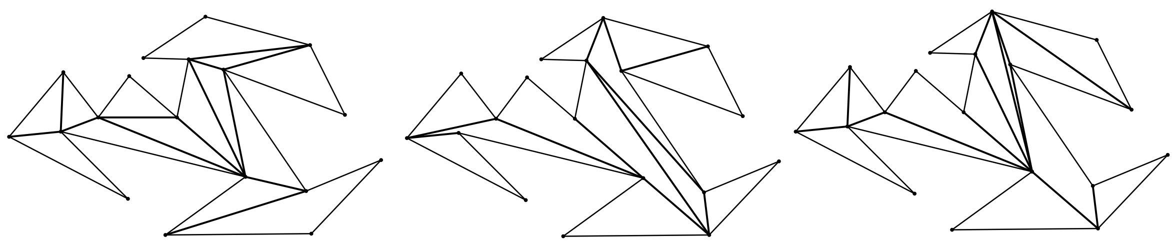
La seconda parte della proposizione è già stata provata tramite gli esempi forniti. Per provare la prima affermazione, la dimostrazione si articola in tre passi. Si inizia mostrando che ogni poligono semplice può essere "triangolato", poi si verifica che i vertici dei triangoli ottenuti possono essere colorati con tre colori in modo che vertici adiacenti abbiano colore differente (diciamo che la triangolazione è 3-colorabile). Infine, si utilizza la colorazione ottenuta per dimostrare il risultato di Chvátal.

Passo 1: triangolazione di un poligono semplice

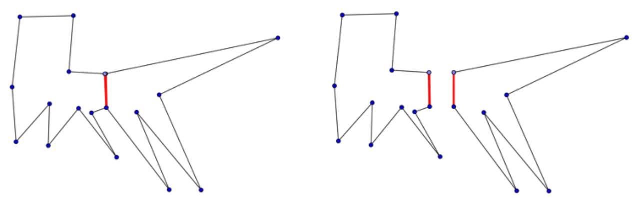
Una *triangolazione* di un poligono $\mathcal{P}$ è una suddivisione di $\mathcal{P}$ in triangoli con interni disgiunti, in modo che i vertici dei triangoli siano vertici del poligono, e i lati di tali triangoli siano lati o diagonali (interne) di $\mathcal{P}$.

Una triangolazione del poligono si ottiene dunque tracciando nel poligono diagonali che si intersecano, al massimo, nei vertici. Le diagonali da utilizzare sono diagonali interne.

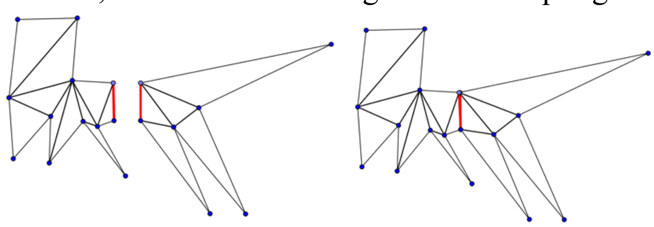
La figura mostra che uno stesso poligono può essere triangolato in modi differenti.



Osserviamo che, se tagliamo un poligono in due parti, lungo una diagonale interna, otteniamo due poligoni che hanno un numero inferiore di lati.



Inoltre, se triangoliamo separatamente i due poligoni così ottenuti e li incolliamo nuovamente ricostruendo il poligono iniziale, otteniamo una triangolazione del poligono iniziale.



[3] V. Chvátal. A combinatorial theorem in plane geometry. J. Combinatorial Theory Series , 18:39-41, 1975.

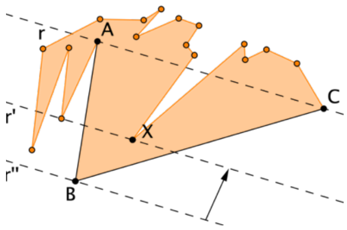
Questa osservazione permette di dimostrare un importante risultato:

Ogni poligono semplice piano di n lati può essere suddiviso in n-2 triangoli, tramite il disegno di n-3 diagonali.

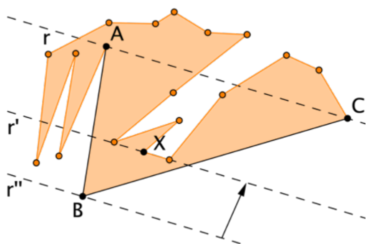
La dimostrazione[4] di questo risultato procede per assurdo, ponendo l’attenzione sul numero n dei lati del poligono studiato. Si inizia osservando che, per $n = 3$, tutti i poligoni di 3 lati sono triangolati (per definizione) (con $n - 2 = 1$ triangoli e aggiungendo $n - 3 = 0$ diagonali interne). Per assurdo, si suppone l’esistenza di un poligono che non soddisfa la tesi: esiste, quindi, un minimo numero di lati per comporre un poligono di n lati non triangolabile in n-2 triangoli tramite n-3 diagonali: indichiamo con n_0 tale numero minimo. Ora si mostra che, necessariamente, deve esistere anche un poligono non triangolabile con meno di n_0 lati, e questo provoca un assurdo.

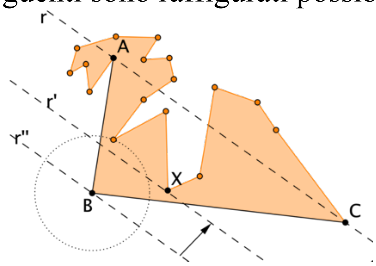
Sia, infatti, $\mathcal{P}$ un poligono che non soddisfa la tesi con il numero minimo n_0 lati. Sappiamo che $n_0 > 3$.

Poiché il poligono $\mathcal{P}$ ha almeno un angolo interno convesso, indichiamo con B un vertice con angolo interno convesso. Chiamiamo ora A e C i vertici adiacenti a B (i tre vertici sono distinti, perché $n_0 > 3$). Vogliamo dimostrare che da almeno uno di questi tre vertici è possibile tracciare una diagonale interna. Infatti, se la diagonale AC che congiunge A e C è interna, abbiamo già la diagonale cercata. Altrimenti, il triangolo ABC^{Δ} di vertici A, B e C deve necessariamente contenere almeno un altro vertice del poligono $\mathcal{P}$. Se l’interno del triangolo ABC^{Δ} contiene un unico vertice del poligono $\mathcal{P}$, denotiamo con X tale vertice.



Altrimenti, consideriamo la retta r per A e C e disegniamo la retta r'' per B parallela a r: osserviamo che il vertice B individua un semipiano delimitato dalla retta r'' e contenente A e C. Immaginiamo di muovere la retta r'' parallelamente a se stessa, verso r fino alla prima posizione possibile in cui la nuova retta traslata r' contiene (almeno) un vertice del poligono $\mathcal{P}$ contenuto nell’interno del triangolo ABC^{Δ}: si indichi con X un tale vertice. Nelle figure seguenti sono raffigurati possibili casi:





Le figure mettono in evidenza che si stanno prendendo in considerazione solo i vertici di $\mathcal{P}$ contenuti nell’interno del triangolo ABC^{Δ}; inoltre, la retta r' può contenere più di un vertice di $\mathcal{P}$ contenuto nell’interno del triangolo ABC^{Δ}. Infine, il vertice scelto X non è necessariamente il vertice di $\mathcal{P}$ contenuto nell’interno del triangolo ABC^{Δ} che sia più vicino a B: tra i vertici di $\mathcal{P}$ nell’interno del triangolo ABC^{Δ}, il vertice X ha la caratteristica di avere distanza minima dalla retta r''. Ne segue che la porzione del triangolo ABC^{Δ} tra le due rette parallele r' per X e r'' per B è un triangolo contenuto

[4] Joseph O'Rourke. Art Gallery Theorems and Algorithms . Oxford University Press, New York, NY, 1987, pag. 12

in $\mathcal{P}$ che non contiene vertici di $\mathcal{P}$ al suo interno. Con questa scelta, la diagonale BX è pertanto una diagonale interna a $\mathcal{P}$, come si voleva.

Osserviamo ora che la diagonale interna BX divide il poligono $\mathcal{P}$ in due poligoni $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}_2$ che hanno, ciascuno, meno lati rispetto a $\mathcal{P}$. Indicato con n_1 il numero di lati di $\mathcal{P}_1$ e con n_2 il numero di lati di $\mathcal{P}_2$, si ha $n_2 + n_2 = n_0 + 2$, tenendo conto che la diagonale interna viene contata come lato in entrambi i sottopoligoni. Poiché il numero n_0 di lati di $\mathcal{P}$ è il numero minimo di lati per costruire un poligono che non soddisfa la tesi, i due poligoni $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}_2$ devono soddisfare la tesi: dunque, possiamo considerare una suddivisione di $\mathcal{P}_1$ in n_1–2 triangoli tramite n_1-3 diagonali e una suddivisione di $\mathcal{P}_2$ in n_2–2 triangoli tramite n_2-3 diagonali. Queste due suddivisioni producono una triangolazione di $\mathcal{P}$, che suddivide $\mathcal{P}$ in $n_1 - 2 + n_2 - 2 = n_0 - 2$ triangoli, tramite $n_1 - 3 + n_2 - 3 - 1 = n_0 - 3$ diagonali (tenendo conto che basta contare una volta sola la diagonale interna che definisce $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}_2$.

Concludiamo, quindi, che $\mathcal{P}$ soddisfa la tesi, contro le ipotesi iniziali. L'assurdo proviene dall'aver supposto l'esistenza di un poligono non soddisfa la tesi: la dimostrazione è così conclusa.

Come conseguenza della dimostrazione svolta, poiché ogni poligono piano semplice con n lati può essere triangolato tramite (n–3) triangoli, otteniamo la seguente conseguenza:

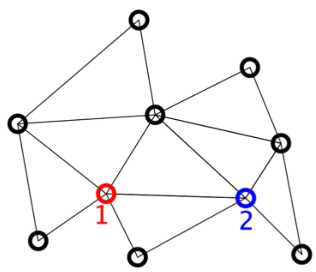
La somma degli angoli interni di un poligono piano semplice con n lati è

$$2\,\pi\,(n-3)$$

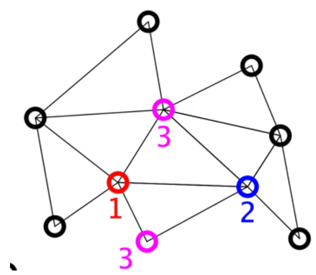
Passo 2: colorazione della triangolazione

Esempio: consideriamo la triangolazione in figura e indichiamo con 1, 2, 3 tre differenti colori: per 'colorare' un vertice, scrivo un numero accanto a esso.

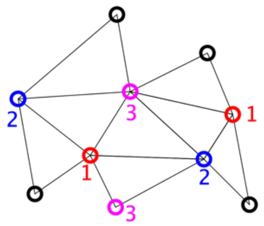
Osserviamo che due vertici adiacenti sono già colorati, con i colori 1 e 2 rispettivamente. Con i tre colori cerchiamo di colorare anche tutti gli altri vertici del poligono, in modo tale che due vertici adiacenti non siano mai dello stesso colore.



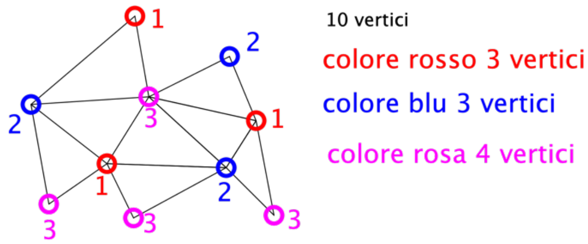
Osserviamo che, se in un triangolo sono assegnati colori distinti a due vertici, c'è un unico modo per atribuire il colore al terzo vertice. Coloriamo, quindi, il terzo vertice nei triangoli che hanno i punti colorati per vertici.



Coloriamo quindi i vertici dei triangoli adiacenti a quelli già colorati:



e poi proseguiamo completando la colorazione dei triangoli adiacenti a quelli già colorati: ad ogni passo, è univoca la scelta del colore da assegnare ai vertici. Alla fine, siamo riusciti a colorare tutti i vertici:

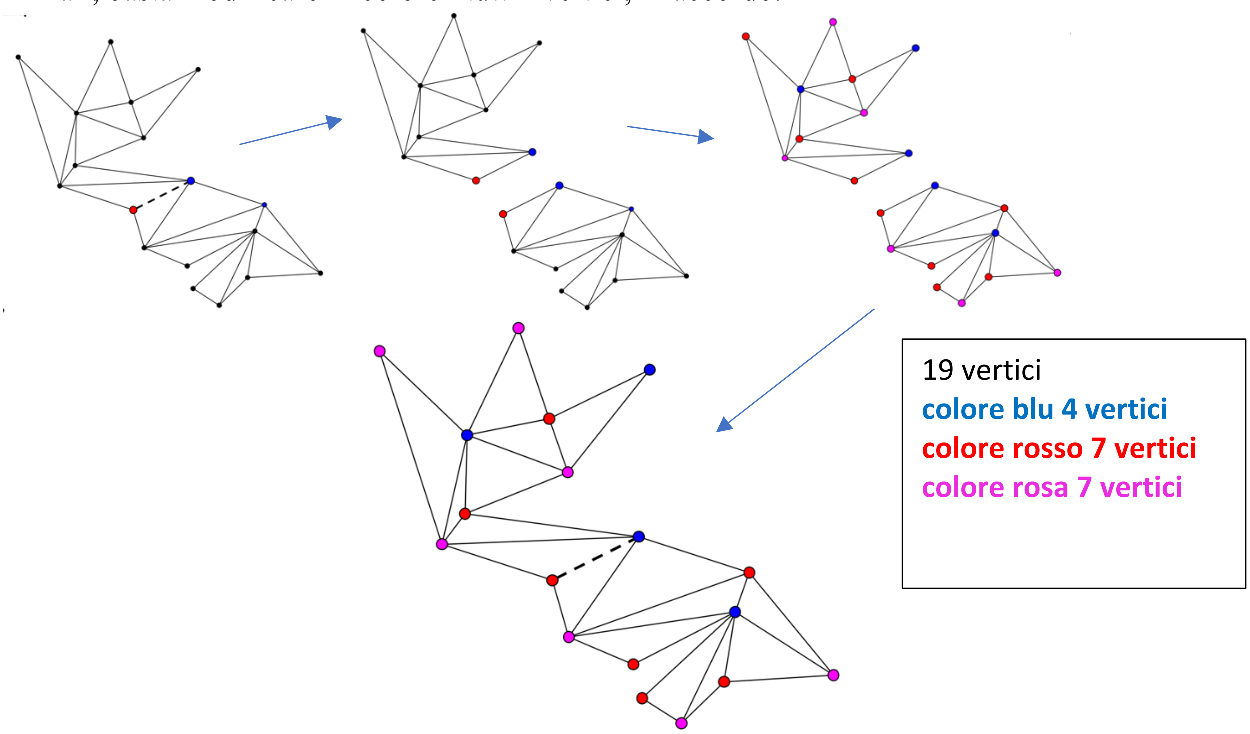


L'esempio visto illustra un risultato più generale:

In ogni poligono piano con n lati, triangolato come nel passo precedente e in cui siano assegnati colori distinti a due vertici di un triangolo, è possibile estendere la colorazione a tutti i vertici, in modo che i vertici di ciascun triangolo abbiano colori distinti.

Per la dimostrazione, osserviamo che per $n=3$ la tesi è vera. Se, invece, n > 3, allora possiano considerare una diagonale interna, assegnare due colori distinti ai suoi due vertici e considerare separatamente i due poligoni ottenuti tagliando lungo la diagonale. La colorazione della diagonale di estende a una colorazione dei poligoni più piccoli, e quindi al poligono iniziale (basta incollare nuovamente i poligono piccoli lungo la diagonale).

Se la colorazione così ottenuta del poligono non coincide con quella preassegnata sui due vertici iniziali, basta modificare in colore i tutti i vertici, in accordo.



Passo 3: dimostrazione del teorema di Chvátal.

Consideriamo il poligono con n lati che forma la galleria: suddividiamo in triangoli come nel passo 1 e coloriamone i vertici come nel passo 2.

Ricordiamo che ogni triangolo può essere ben presidiato disponendo una guardia in un qualsiasi vertice. Osserviamo che, in ogni triangolo, compaiono tutti e tre i colori e, quindi, per ogni fissato colore e per ogni triangolo, c'è un vertice del triangolo di quel colore. Possiamo, quindi, ben presidiare la galleria disponendo le guardie nei vertici di un colore fissato.

Per dimostrare il teorema di Chvátal è quindi sufficiente mostrare che c'è almeno un colore che compare al massimo $[n/3]$ volte.

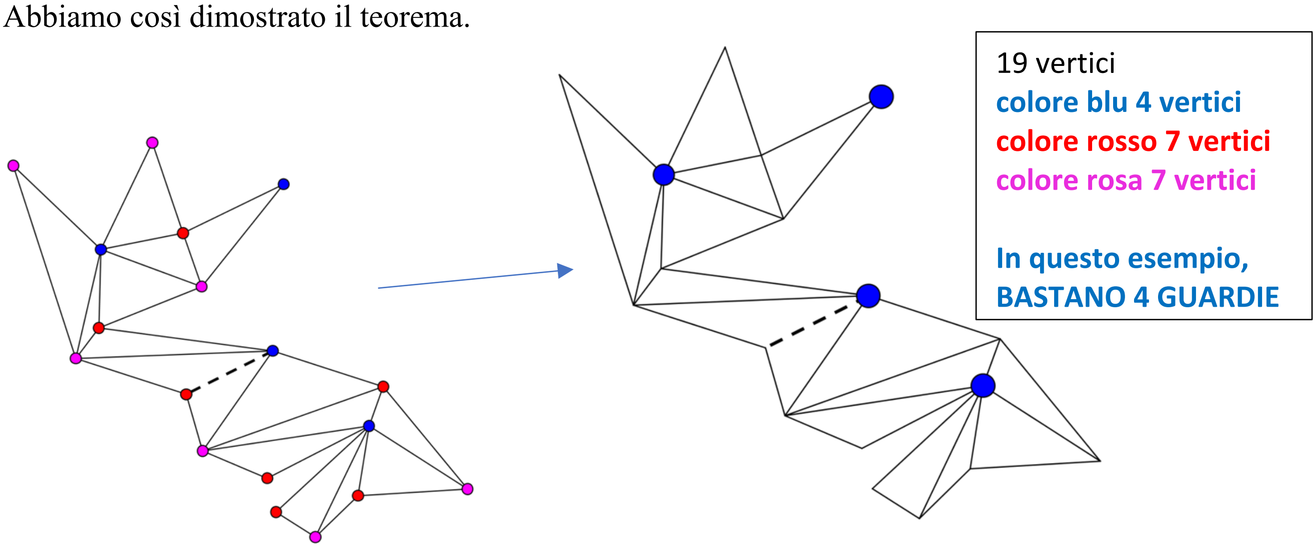
Osserviamo che, in effetti, almeno uno dei tre colori non viene utilizzato più di 1/3 delle volte. Infatti, indicando con x, y, z il numero di volte in cui compaiono, rispettivamente, i 3 colori, si deve avere che

$$x + y + z = n$$

Supponiamo che $x \leq y \leq z$. Se fosse $n/3 < x$, la somma sarebbe maggiore di n.

Dunque, $x \leq n/3$ e, poiché x è un intero, allora $x \leq [n/3]$.

Abbiamo così dimostrato il teorema.



Sul sito https://rawgit.com/hexahedria/math_198o_gallery/master/index.html#
è possibile

- costruire poligoni (i vertici possono essere spostati con il mouse; per creare un nuovo vertice e i corrispondenti lati: posizionare il mouse su un vertice preesistente, cliccare shift e contemporaneamente muovere il mouse fini alla posizione desiderata)
- provare a posiionare le guardie (se si vuole anche fuori dai vertici) visualizzando la parte ben presidiata
- ottenere una triangolazione e una disposizione delle guardie in ossequio al teorema di Chvátal.