



IV scuola d'autunno in didattica di matematica e delle scienze 4 - 6 ottobre 2019

Laboratorio: Geometria e percezione

Laura Tomassi, Daniele Pasquazi

Attività 1

Figure multiple di una superficie di base

Obiettivi generali

Percezione delle figure geometriche basata sulla sensorialità.

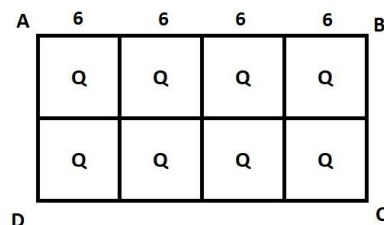
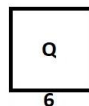
Obiettivi disciplinari

Superfici multiple di una di riferimento: rapporto di aree e dei perimetri.

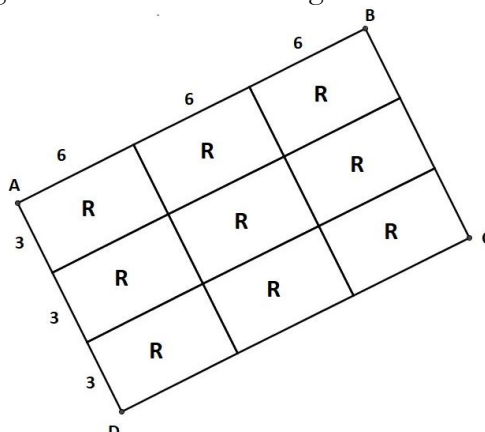
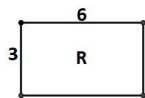
Prerequisiti (validi per tutte le attività): concetto di area, area del quadrato e del rettangolo (tuttavia con opportune modifiche delle attività si potrebbe prescindere da questi prerequisiti e utilizzare le seguenti proposte proprio per introdurre il concetto di superficie).

Di fronte ad esercizi di questo tipo circa il 65% degli **studenti** testati risponde **effettuando calcoli**: calcolo dell'area della figura di riferimento, poi area del rettangolo maggiore, determinazione del loro rapporto.

1) Quante volte l'area del rettangolo **ABCD** è più grande di quella del quadrato **Q**?



2) Quante volte l'area del rettangolo **ABCD** è più grande dell'area del rettangolo **R**?



E' emersa anche un'altra problematica: alcuni studenti non hanno chiaro in testa il significato della richiesta: "**quante volte**". Essi effettuano di fatto la sottrazione tra il numero di superfici unità del rettangolo maggiore e uno.

Le proposte didattiche seguenti mirano agli obiettivi preposti e anche a risolvere queste problematiche emerse.

Passo 1.

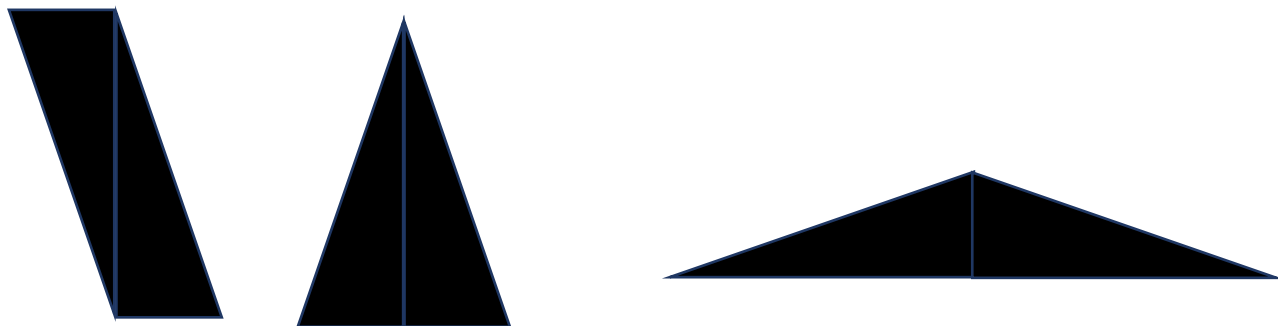
Agli studenti si consegnano almeno 3 triangoli come quelli qui di seguito raffigurati.

La prima ovvia considerazione è che i seguenti triangoli sono uguali tra di loro.

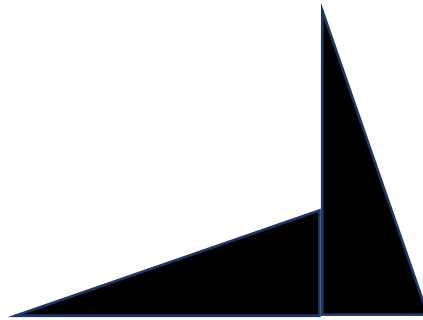


Problema. Costruisci un nuovo poligono che sia costruito unendo come si vuole, senza sovrapporre, 2 triangoli uguali dati.

Naturalmente si accettano le disposizioni più disparate a patto che siano corrette:



ma anche situazioni particolari.



Domanda: Quante spazio occupa questo poligono?

Tutti i ragazzi sono d'accordo nell'affermare che è il **doppio di quello di partenza**. Se si chiede:

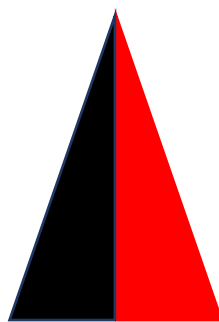
Domanda: “**quante volte** il poligono è più grande del triangolo?”

Le risposte non sono più univoche. C'è chi dice “due volte” c'è chi dice “una volta”. Chi risponde “due volte” sta considerando il nuovo poligono “multiplo” di quello di partenza. Chi risponde “una volta” sta pensando alla differenza di superficie tra i due poligoni rispondendo di fatto alla domanda: “**di quanto** è più grande?”. Questo è un punto su cui bisogna insistere molto. Pertanto appurato che una qualsiasi delle precedenti disposizioni di due triangoli viene a formare un nuovo poligono più grande di quello di partenza, si chiede:

Problema. Quanti poligoni A sono contenuti in B?



Poligono A



Poligono B

Poiché in B sono contenuti esattamente 2 poligoni A si dirà che B è due volte più grande di A (che equivale a dire il doppio).

A questo punto si pone la seguente questione:

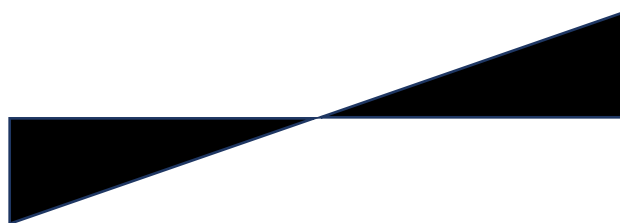
Problema. considerando sempre che $B > A$, di quanto è più grande.

Se si ha la possibilità di avere poligoni uguali di colore diverso, si riesce a porre l'attenzione sul fatto che in A e in B c'è almeno una parte di superficie in comune, uno spazio occupato uguale, il resto è in più e costituisce di quanto B è più grande di A. Quindi, in questo caso, B è una volta più grande di A. Quindi, è come se si effettuasse una "sottrazione" tra lo spazio occupato da B con quello di A.

Problema. I poligoni ottenuti che hanno superficie doppia di quello di partenza hanno anche il perimetro doppio?

Si lasciano gli studenti di vagliare le diverse possibilità: si provano a far toccare completamente due lati omologhi dei due triangoli oppure due non omologhi con uno dei due completamente contenuto nell'altro a partire da un vertice e non. Detti, p_1 il perimetro del triangolo e p_2 il perimetro del poligono doppio si ha in generale che p_2 non è mai il doppio di p_1 tranne in un caso. Qual è?

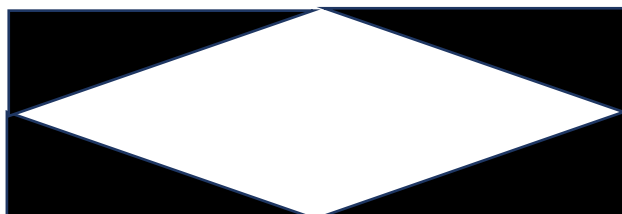
Anche in questo caso, si lasciano liberi gli studenti di manipolare i loro materiali in attesa di risposte che, in genere, non tardano. Debbono però realizzare poligoni poco usuali perché abbiano il perimetro p_2 doppio di p_1 .



Si conclude allora che, detta A l'area del triangolo e B quella del poligono costituito da due triangoli che non s'intersecano, è sempre vero che $B = 2A$ mentre in generale $p_B < 2p_A$ tranne nel caso in cui i due triangoli si toccano in un vertice qualsiasi.

Mettendo a disposizione degli studenti **più triangoli** si ripete di fatto tutta la precedente attività nella quale a partire dal triangolo A si chiede di costruire un poligono, detto $4A$, che sia costruito da 4 triangoli come A senza sovrapposizioni.

Anche in questo caso, il perimetro di $4A$ non è il quadruplo di A . Se si chiede di costruire un poligono per il quale invece sia vero, alcuni studenti costruiscono la seguente figura.



Si comprende facilmente come la parte occupata dai 4 triangoli abbia la stessa area del buco, oppure che il rettangolo "pieno" è il doppio del rombo interno. Quest'ultimo esercizio è importante per stimolare gli allievi a considerare due superfici evidentemente diverse (rettangolo e rombo) ma che hanno un evidente rapporto tra le aree.

Esercizio. Verifica effettivamente che il buco sia a forma di rombo.

Attività 2

Le figure equicomposte

Obiettivi generali

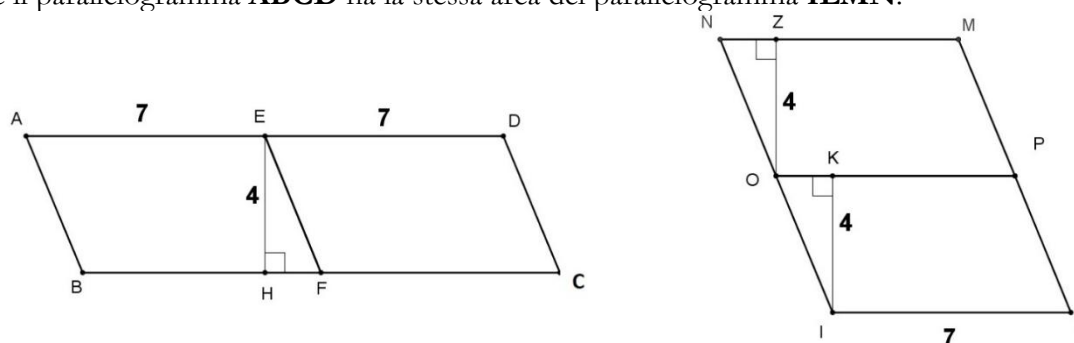
Percezione delle figure geometriche basata sulla sensorialità.

Obiettivi disciplinari

Figure equicomposte: rapporto tra le superfici e tra i perimetri.

Di fronte ad esercizi come il seguente si risponde tipicamente effettuando calcoli, affermando che i due poligoni hanno la stessa base e la stessa altezza (senza specificare di quali poligoni si sta parlando).

Perché il parallelogramma **ABCD** ha la stessa area del parallelogramma **ILMN**?



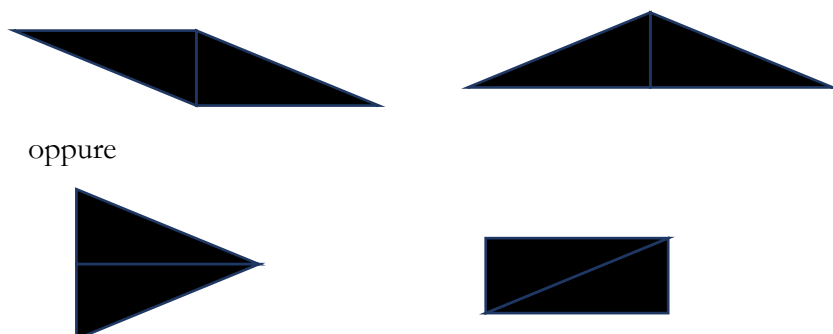
Tra gli studenti che hanno risposto sostanzialmente in modo corretto, evitando anche i calcoli, quasi nessuno ha utilizzato le parole "poligoni equicomposti". Eppure erano parole a loro note. Quello che è meno noto si è verificato essere il significato che questi attribuiscono a tale parola. Anche questo punto è da approfondire.

Passo 1.

Si consegnano 4 triangoli uguali.

Problema. Costruisci due poligoni diversi che occupino la stessa superficie.

Ad esempio



Essendo composti dallo stesso numero di triangoli uguali si dicono **equicomposti**. È di assoluta importanza che siano i ragazzi a scoprire la caratteristica principali di questi nuovi poligoni e ad enunciare che sono **costituiti dallo stesso numero di triangoli uguali**.

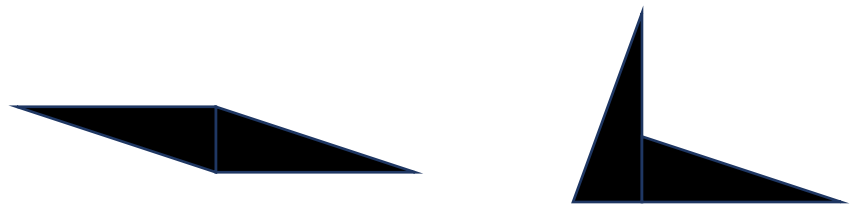
Problema. I due poligoni hanno gli stessi perimetri?

Di fronte a questa domanda dovranno emergere osservazioni utili a fare le corrette conclusioni. E cioè che se i due poligoni sono costituiti da triangoli che si toccano in lati omologhi allora i perimetri saranno gli stessi. Altrimenti no.

Equivalenti e stesso perimetro

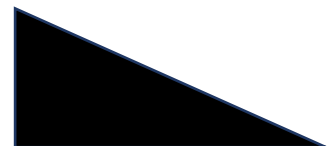
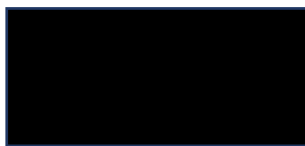


Equivalenti e diverso perimetro



Riteniamo queste attività estremamente formative permettendo ai ragazzi di fare riflessioni autonome, che, unitamente ad una serie di esercizi da svolgere, permettono di toccare con mano la differenza tra il concetto di uguaglianza, equivalenza ed isoperimetria.

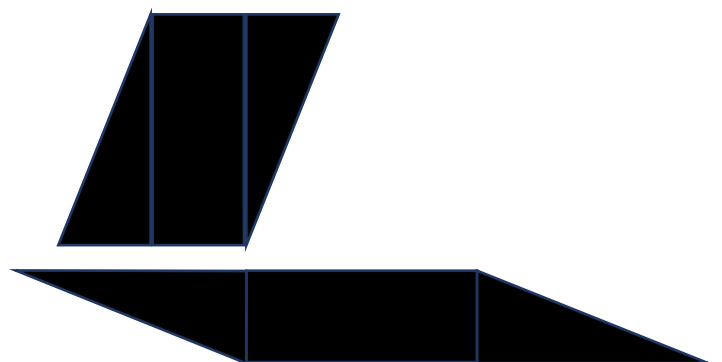
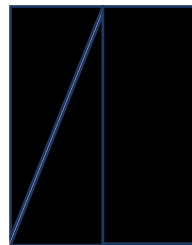
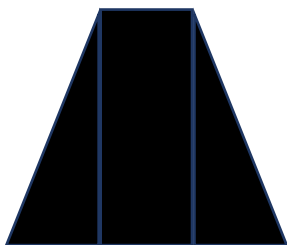
Attività ancora più interessante è consegnare, ad esempio, 3 poligoni non tutti uguali. Ad esempio, un rettangolo e due triangoli uguali che abbiano un lato uguale ad uno del rettangolo.



La domanda è la stessa di prima:

Problema. Costruisci, con i poligoni a disposizione, due poligoni diversi che abbiano la stessa superficie.

Queste alcune risposte tipo:



Anche per questi poligoni si parla di equiscomponibilità. Si possono far condurre analoghi studi ai precedenti per quanto riguarda i perimetri.

Attività 3

Equivalenza tra figure diverse (ottenute per differenza di superfici)

Obiettivi generali:

Approccio interdisciplinare agli argomenti

Interpretazione testo scientifico

percezione delle figure geometriche

sviluppo capacità sensoriali percettivo geometriche.

Obiettivi disciplinari

Ricerca etimologia delle parole

Ricerca del significato delle parole

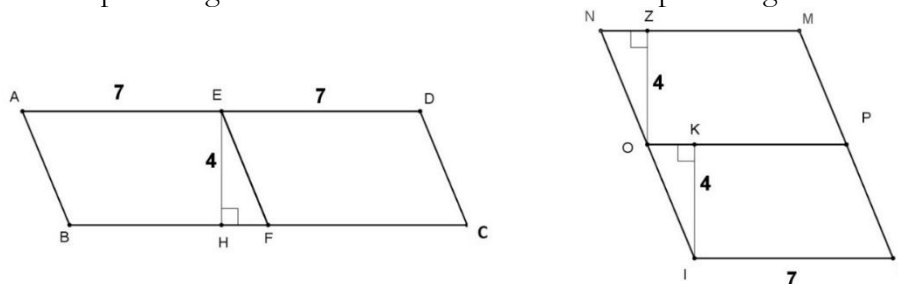
Costruzione di un vocabolario personale

Distinzione di significato tra il concetto di uguaglianza, equivalenza, isoperimetria

Confronto fra equivalenza e uguaglianza ottenute per differenza di figure uguali.

Nelle risposte fornire dagli studenti in esercizi come il seguente

Perché il parallelogramma **ABCD** ha la stessa area del parallelogramma **ILMN**?



troppi studenti rispondono: "perché sono uguali". Tale errore dovrebbe derivare da una confusione tra il significato dei termini "uguale" e "equivalente".

Passo 1

Si ritiene necessario conoscere e saper applicare alcuni principi che non trovano applicazione solo nella geometria: questi sono le Nozioni Comuni presenti nel primo libro degli Elementi di Euclide. Si presentano agli studenti (sicuramente già a partire da una I media) nella versione di Commandino:

Laboratorio: Geometria e percezione, Laura Tomassi, Daniele Pasquazi.

LIBRO PRIMO.		7
<i>Et per essere dimostrato ha bisogno di molte diffinitioni, Et theoremi, il cui comento Euclide etiamio come theorema ne dimostra. ma di questo si dirà di sotto al suo luogo.</i>		
ASSIOMI, OVERO COMMVNI NOTITIE.		
I.		
Quelle cose che sono vguali ad vna medesima, sono anchora fra loro vguali.		
II.		
Se alle cose vguali, si aggiungono cose vguali, tutte sono vguali fra loro.		
III.		
Se dalle cose vguali si traggono cose vguali, etiamio le rimanenti sono vguali fra loro.		
IIII.		
Se alle cose difvguali si aggiungono cose vguali, tutte sono difvguali.		
V.		
Se dalle cose difvguali si traggono cose vguali, le rimanenti sono difvguali.		
VI.		
Le cose che sono doppie di vna medesima, sono vguali fra loro.		A
VII.		
Le cose che sono la metà di vna medesima, sono fra loro vguali.		
VIII.		
Quelle cose che conuengono & si adattano bene insieme, sono vguali.		B
IX.		
Il tutto è maggiore della sua parte.		
X.		
Due linee rette non comprendono spatio alcuno.		C
IL COMMANDINO.		

Tale versione, scritta in volgare rinascimentale, costituisce per i ragazzi un utile esercizio di traduzione nel linguaggio corrente. Si possono prendere quindi molteplici spunti proprio per apprendere o magari semplicemente potenziare alcune buone "pratiche" come la ricerca di parole non più di uso comune, il loro significato, la loro etimologia, favorendo anche la costituzione di un vocabolario personale. Consegnata tale Tavola ai ragazzi singolarmente o in coppia, si può chiedere direttamente loro cosa comprendono da quanto scritto. Si può anche chiedere di fare **esempi concreti** in cui tali nozioni siano valide e di **tradurle in un disegno**.

È presumibile che emergano problematiche relativamente all'interpretazione della parola "uguale": qualche studente potrebbe rendersi conto che questa possa essere interpretata effettivamente nel senso di uguaglianza in oppure nel senso di equivalenza. Ma: cosa vuol dire uguale? Inoltre: perché nei testi scolastici si è sentita la necessità d'introdurre un ulteriore termine che è quello di congruenza che ha significato diverso ma affine con quello di uguaglianza? Tali termini possono generare confusione tra gli studenti?

Passo 2

La NC VIII (probabilmente spuria ma didatticamente molto utile) sostanzialmente afferma che se due enti matematici, come due segmenti, hanno i rispettivi estremi che si "adattano bene insieme" ossia che coincidono e quindi anche tutti i punti che costituiscono i due segmenti, allora sono da intendersi uguali. Nel caso di superfici? Due superfici sono uguali se i suoi vertici coincidono, così i suoi lati così i suoi angoli. Pertanto, due figure sono uguali se con un movimento rigido si possono "sovrapporre" i vertici, i lati e gli angoli delle due figure. Naturalmente, due superfici uguali nel senso appena descritto avranno anche la medesima estensione superficiale pertanto saranno anche equivalenti.

In conclusione, si ritiene opportuno mantenere due termini distinti uno per l'uguaglianza e un altro per l'equivalenza: il primo valido per figure che con un movimento rigido vengano ad avere punti, lati, angoli coincidenti e quindi anche la loro superficie; il secondo valido invece per figure non uguali ma aventi la medesima estensione superficiale.

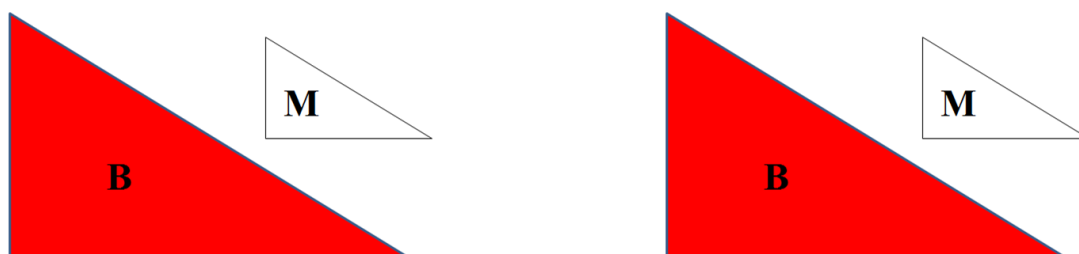
Laboratorio: Geometria e percezione, Laura Tomassi, Daniele Pasquazi.

Poiché due figure sono congruenti se sovrapposte divengono uguali, si ritiene che questa definizione sia ridondante e se ne possa fare a meno.

Quindi si vuole sollecitare gli studenti a riflettere sulla differenza tra il significato di uguaglianza e quello di equivalenza; si consegna a ciascuno una coppia di figure identiche come ad esempio due strisce, due triangoli, due trapezi ecc. Si direbbero uguali? Perché? Viene in mente ai ragazzi di sovrapporre le figure constatando la coincidenza delle parti che le compongono? Le coppie di triangoli uguali, o le coppie di trapezi hanno anche la stessa estensione? Occupano lo stesso spazio? Hanno dunque la stessa superficie? Cioè, sono equivalenti? Accertato la padronanza della differenza di significato dei due termini, si passa alla successiva attività.

Passo 3.

Si consegnano ai ragazzi **due figure mobili** (due triangoli bianchi detti **M** in figura) che possano muoversi all'interno le rispettive cornici (quella rossa **B**, avente stessa forma) o *basi*. La necessità di consegnare due copie delle stesse figure nasce dal fatto che, in questo modo, gli studenti hanno costantemente davanti agli occhi gli oggetti da confrontare.



Innanzitutto, fare in modo che i ragazzi rilevino l'uguaglianza di figure. Quindi si chiede, muovendo **M** in **B** di fare osservazioni sulla superficie rossa "rimanente" **B - M**.

In che posizioni di **M** all'interno del rispettivo **B**, le due superfici differenza **B - M** sono proprio uguali?

I ragazzi quindi sono invitati a posizionare la figura **M** dentro la figura **B**. Deve emergere che nella maggior parte dei casi le due superfici **B - M** sono diverse. Sono uguali solamente nel caso in cui la superficie mobile si posiziona nella stessa posizione relativa all'interno della base. Naturalmente, essendo uguali, saranno anche equivalenti.



Ma cosa accade negli altri casi? I ragazzi debbono scoprire che in generale le due superfici **B - M** sono diverse.



Tuttavia, essi debbono rilevare che pur essendo diverse sono sempre equivalenti. Quindi una prima conclusione a cui si è giunti è che se a due superfici uguali si tolgono due superfici uguali (propriamente contenute nelle prime) le superfici rimanenti non sono sempre uguali mentre è sempre vero che sono equivalenti. **Questo risultato è molto importante perché attraverso il lavoro svolto si comincia a riflettere sulla diversità dei termini uguaglianza ed equivalenza che spesso vengono confusi dagli studenti.**

Questo tipo di attività riservata allo studio delle figure diverse ma equivalenti è ritenuta agevole perché le superfici da confrontare sono sempre davanti agli occhi degli studenti. Il passo successivo sarà quello invece di eliminare un triangolo rosso ed uno bianco costringendo lo studente a tenere a memoria le figure che man mano passerà in rassegna. Si vedrà meglio nella prossima attività.

Passo 4.

Si farà lavorare i ragazzi con una sola base e un solo triangolo; quest'ultimo verrà fatto muovere all'interno della base triangolare. L'osservazione degli studenti è diciamo resa più difficoltosa dal fatto che, posto il triangolo in una certa posizione, si vede ovviamente la superficie differenza, chiamiamola $B_1 - M_1$. Spostando il triangolo si vedrà la nuova superficie $B_2 - M_2$ ma non si avrà più la possibilità di vedere la precedente $B_1 - M_1$ che pertanto dovrà essere solo trattenuta in memoria. La conclusione a cui debbono arrivare i ragazzi è che tutte le superfici $B_1 - M_1, B_2 - M_2, B_3 - M_3, \dots, B_i - M_i$ non sono mai uguali tra di loro ma sempre equivalenti.

Esercizio. Cosa si può dire sul perimetro delle due superfici $B_i - M_i$? È sempre lo stesso?

Un passaggio successivo è far rendere conto i ragazzi che queste prime conclusioni non dipendono dai materiali consegnati. Pertanto, si possono proporre problemi del tutto simili utilizzando materiali diversi.

Attività 4

Equivalenza tra superfici diverse: quadrature in moto (parte 1)

Obiettivi generali

Percezione delle figure geometriche basata sulla sensorialità

Obiettivi disciplinari

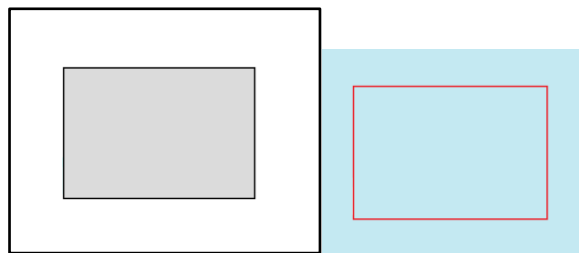
Equivalenza tra superfici diverse mediante la quadratura in moto

Anche queste attività, che prendono spunto da disegni di Leonardo da Vinci, si vuole portare l'attenzione degli studenti su superfici diverse ma che siano equivalenti. Le figure non saranno contemporaneamente presenti sempre davanti agli occhi degli studenti. Alla situazione di partenza, infatti, sarà presente solo una delle due. Ciò, rispetto ai casi precedenti, costituirà una difficoltà in più. Si richiederà anche di determinare esplicitamente l'area di tale superfici. Invece, al termine del movimento di figure opportune, i ragazzi avranno la possibilità di vedere entrambe le superfici tra di loro equivalenti (per sottrazione). Per la nuova superficie scoperta equivalente a quella di partenza, sarà molto semplice determinarne l'area (è un rettangolo).

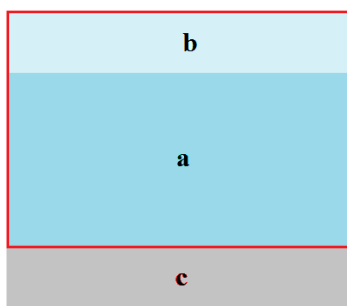
Si procede quindi in maniera propedeutica sottoponendo inizialmente situazioni più semplici che introducono quelle basate sui disegni di Leonardo. Nelle prime attività, il materiale consiste in una *tavola*

Laboratorio: Geometria e percezione, Laura Tomassi, Daniele Pasquazi.

sulla quale è disegnata un poligono o una superficie curvilinea che costituisce la *figura base* e un lucido, la *figura mobile*, sul quale ne è riportata un'altra. Solo nella prima e nella seconda attività la figura base è uguale a quella mobile. Quest'ultima avrà sempre il bordo rosso per facilitare il suo riconoscimento perché, comune si vedrà, dovrà essere sovrapposta alla base.



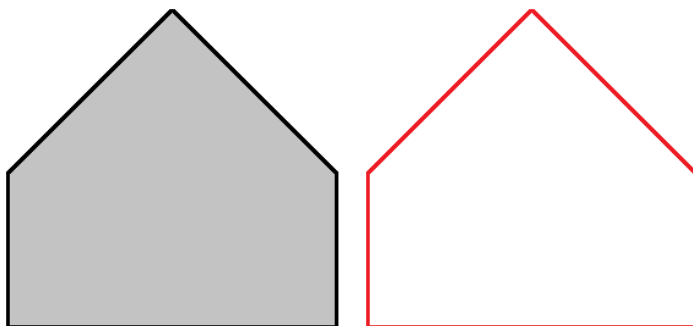
I ragazzi, non appena hanno tra le mani il materiale, congetturando una possibile uguaglianza tra le figure osservate, sovrappongono il lucido sulla tavola facendo coincidere perfettamente i rettangoli e constatando così la loro effettiva uguaglianza. Sollecitandoli a eseguire una traslazione lungo una qualunque direzione parallela ai lati (per esempio lungo il lato più corto come in figura), osserveranno la formazione di ben sei rettangoli, anche se va detto che non tutti sono in grado di percepirli immediatamente: quello di partenza, che ora chiameremo **c + a**, poi **a + b**, **c + a + b**, **c**, **a**, e **b**.



Solitamente, i ragazzi si accorgono immediatamente dell'uguaglianza tra i rettangoli **c** e **b** semplicemente perché hanno stessa base e stessa altezza. Si fa notare che lo spazio racchiuso da **b** è, in ogni istante, lo spazio acquisito dalla figura mobile nel verso della traslazione. Contemporaneamente, poiché **c** è lo spazio che questi lascia nel verso opposto i ragazzi riconoscono questo movimento è proprio quello descritto dalle parole di Leonardo e ciò li affascina molto: "la cosa che si muove acquista tanto di spazio, quanto ella ne lascia".

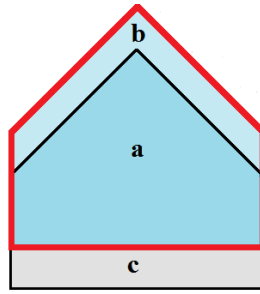
Si consegna ora agli studenti una nuova Tavola sulla quale c'è la figura base, la "casetta", con il relativo lucido avente la figura mobile: le due figure sono identiche.

Consideriamo questo un caso leggermente diverso dal precedente avendo spezzato in due uno dei due lati lunghi del rettangolo.



Dopo la solita sovrapposizione e la conseguente traslazione, l'uguaglianza tra **c** e **b** è, in questo caso, esclusa per ovvietà mentre in generale non si sarà affatto convinti della loro equivalenza.

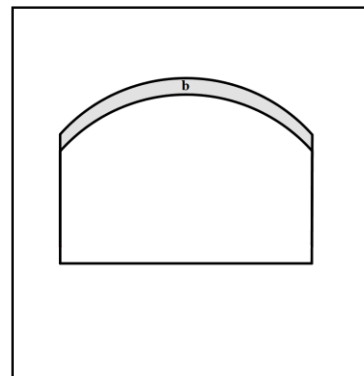
Laboratorio: Geometria e percezione, Laura Tomassi, Daniele Pasquazi.



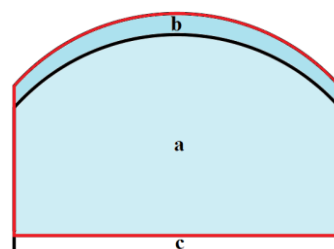
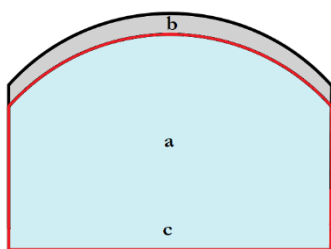
Tipicamente conviene far fare un passo indietro andando a rivedere il precedente problema. Osservando la figura ad esso relativa è opportuno che i ragazzi portino la loro attenzione sulla superficie racchiusa dal bordo rosso del lucido prima del suo movimento, cioè su $\mathbf{c} + \mathbf{a}$ e alla fine dello stesso, cioè su $\mathbf{a} + \mathbf{b}$. Poiché l'area della figura racchiusa deve essere sempre la medesima ne consegue necessariamente che $\mathbf{b} = \mathbf{c}$ per la già citata Nozione Comune 3 degli Elementi di Euclide. Naturalmente, nel caso del rettangolo, è la medesima conclusione a cui si era già pervenuti ma la deduzione dell'equivalenza delle superfici $\mathbf{b}$ e $\mathbf{c}$ per mezzo della proprietà euclidea è utilizzabile in generale in quanto applicabile per figure qualunque e per questo è molto importante. Si può verificare infatti che, tornando all'ultimo problema posto, i ragazzi deducono immediatamente la soluzione del problema.

Pensando ancora ad una progressione didattica che proponga situazioni di difficoltà crescente si possono proporre figure aventi, invece che un lato spezzato in due, un lato curvilineo. Riteniamo, inoltre, proporre anche una nuova tipologia di problemi che prevedano sempre una strategia risolutiva basata sul movimento ma applicata in situazioni sempre nuove sempre per non abituare gli studenti a rispondere in maniera meccanica ma ragionando di volta in volta.

Nel seguente problema, ad esempio, si consegna una nuova tavola con relativa base e si chiede questa volta di determinare esplicitamente l'area della superficie $\mathbf{b}$ di quest'ultima; si avrà sempre a disposizione il lucido relativo che, da questo caso in poi, presenterà una novità: non racchiuderà più l'intera figura ma solamente una sua parte come quella bianca in figura. Alla sovrapposizione gli studenti si accorgono immediatamente della novità ma solitamente non ne vengono sconvolti.



Sensibilizzati dal lavoro precedente, infatti, si renderanno conto di doversi concentrare ancora una volta sull'area racchiusa dalla superficie rossa della figura mobile.



Questa, analogamente a prima, nel primo caso contiene la superficie $c + a$ mentre, nel secondo caso, $a + b$ da cui, ancora una volta si comprenderà che l'area b sarà uguale a quella del rettangolo c e quindi facilmente calcolabile una volta misurati i lati di quest'ultimo.

Attività 5.

Equivalenza tra superfici diverse: quadrature in moto (parte 2)

Obiettivi generali:

sviluppo capacità sensoriali percettivo geometriche.

Strategie risolutive per problemi di equivalenza

Obiettivi disciplinari

Equivalenza tra superfici diverse.

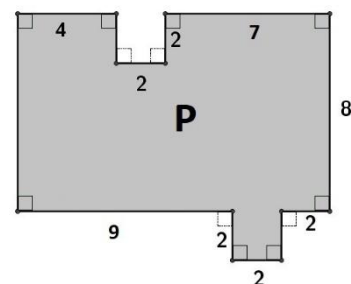
Quadratura delle figure curvilinee di Leonardo mediante il moto.

Determinazione della superficie di figure con disordini di struttura.

Le finalità di questa attività sono le stesse delle precedenti: scoprire l'equivalenza tra una superficie curvilinea ed un'altra rettilinea, tipicamente un rettangolo, per la quale sia molto semplice determinarne l'area. Queste attività, che prendono spunto dai disegni di Leonardo, sono realizzate con materiali diversi rispetto ai precedenti. Questi, infatti, portano con sé una difficoltà in più: all'atto iniziale è presente sola la superficie curvilinea di Leonardo della quale si vuole calcolarne l'area. Poi con un movimento opportuno dei materiali a disposizione si scopre la sua equivalenza con un rettangolo. Ma, nel fare questo movimento, scompare la figura iniziale che quindi dovrà essere mantenuta in memoria.

Queste attività costituiranno un trattamento volto ad eliminare queste difficoltà che, probabilmente, rendono tortuosa la ricerca di una strategia risolutiva di problemi del tipo:

Calcola l'area del poligono di color grigio **P** in figura.



Questi sono gli errori tipici che sono stati commessi

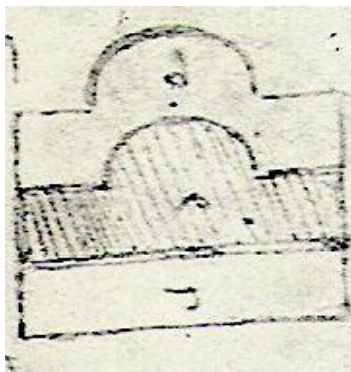
- corretta determinazione dei lati
- Scomposizione in somma di poligoni
- Determinazione del perimetro al posto dell'area.

Laboratorio: Geometria e percezione, Laura Tomassi, Daniele Pasquazi.

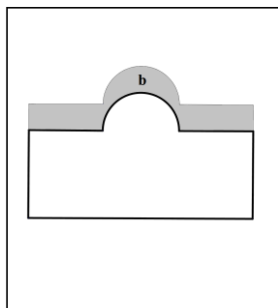
E' evidente che i primi due punti sono legati a difficoltà percettive della figura geometrica.

Passo 1.

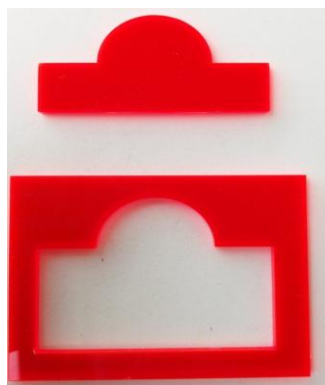
Partiamo dallo studio della seguente figura. A titolo di esempio, riportiamo la didascalia relativa: «se da due equali si leva equali, equali fieno i rimanenti. Leva a dal ab , resta b ; e leva a dallo ac resta c eguale al b ».



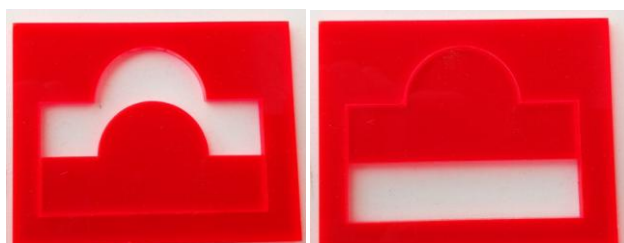
Pertanto, nella nuova attività si vuol fare determinare esplicitamente l'area della superficie **b** riproposta nella tavola consegnata ai ragazzi (anche nel disegno originale la superficie considerata è indicata con la lettera **b**: non dimenticare che le lettere erano scritte in maniera speculare).



Oltre alla tavola si consegna ai ragazzi un materiale, diverso dal precedente, costituito da una cornice, che coprirà in questo caso il ruolo di base e un'opportuna figura mistilinea che si potrà muovere nel suo interno che sarà dunque la figura mobile. Quest'ultima, come del resto la cornice, sono entrambe realizzate in plaxiglass. Nella sua diversità tale materiale mantiene le medesime caratteristiche del precedente perché realizzato per perseguire gli stessi obiettivi: nella base, realizzata su tavola, si porta l'attenzione su di una superficie che di fatto è quella racchiusa nella cornice. Il «ruolo» della figura mobile rossa disegnata sul lucido è assunto da quella che si muove nella cornice stessa.



Grazie all'esperienza acquisita nelle precedenti attività di solito i ragazzi inseriscono la figura mobile nella cornice. Viene chiesto loro, come punto di partenza, di posizionarla in modo da ricreare la stessa situazione indicata dal disegno raffigurato sulla tavola. Qualora poi non venga in mente a nessuno, proponiamo di sovrapporre il tutto sulla tavola per poter meglio confrontare tra di loro le superfici coinvolte (le misure delle figure coincidono naturalmente).



Nella situazione iniziale, la superficie **b** sarà proprio data dalla differenza tra la base e la figura mobile; muovendo quest'ultima fino alla posizione opposta, la differenza questa volta sarà un rettangolo naturalmente equivalente a **b** e che permetterà di rispondere alla domanda posta.

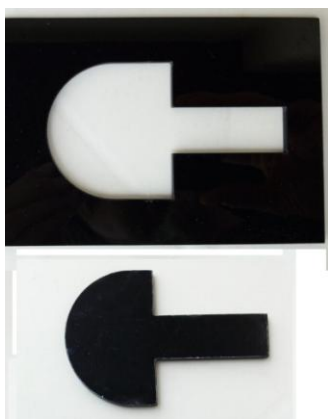
Passo 2.

La seguente figura di Leonardo suggerisce invece un problema leggermente diverso dai precedenti: come determinare l'area **b** nella seguente figura?

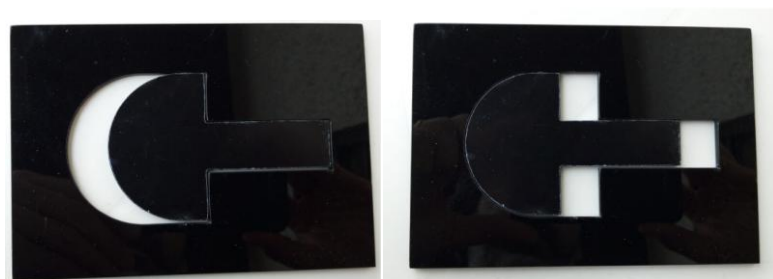


(fare la tavola)

Con il seguente materiale a disposizione



i ragazzi, ormai esperti, introducono solitamente la figura mobile nella base in modo che abbia la stessa posizione indicata dalla tavola; muovendola, si accorgono dell'equivalenza tra la superficie **b** e, in questo caso, tre piccoli rettangoli che, volendo, pensati posizionati in maniera opportuna, formeranno ancora una volta un unico rettangolo.



Passo 3.

La determinazione dell'area della superficie **a** della seguente figura di Leonardo presenta solitamente molte difficoltà rispetto alle precedenti: come si vedrà, non sarà più sufficiente una semplice traslazione della figura mobile all'interno della base per determinare la soluzione del problema posto.



Il materiale che si mette a disposizione degli studenti è costituito sempre da una figura base interna ad una cornice



e, questa volta, due figure mobili, le quali, inserite opportunamente all'interno della base, permettono di riprodurre la figura di Leonardo.



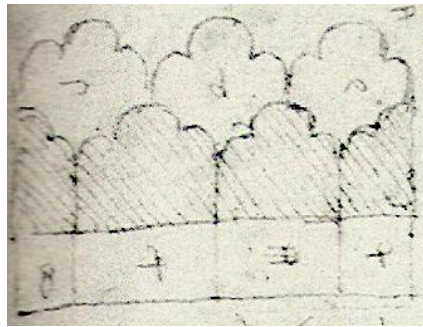
Poiché nella posizione in cui si trovano le due figure mobili non possono effettuare alcun movimento si deduce che, in questo caso, non si potrà più attuare la solita strategia risolutiva. Tuttavia, il fatto di non essere le due figure inseparabili, fa venire in mente solitamente di fare l'unico spostamento possibile ossia d'invertirle.



A questo punto, nella nuova disposizione, potranno essere messe in moto scoprendo l'equivalenza della figura con un rettangolo.



Raggiunto questo risultato si possono dunque comprendere le parole di Leonardo che costituiscono la didascalia all'ultima figura esaminata: *abc* vale *defg*¹. La risoluzione del problema relativo a questa figura porta molta soddisfazione ai ragazzi che si entusiasmano nell'essere riusciti a interpretare le parole di Leonardo considerate inizialmente incomprensibili.



Attività 6

Equivalenza tra superfici diverse ottenute da sovrapposizioni

Obiettivi generali

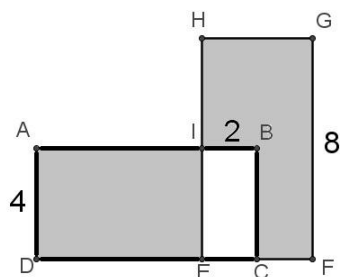
percezione delle figure geometriche parzialmente sovrapposte
sviluppo capacità sensoriali percettivo geometriche.

Obiettivi disciplinari

Equivalenza di superfici

Consideriamo il seguente problema.

I due rettangoli **ABCD** e **EFGH** sono uguali:
perché i due poligoni colorati **ADEI** e **CFGHIB**
hanno la stessa area?

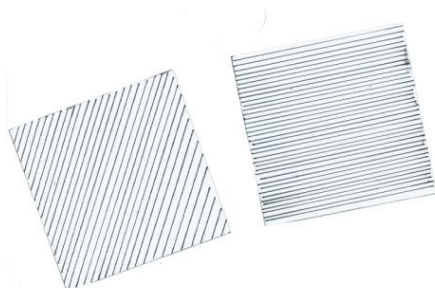


La maggior parte degli studenti testati non risponde a questo esercizio. Le difficoltà principali emerse riguardano fondamentalmente la percezione delle figure. Come conseguenza dell'intersezione delle due figure iniziali, cioè i due rettangoli, gli studenti generalmente non riescono più a percepire separatamente le diverse parti. La parte in comune, sostanzialmente, ostacola le loro deduzioni. Ne deriva una confusione che porta a confondere le parti dei singoli oggetti geometrici. Per esempio, si dice che i due poligoni colorati hanno la stessa area perché uguali. Ora se si voleva dire "equivalenti" si andava incontro ad una tautologia; se s'intendeva proprio quanto si è affermato, ossia uguali, si evidenzia un vero e proprio problema percettivo. E' anche possibile che s'intendesse che avessero area uguale, ma anche in questo caso, non si dà nessun contributo alla soluzione del problema. Non è da escludersi anche una errata lettura del testo.

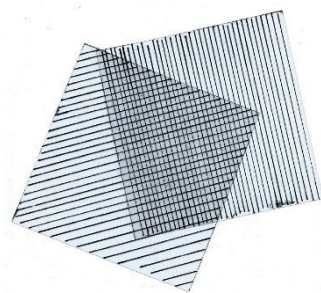
Passo 1

Si parte consegnando ai ragazzi due figure uguali. Si vuole far riflettere, dapprima, sull'estensione delle superfici differenza che si ricavano dall'intersezione parziale di due figure uguali.

Si consegnano pertanto due quadrati uguali e trasparenti distinti da due colori diversi o, come nel caso di quelli in figura, da un tratteggio differente.



Sovrapponendoli si evidenzieranno superfici di diverso "colore":



In particolar maniera ci sarà una superficie con rigatura "orizzontale", una con rigatura "verticale" e una "quadrettata". In questo caso non si riesce a quantificare l'estensione delle tre superfici non essendo nessuna di

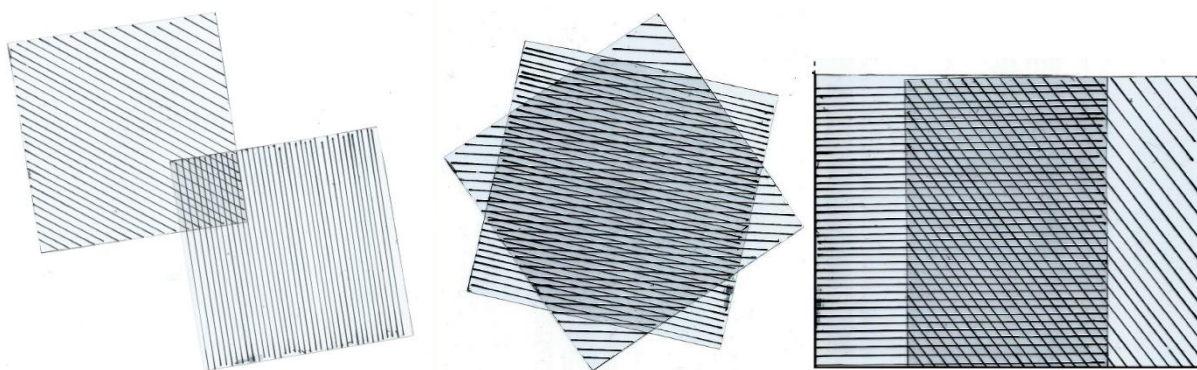
Laboratorio: Geometria e percezione, Laura Tomassi, Daniele Pasquazi.

queste riconducibile a figure note. Tuttavia: come sono tra di loro le superfici differenza con rigatura “orizzontale” e “verticale”? Sono uguali o diverse? Sono equivalenti?

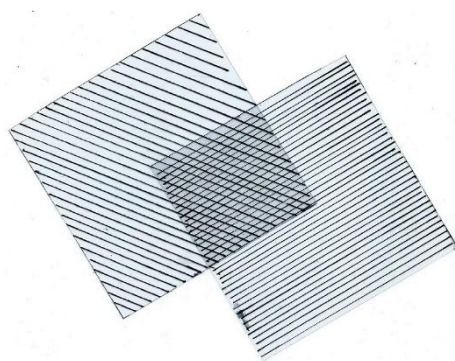
Ascoltare le osservazioni degli studenti e procedere solo quando si comprende che abbiano capito che le due superfici siano equivalenti seppur diverse.

Passo 2

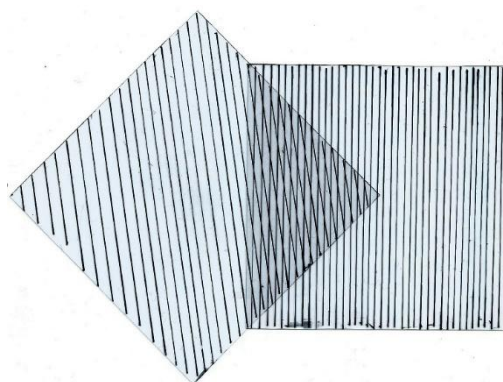
Successivamente, si chiede ai ragazzi di sovrapporre i due quadrati cercando di trovare posizioni reciproche tra i due tali che si riesca a quantificare l'area della superficie intersezione misurando con un righello i suoi lati. Le seguenti sono possibili soluzioni del problema.



Oppure, si può chiedere se si riesce a stabilire, senza mettere a disposizione alcun righello, in che rapporto sia la superficie intersezione con quella dei quadrati dati. Le seguenti sono possibili soluzioni.



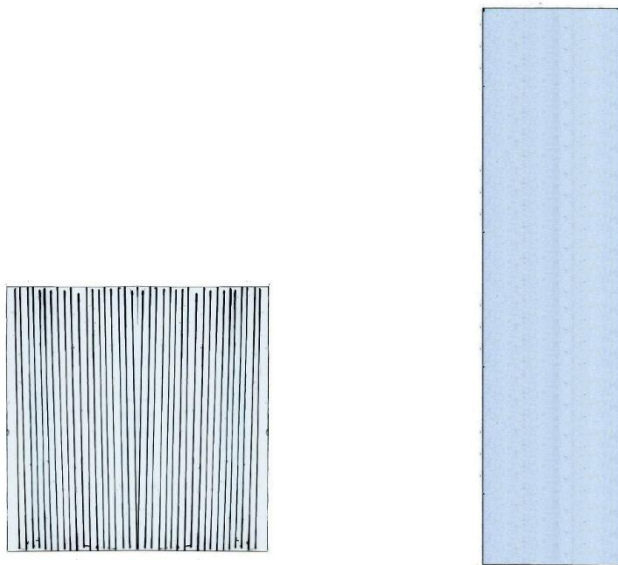
Esempio di superfici differenza uguali e equivalenti.



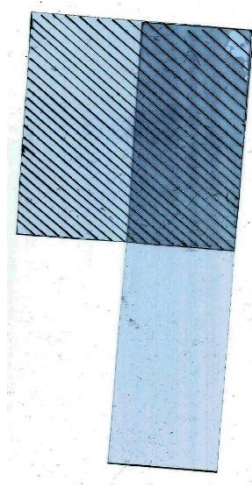
Esempio di superfici differenza diverse ma equivalenti (e quantificabili).

Passo 3.

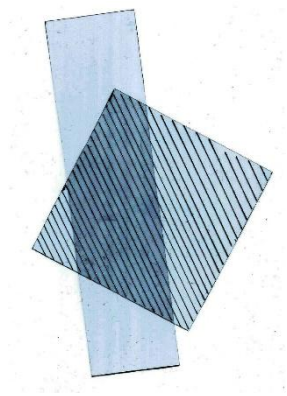
A questo punto si lascia agli studenti uno dei due quadrati precedenti ed un rettangolo. Hanno la stessa area?



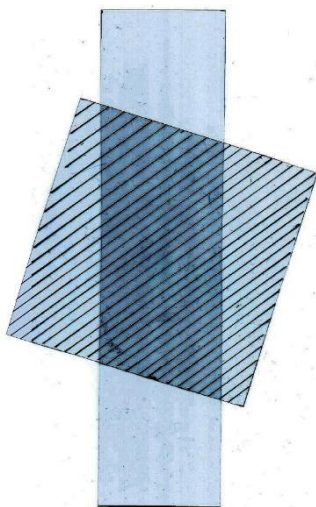
Sarà interessante vedere in che modo i ragazzi si adoperano per rispondere alla domanda: in particolar maniera si dovrà rilevare se l'approccio sarà di tipo aritmetico, misurando i lati delle figure e determinando di conseguenza le rispettive aree o se invece se propenderà più per un approccio percettivo geometrico manipolando i materiali in dotazione e posizionandoli in maniera opportuna.



Stabilito che le due figure sono equivalenti si potranno proporre problemi simili a quelli precedenti esaminando situazioni in cui l'intersezione non dà luogo a figure note



e situazioni in cui invece l'intersezione è determinabile (come nell'esempio precedente) o indirettamente (nel seguente parallelogramma l'altezza è determinabile con un righello).



Attività 7

Equivalenza tra parallelogrammi e tra triangoli

Obiettivi generali

Percezione delle figure geometriche basata sulla sensorialità

Obiettivi disciplinari

Equivalenza tra parallelogrammi aventi base in comune o uguale e racchiusi tra le stesse parallele

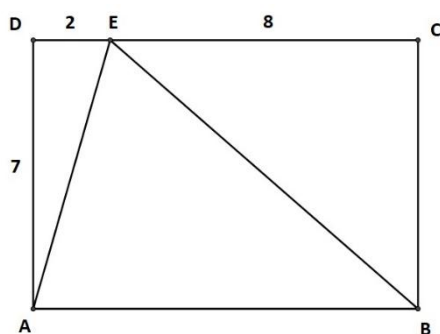
Equivalenza tra triangoli aventi base in comune o uguale e racchiusi tra le stesse parallele.

Rapporto parallelogrammi e triangoli aventi medesima base e altezza.

Di fronte al seguente problema

ABCD è un rettangolo di area 70. Determina l'area del triangolo **ABE**.

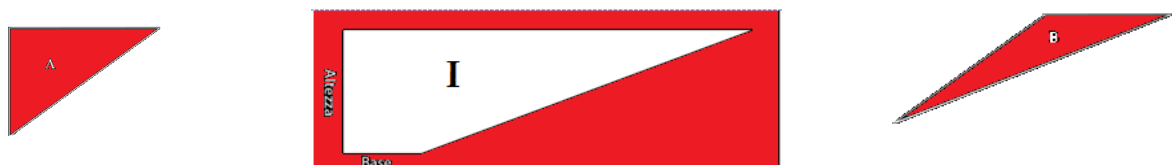
Laboratorio: Geometria e percezione, Laura Tomassi, Daniele Pasquazi.



L'85% degli studenti esegue calcoli: molti calcolano perfino l'area del rettangolo e ne fanno la differenza con i due piccoli per determinare l'area del triangolo ABE.

Le seguenti attività vogliono facilitare la corretta percezione delle figure in questione aiutando gli studenti a percepire immediatamente che il triangolo, nelle ipotesi date, è metà del rettangolo.

Il materiale utilizzato in queste attività è costituito da una figura di base **I** rappresentata dalla cornice e da due triangoli **A** e **B** che rappresentano le figure mobili.



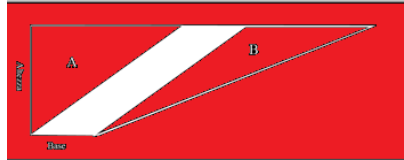
Si fanno inserire le due figure **A** e **B** all'interno della base **I** di modo tale che insieme formino un triangolo che si possa muovere all'interno di **I** stesso. Fino a che non si ottiene questa configurazione non si va avanti con l'attività.

Trovata la giusta configurazione, dunque, s'invitano gli studenti a muovere il nuovo triangolo **A + B**. Si chiede di porre attenzione alla superficie differenza $I \setminus (A + B)$. Si chiede in particolare di riconoscere di che figure si tratti e delle loro caratteristiche.



È auspicabile che si evidenzia che i due parallelogrammi bianchi abbiano la stessa base, siano racchiusi tra le stesse parallele e quindi aventi la stessa altezza e che infine siano equivalenti.

Quando s'inviterà a separare i due triangoli **A** e **B** si faranno ulteriori osservazioni.



Il parallelogramma bianco che si formerà avrà le stesse caratteristiche dei precedenti: stessa base, stessa altezza, stessa area. Si deduce dunque che tutti e tre parallelogrammi ottenuti, aventi stessa base e stessa altezza, siano equivalenti (si farà osservare naturalmente che non è detto il viceversa).

Si consegneranno ora 3 triangoli neri che sono rispettivamente la metà dei 3 parallelogrammi differenza $I \setminus (A + B)$; inserendoli opportunamente nel rispettivo parallelogramma si permetterà di comprendere che anch'essi avranno stessa base e stessa altezza e saranno equivalenti perché metà di parallelogrammi equivalenti.