Il nostro progetto didattico

Laura Catastini[1] e Franco Ghione

Per poter presentare la nostra proposta didattica occorre definire preventivamente, i punti di partenza e i principi dai quali deriviamo le nostre pratiche, i principali riferimenti che guidano le nostre scelte teoriche, in un settore come quello della didattica della matematica dove si è ben lungi da avere un sicuro e condiviso quadro di riferimento e dove, al contrario, si susseguono da parte di pedagogisti e governanti incompetenti, indicazioni e controindicazioni con una frequenza disarmante. La situazione è resa ancora più ingarbugliata da una sempre maggiore invadenza dell'economia su ogni aspetto della vita sociale non ultimo sulla scuola che dovrebbe allinearsi ai modelli industriali basati sulla competizione, la produttività, il profitto, idea questa, fino a qualche decennio fa, completamente estranea alla nostra cultura dell'educazione ispirata piuttosto al consolidamento, attraverso l'istruzione, di forti valori condivisi tra i quali la c u l t u r a come condizione necessaria al libero e consapevole agire della persona. Sentiamo invece parlare di "conoscenza" poi di "saperi" o meglio da "saper fare" di "problem solving" sostituito infine di "competenze" da sviluppare nel "laboratorio" parola magica intorno alla quale si articolano le proposte didattiche "più avanzate". Per chiarire meglio questo panorama molto confuso e quale significato possiamo attribuire a queste parole nella pratica didattica, riteniamo utile tracciare a grosse linee le principali tendenze psicopedagogiche del secolo scorso e i successivi sviluppi in ambito neuro cognitivo.

Il costruttivismo

Nel '900 ha avuto grande influenza, tra le teorie pedagogiche, il c o s t r u t t i v i s m o , una filosofia dell'apprendimento che poggia le proprie basi principali sui lavori di Piaget, Vigotskij e Bruner e che propone un modello di studente che costruisce da solo le proprie strutture intellettuali tramite l'interazione con l'ambiente. L'ambiente costruttivista è sempre molto ricco di risorse, di materiali e di problemi, un laboratorio nel quale lo studente si muove usando le proprie naturali doti di apprendimento e nel quale costruisce personalmente e attivamente le conoscenze appropriate, mentre l'insegnante assume il ruolo di consulente, assistente e guida.

Riguardo alla matematica, il costruttivismo si basa sull'idea che, invece di memorizzare elementi e concetti della matematica, gli studenti devono essere incoraggiati a comprenderli da soli, attraverso problemi da esplorare e da risolvere. In Inghilterra, dove si seguono le teorie costruttiviste, e negli U.S.A, che le esasperano, tanto da far parlare di "ipercostruttivismo" o di "romanticismo costruttivista", gli insegnanti sono incoraggiati a fare attività di tipo laboratoriale, cioè di sperimentazione pratica di matematica (dette "investigations"), che vengono effettuate durante le lezioni, secondo il principio che non vede positivo l'insegnamento che impone teorie già definite, ma privilegia la presentazione di molto materiale la cui libera esplorazione permette allo studente di costruire e di appropriarsi da solo dei principi della materia di studio.

I principi costruttivisti furono introdotti negli U.S.A all'inizio del '900 e sperimentati al Teacher College della Columbia University di New York. Negli anni Trenta queste idee, che col tempo saranno sposate dai progressisti americani, erano ormai diffuse a tutti gli altri College degli

[1] I concetti fondamentali relativi ai problemi cognitivi legati alla didattica della matematica sono presi dai seguenti lavori di Laura Catastini *Quale idea di laboratorio nell'insegnamento matematico* (Atti del convegno La formazione degli insegnanti di Matematica Italia ed Europa a confronto, Pristem storia 36-37, 2013) , *Perché la "matematica del cittadino" è uno slogan per me infelice* (Lettera matematica Pristem n. 87, 2012), *Le inafferrabili "competenze" tra metafore e neuroscienze* (relazione al Convegno Invalsi e Matematica Convinzioni e perplessità a confronto, Tor Vergata 2013), infine *Noi e la Matematica* in corso di stampa con l'editore il Mulino.

Stati Uniti e hanno permeato la didattica di tutto il secolo scorso. Dalla fine del '900 però le modalità con le quali vengono applicati sono da più parti, nella stessa America, messe in discussione per vari motivi, "*innanzitutto perché si basano su presupposti errati, in secondo luogo perché non sono supportati da nessuna ricerca scientifica o ancora semplicemente perché non funzionano*" [2] Queste parole sono di W.K. Kilpatrick, professore al Boston College, USA, in un suo intervento in Italia a un meeting sull'educazione nel 2000. I "presupposti errati" ai quali si riferisce Kilpatrick nascono, per i critici, proprio dal concetto di n a t u r a l i s m o , ossia dal credere che l'apprendimento sia comunque un processo naturale che si verifica spontaneamente, idea ancora oggi presente negli educatori americani. Un corollario al naturalismo è che tutto ciò che è "non naturale" probabilmente è dannoso per lo sviluppo del bambino, che deve seguire i propri tempi:

Il peccato peggiore dal punto di vista del naturalista è quello di insegnare a leggere, a contare, a sommare e a sottrarre e ad avere altre capacità di base. [i naturalisti sostengono che] proprio come non si può pretendere che un albero di mele fruttifichi prima di quando non sia pronto, non si può pretendere che i bambini imparino fino a quando non sono pronti a farlo. In America, purtroppo, si pensa che questa prontezza naturale si sviluppi piuttosto avanti nella vita del bambino, che se non è in grado di leggere a otto, nove, perfino dieci anni, significa semplicemente che non è pronto*5*

Kilpatrick, nel suo intervento, cita prevalentemente il pensiero di E.D. Hirsch sull'alfabetizzazione culturale[3], sottolineando come Hirsch - che ha condotto negli anni un ampio studio di ricerca pedagogica- non dedichi molto tempo alla critica del costruttivismo, non perché lo respinga direttamente, ma piuttosto perché lo considera come un'idea piuttosto ovvia e banale. Hirsch sottolinea invece che gli approcci costruttivisti e l'apprendimento tramite la scoperta c o s ì c o m e v e n g o n o i n t e r p r e t a t i d a l l a s c u o l a e d u c a t i v a s t a t u n i t e n s e sono i metodi meno efficaci. Gli approcci migliori, al contrario, sono quelli che combinano i seguenti elementi:

- enfasi sul contenuto,
- lezioni prestrutturate,
- tempo dedicato alla ripetizione, allo studio e all'esercizio,
- istruzione da parte dell'insegnante,
- compiti organizzati in una sequenza temporale ben pianificata.

In una parola sola, Hirsch raccomanda di fondare il sistema educativo sul consolidamento della c o n o s c e n z a , sia scientifica che umanistica. Per il suo pensiero Hirsch è stato spesso attaccato dai progressisti americani che lo vedevano, a torto, come un tenace conservatore. Lo studioso si definisce invece come un progressista che assume posizioni conservatrici solo per quanto riguarda l'istruzione, citando ampiamente a supporto delle sue posizioni, il pensiero di Antonio Gramsci che – dice Hirsch - ha previsto che le idee romantiche in materia di istruzione degli anni Trenta avrebbero portato ad una grande ingiustizia sociale. In effetti la giustizia sociale è uno dei temi portanti del lavoro di Hirsch. Il divario economico fra poveri e ricchi negli Stati Uniti, sottolinea l'autore, è sostenuto anche dal divario in termini di istruzione, e le teorie progressiste romantiche, che pervadono la scuola pubblica, alimentano questo problema privando i bambini meno agiati della ricchezza di conoscenza, che darebbe loro maggior eguaglianza rispetto ai bambini più ricchi che possono frequentare qualificate scuole private non progressiste. In effetti è difficile parlare di scelte educative come se fossero del tutto prive di effetti sull'assetto sociale ed economico di un paese. Jerome Bruner, lo psicologo statunitense che ha contribuito in modo davvero importante allo sviluppo della psicologia cognitiva e della psicologia culturale nel campo della psicologia

---

[2] W. K. Kilpatrick, *Libertà di educare. C'è l'America nel nostro futuro?* relazione al Rimini Meeting 2000. Consultabile all'indirizzo http://www.meetingrimini.org/detail.asp?c=1&p=6&id=875&key=3&pfix=

[3] Tra le sue principali opere su questo tema ricordiamo E. D. Hirsch, *The schools we need and why we don't have them*, Anchor Books, Random House. Inc, 1999.

dell'educazione, valorizzando e sostenendo nello stesso tempo la conoscenza, così si esprime in merito a questo problema, ne *La cultura dell'educazione*, uno dei suoi ultimi libri:

Allo scopo encomiabile di difendere la libertà di pensiero e di istruzione, abbiamo garantito alle scuole una protezione ufficiale dalle pressioni politiche . La scuola è al di sopra della politica. In un certo senso non privo di importanza è indubbiamente vero: ma è una verità ormai consunta, e in realtà vediamo accadere sempre di più qualcosa di molto diverso. […]E allora perché non trattare l'educazione per quello che è? È sempre stata politica, anche se in tempi più stabili e meno consapevoli, in modo meno palese.[…]Non intendo con questo proporre di "politicizzare" l'educazione, ma semplicemente di riconoscere che è già politicizzata[4]…

Le neuro scienze

I "presupposti errati" di un certo naturalismo di cui parla Kilpatrick sono stati definitivamente evidenziati dalle neuroscienze. Lo sviluppo straordinario che, a partire dalla seconda metà del '900, ha avuto lo studio del cervello e dei suoi specifici meccanismi, i nuovi strumenti di indagine che arrivano oggi fino a studiare il comportamento di un singolo neurone, rappresentano la una rivoluzione scientifica senza uguali. La pedagogia oggi può essere impostata su un terreno scientifico e non solo filosofico, le scienze cognitive, anche se il percorso da fare è appena all'inizio, permettono di dare fin d'ora, come vedremo più avanti indicazioni preziose e definitive su alcune scelte fondamentali educative. L'errore del naturalismo secondo Kilpatrick sta nell'ipotizzare che «*dal momento che alcuni apprendimenti sono naturali, tutti i tipi di apprendimento lo sono*». Non è così. Evidenze sperimentali nel recente campo neuro scientifico mostrano come alcuni tipi di apprendimento siano "innaturali" o "forzati" perché non esistono strade naturali da percorrere per arrivare al risultato voluto. L'apprendimento corretto si ottiene solo con lunghi e spesso faticosi addestramenti che portano alla creazione di adeguati collegamenti sinaptici tra i neuroni.
Volendo dare una definizione di apprendimento naturale potremmo dire che si definiscono "naturali" le attività e i relativi apprendimenti che si sviluppano in ogni insediamento umano an prescindere dal luogo in cui l'uomo vive e dalla sua cultura. Tra le forme "naturali" di attività troviamo il linguaggio, la produzione di semplici forme musicali, ritmiche e melodiche, lo sviluppo di pratiche numeriche per contare piccole quantità. Tra le forme di attività "innaturali" troviamo la scrittura, la lettura e la matematica.

S. Pinker, uno dei massimi studiosi di scienze cognitive, professore alla Harvard University, osserva, con grande chiarezza espositiva e con gradevole senso dell'humor, che la padronanza della matematica è fonte di grande soddisfazione ma è la ricompensa di un duro lavoro che, di per sé, non sempre è piacevole:

Il […] modo per acquisire una competenza matematica è simile a quello per arrivare alla Carnegie Hall [la più prestigiosa sala da concerti del mondo]: la pratica. I concetti matematici nascono mettendo insieme vecchi concetti in modo da formare una nuova utile combinazione. Ma questi vecchi concetti sono a loro volta assemblaggi di concetti ancora più vecchi. Ogni sotto assemblaggio è tenuto insieme da sorte di ribattini mentali chiamati pezzatura e automaticità: con un'intensa pratica i concetti aderiscono tra loro formando concetti più grandi, e sequenze di passaggi vengono sintetizzate in un passaggio solo.[…] La matematica è spietatamente cumulativa, per l'intero percorso a ritroso fino al sapere contare fino a dieci. […]La filosofia predominate nell'istruzione matematica negli Stati uniti è il costruttivismo, un miscuglio di Piaget, controcultura e ideologia postmoderna. I bambini devono strutturare attivamente e da soli le proprie conoscenze matematiche, in una situazione collettiva dove regna il disaccordo sui significati dei concetti. […] Esercizi e pratica, le vie che portano all'automaticità, sono definiti «meccanicisti» e considerati nocivi per la comprensione. […] Se manca la consapevolezza di ciò che la mente è stata progettata per compiere nell'ambiente in cui siamo evoluti, l'attività innaturale chiamata istruzione formale ha poche probabilità di avere successo[5].

---

[4] Jerome Bruner, *La cultura dell'educazione*, Feltrinelli, Milano, 1997, pg 42
[5] S. Pinker, *Come funziona la mente*, Mondadori, Milano, 2000, pg 365-367.

Lo stesso Federigo Enriques, pur proponendo un approccio didattico “dinamico” e molto moderno, intuisce perfettamente l’importanza della memoria e della necessità del nostro cervello di costruire aree di routine:

Solo quando il discepolo avrà appreso a ripetere queste combinazioni, in modo da riuscirvi senza più pensare, potremo dire che egli ha acquistato il maneggio del calcolo, fissandolo nella memoria: allora egli avrà costruito, per così dire, una macchina calcolatrice, che successivamente il suo pensiero potrà adoperare a diversi fini i senza essere costretto ogni volta a ritornare sui motivi delle associazioni già fissate. Qui il pensiero vivo si svolge sul pensiero morto, da cui trae — per così dire — una regola economica di condotta. Ma il pensiero morto non fu travasato dalla testa del maestro a quella del suo ascoltatore; bensì dovette vivere a sua volta nella fatica dell'esercitazione![6]

Pinker aggiunge che è improbabile che una auspicabile padronanza della matematica si sviluppi in America, dove manca la profonda considerazione in cui sono tenute, in altri paesi, le abilità matematiche conquistate con fatica, e vede un’analogia con quel che succede per l’imparare a leggere. Negli Stati Uniti, osserva, domina la tecnica detta «linguaggio totale», nella quale l’idea del linguaggio come istinto umano che si sviluppa naturalmente è stata distorta nell’asserzione, improbabile da un punto di vista evoluzionistico, che anche leggere sia un istinto umano che si sviluppa naturalmente. Il metodo antiquato di collegare le lettere (*grafemi*) ai suoni (*fonemi*) viene sostituito dall’immersione in un contesto collettivo ricco di testi, e i bambini non imparano a leggere.

Un significativo chiarimento di cosa sia l“apprendimento innaturale” nel leggere è dato dall’impegnativo ma illuminante libro di S. Dehaene*, I neuroni della lettura*, nel quale ci vengono mostrati dettagliatamente i meccanismi neurali che si attivano e che si costruiscono, inefficaci o opportuni, nei cervelli sottoposti a tecniche diverse di insegnamento, una “naturalistica” o invece una “innaturale”
Il cervello ha una sua struttura naturale, determinata geneticamente, che permette all’uomo di imparare a parlare e a comunicare con la parola. Non ha invece una struttura innata che gli permetta di imparare spontaneamente a leggere correttamente. La lettura è possibile perché, mediante un addestramento particolare, praticabile solo in tempi lunghi, quando il cervello è ancora molto plastico, aree particolari della corteccia vengono “cooptate” e forzate a trattare insieme dati per collegarli tra loro. Con un lungo addestramento queste aree vengono definitivamente collegate nella funzione del leggere. Imparare a leggere attraverso l’addestramento corretto, chiede che non si passi dall’accoppiamento visivo tra la forma della parola scritta e la cosa a cui si riferisce, ma dall’accoppiamento visivo-auditivo tra il segno di una lettera e il suono pronunciato nel leggerla, tra *grafema e fonema*. Questo accoppiamento è “forzato” e possibile solo con un addestramento adeguato.
Spiega Dehaene:

Il nostro cervello non passa direttamente dall’immagine delle parole al loro significato. A nostra insaputa si concatena tutta una serie di operazioni cerebrali e mentali prima che una parola sia decodificata. Questa è dissezionata, ricomposta in lettere, sillabe, morfemi [...] Le nostre invenzioni culturali derivano dal dirottamento di funzioni cerebrali preesistenti [...] Alcuni oggetti di pensiero si distinguono per una complessità superiore che necessita di un insegnamento precoce e particolare per l’intensità delle modificazioni sinaptiche che quegli oggetti richiedono. Penso alla lettura, chiaramente, ma anche alla matematica e alla musica, invenzioni recenti la cui profondità varia molto da cultura a cultura. Le nicchie neuronali dei nostri oggetti culturali non sembrano tutte ugualmente accessibili: alcune si aprono solo dopo il superamento di necessarie tappe intermedie nella progressiva acculturazione delle nostre reti cerebrali[7]

Ancora Dehaene:

---

6 F. Enriques, Insegnamento dinamico a cura di F. Ghione

7 S. Dehaene*, I neuroni della lettura*, Raffaello Cortina Editore, Milano, 2009

Questa confusione, talvolta promossa ad arte, tra le questioni scientifiche e le scelte politiche, alimenta le polemiche sterili a svantaggio della ricerca, e i bambini sono sempre le prime vittime. È inaccettabile che le etichette sostituiscano la riflessione o che l'intuizione di un uomo politico si sostituisca alle conoscenze scientifiche pazientemente accumulate. Ristabiliamo allora al più presto alcune semplici verità sull'insegnamento della lettura. Ebbene, i bambini non sono tutti diversi tra loro: il loro ritmo di apprendimento può variare ma tutti possiedono gli stessi circuiti cerebrali e tutti possono beneficiare di un apprendimento rigoroso delle corrispondenze grafema-fonema. La scuola della libertà non è quella che lascia scegliere al bambino i testi che desidera imparare, bensì quella che insegna rapidamente a ogni bambino la decodifica – il solo metodo che gli permetterà di imparare da sé parole nuove, di acquistare la propria autonomia e di aprirsi a tutti i campi del sapere.

Straordinario precursore di queste recenti scoperte neurofisiologiche è il lavoro di Maria Montessori, che operò in Italia fino all'avvento del fascismo, quando, dopo alterne vicende, fu costretta all'esilio dalla dittatura. La sua formazione medica e i suoi studi su bambini con deficit cognitivi la portarono a concepire, in modo straordinariamente moderno, un'educazione scientificamente strutturata anche per la prima infanzia, attraverso la manipolazione di un materiale fortemente prestrutturato e lo sviluppo, su di esso, di ragionamento e di conoscenza. Ciò avveniva attraverso esercizi sensoriali come ad esempio ripassare con le dita le forme delle lettere dell'alfabeto o i contorni di semplici figure geometriche. L'efficacia di tali pratiche sono oggi confermate da uno tra i più importanti progressi nell'ambito delle neuroscienze : la scoperta del sistema percettivo motorio e dei così detti neuroni specchio responsabili di fenomeni di empatia. Conosciamo bene i nostri sensi e la posizione dei loro recettori, diciamo udito, vista, olfatto… e pensiamo occhi, orecchi, naso…, automaticamente associamo una sede organica ad ognuno di loro. Ma esistono altri recettori nascosti, legati al movimento, di cui non abbiamo coscienza. I recettori vestibolari, i propriocettori dei muscoli e delle articolazioni, per esempio, che complessivamente contribuiscono a creare una "percezione del movimento". Altre vie percettive, quindi, e altri modi di guardare alla formazione dei nostri pensieri. Abbiamo un sistema nervoso solo perché ci muoviamo. Pensate che esiste un animale marino, l'ascidia, che nasce con un rudimentale cervello e la possibilità di muoversi, che usa per cercare un sito nel quale fissarsi e dal quale non si muoverà più, come un vegetale. Appena fissata, l'ascidia digerisce lentamente il proprio cervello fino a farlo sparire. A che le serve un sistema nervoso se poi non avrà la possibilità di agire? Il nostro cervello pensa perché deve farci sopravvivere interpretando gli stimoli dell'ambiente. Già nella fase percettiva è un anticipatore di azioni e significati, i sensi, uniti, interpretano la cosa "sentita" nel modo più appropriato per il nostro corpo che interagisce, muovendosi, con un ambiente in continuo movimento, e ci rendono una loro interpretazione dinamica della cosa percepita.
«*La percezione non è una rappresentazione: è un'azione simulata e proiettata sul mondo*»[8] dice Berthoz nel presentarci l'idea cardine di un suo libro, *Il senso del movimento*, oggi completamente acquisita dagli studiosi. Il senso del movimento, spiega l'autore, è un sesto senso in grado di anticipare ciò che sta per accadere nella realtà dello spazio circostante. Percepire un oggetto è immaginare le azioni implicate dal suo uso, ed è anche astrarre, selezionare tratti particolari e ignorarne altri. Per questo è stato coniato il termine appropriato: pensiero percettivo-motorio. In pratica, la nostra attività mentale è una continua, nascosta, simulazione. Un esempio efficace di pensiero percettivo-motorio che è capitato a tutti: vogliamo prendere una tazza da un tavolo pieno di altre stoviglie ma, mentre stiamo per afferrarla, siamo distratti e prendiamo al suo posto un boccale. L'esperienza comune ci dice che individuiamo immediatamente l'errore, che ce ne accorgiamo prima ancora di guardare. Su quali basi fisiologiche è possibile riconoscere l'errore e correggerlo? Questo è possibile se esiste, già prima che il movimento inizi, una configurazione neurale di "aspettative" della mano con la quale l'azione viene confrontata e corretta nel caso che se ne discosti in maniera significativa. Una delle difficoltà maggiori insite nello studio della matematica è la difficoltà a far corrispondere alle naturali simulazioni che il nostro cervello produce il risultato atteso, ed anzi alla difficoltà di produrre tout court simulazioni di

---

[8] A. Berthoz, Il senso del movimento, 1998

qualsiasi tipo. Il pensiero resta paralizzato e subentrano atteggiamenti ansiosi, di paura, di rifiuto, di perdita a volte anche grave di autostima. Come educare il pensiero a produrre simulazioni, tentativi, esplorazioni, soluzioni originali a problemi matematici? Come verificare se un concetto, una struttura, una definizione matematica sia veramente compresa non solo sul terreno verbale? Come produrre nei nostri allievi quella particolare gioia che nasce dalla consapevolezza di aver avuto una idea nuova, di aver in un lampo risolto un problema difficile?

Il problem solving e il pensiero produttivo

La teoria della Gestalt è diventata, nel '900, uno degli strumenti importanti per la soluzione di problemi, campo che diventò ben presto oggetto di studio e di ricerca degli psicologi europei e americani. Mentre in Europa la ricerca sulla soluzione di problemi continuava ad essere organicamente integrata con la Teoria della Gestalt producendo lo studio del p e n s i e r o p r o d u t t i v o *,* come lo chiamava Wertheimer[9], uno dei principali fondatori della Teoria, negli Stati Uniti questi studi cominciarono a prendere strade proprie. Così quando negli anni '40 vennero pubblicate alcune opere dei gestaltisti sul pensiero produttivo dal titolo *Zur Psychologie des produktiven Denkens* (Sulla psicologia dei pensieri produttivi), il titolo venne tradotto negli Stati Uniti come *On Problem Solving*, una traduzione inesatta che però indicava l'esistenza di un loro campo di ricerca autonomo. Autori statunitensi, per esempio, indirizzarono lo studio della soluzione dei problemi sui processi informatici, concependo la mente umana come un elaboratore di informazioni e creando cosi la teoria dell' *Human Information Processing* (HIP).

Gli psicologi della Gestalt usano raramente il termine *problem solving*, preferendo usare quello di *pensiero produttivo*, e oggi i problemi da loro studiati - quelli che hanno soluzione se si riesce a trovare una nuova struttura nella configurazione data attraverso un processo di ristrutturazione cognitiva - vengono anche denominati, con un termine tipicamente gestaltista, *insight-problem*, che mette in evidenza l'importanza dell'intuizione. Secondo questa impostazione il grado di difficoltà di un problema dipende da quanto gli elementi della struttura presentata sono a prima vista organizzati tra loro in maniera diversa da quella necessaria per raggiungere la soluzione, e dalla presenza di elementi la cui *fissità funzionale* è molto alta. Per *fissità funzionale* si intende la difficoltà di vedere un oggetto con una identità diversa da quella che lo definisce inizialmente. Ecco un esempio del ruolo della *fissità* nella risoluzione di un problema: se si chiede a una persona di appendere separatamente tre asticelle di legno a una tavola, fornendole solo due viti e un trapano, con molta probabilità non sarà in grado di portare a termine il compito. Solo pochi, dopo aver appeso le prime due asticelle usando il trapano per fare i fori in cui inserire le viti, per appendere la terza, dopo aver fatto il foro, tolgono la punta al trapano e la usano come vite. La difficoltà del pensiero sta proprio nel riuscire a "vedere" il cambio di funzione necessario.

Da parte nostra, quando si tratta dell'apprendimento della matematica, reputiamo molto importante l'addestramento del pensiero gestaltico. In matematica la fissità funzionale è uno degli ostacoli più grandi quando si affrontano materie come la geometria, ad esempio, i cui problemi chiedono continuamente ristrutturazioni anche complesse e difficili da realizzare per studenti inesperti e all'inizio del viaggio educativo. Afferma Wertheimer:

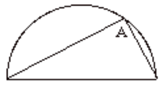
> Il pensiero non procede di necessità, come molti credono, passando semplicemente da un'espressione a un'altra in successione, formulando proposizioni una dopo l'altra; questo accade qualche volta, ma spesso nel vero atto del pensiero, nei processi genuini, ciò non avviene. Qui il procedimento va dalle qualità d'insieme osservate, agli elementi visti come parti di un tutto.

Facciamo un esempio ripreso da un antico pensatore che aveva pure intuito il carattere attivo del

[9] M. Wertheimer, Il pensiero produttivo, Giunti 1965, pg.118

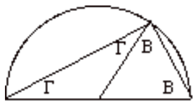
nostro pensiero. Si chiede Aristotele[10]

Perché in generale un angolo in un semicerchio è retto?



A è retto?

Se sono uguali tre segmenti, sia le due basi che la retta apposta dal mezzo, è chiaro anche solo a guardare [la figura] per chi conosce questo.



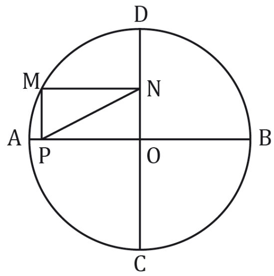
A = B+Γ e 2Γ + 2B = due retti.

Così che è chiaro che ciò che è in potenza viene scoperto riportandolo ad una attività: causa ne è che il pensiero è attività...

Il pensiero agisce sulla figura aggiungendo un raggio che ristruttura il tutto facendo nascere due triangoli isosceli che, prima di aver tracciato il raggio, non esistevano. L'idea di tracciare il raggio non è certo estranea al problema poiché il triangolo è inscritto in una semicirconferenza tuttavia tale raggio a differenza di tutti gli altri, ristruttura la figura. Ora la struttura complessiva è chiara e in un lampo si trova la soluzione. Ma perché questo avvenga occorre che il pensiero possa recuperare come routine acquisita il fatto che in un triangolo isoscele gli angoli alla base sono uguali e la somma degli angoli di un triangolo è di 180 gradi. Non serve conoscere le dimostrazioni e i perché di questi due fatti essi si sono trasformati come diceva Enriques in "pensiero morto" e su questo il pensiero produttive è in grado di far scattare la giusta simulazione.

Un altro esempio

Sia data una circonferenza di centro *O* e si disegnino due diametri perpendicolari *AB* e *CD*. Si scelga arbitrariamente un punto *M* sulla circonferenza e si traccino le perpendicolari ai diametri *MN* e *MP*. Trovare lunghezza di *PN*



Inizialmente il problema sembra non avere soluzione perché la lunghezza del segmento PN appare dipendere dalla posizione di M: alzando o abbassando M sembra cambiare la misura di PN. La risposta giusta arriva quando si riesce a vedere PN non come ipotenusa di un triangolo rettangolo ma come una delle due diagonali del rettangolo PONM. Allora, immaginando l'altra diagonale, si giunge facilmente alla risposta: la lunghezza di PN è pari alla lunghezza del segmento MO, cioè è il raggio della circonferenza, che non cambia al muoversi di M su di essa.

Educare alla visione della geometria è possibile (vedi ad esempio il laboratorio di Enrico Rogora 2016 nell'ambito del progetto *Con la mente e con le mani* presso l'Accademia dei Lincei) e questa attività è di grande utilità perché esemplifica in che la applica frammenti di pensiero creativo.

---

[10] Aristotele, Analitici primi.

La nostra proposta di Laboratorio

La storia nazionale ha una grande esperienza e nomi illustri e per noi di sicuro riferimento, per quel che riguarda un modo alternativo a quello naturalista di intendere il laboratorio matematico. Tra i nomi illustri spiccano quelli di Maria Montessori e di Emma Castelnuovo.
Così Arnheim, grande studioso del pensiero visivo del '900, descrive la sostanziale differenza dei presupposti dei laboratori montessoriani da quelli americani:

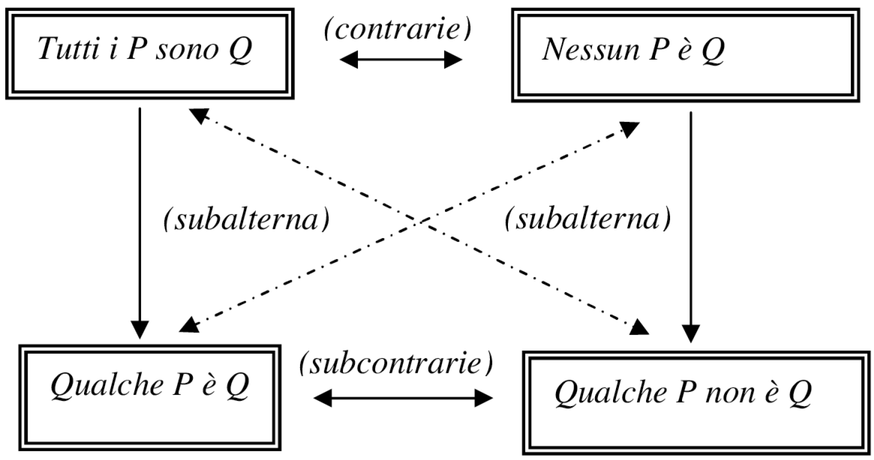
> Sembra estremamente urgente che gli educatori superino la nozione per cui le relazioni quantitative possono essere poste in contatto con l'esperienza percettiva diretta soltanto se rappresentate da oggetti pratici dell'ambiente. Le relazioni quantitative si riferiscono a un universo percettivo proprio che non si può né ignorare né contraddire impunemente[11].

Queste r e l a z i o n i q u a n t i t a t i v e – continua Arnheim – sono rappresentate nel modo migliore da un sistema di f o r m e p u r e , per esempio nella forma dei ben noti bastoncini montessoriani, e nelle immagini mentali che questi bastoncini lasciano dietro di sé, perché i bambini non hanno nessuna difficoltà nel riconoscere le qualità astratte. Ad esempio nei loro disegni essi presentano spontaneamente, direttamente, l'andamento diritto delle gambe mediante linee parallele dritte. L'uomo, percependo le forme complesse della realtà, le stilizza in forme semplici, facili per i sensi e comprensibili per la mente, entità particolari percepibili e perfettamente accessibili anche alla mente di un bambino. Un materiale di tipo montessoriano, ad esempio, introduce i bambini alle proprietà percettive delle quantità pure in se stesse, oltretutto in sinergia con l'acquisizione di termini matematici appropriati. I numeri sono colonne di altezza diversa. La dimensione orizzontale dello spazio è impiegata per confronto e per dare la sequenza delle colonne, i numeri pari possono spezzarsi in due, quelli dispari hanno elementi centrali oppure resti. Le differenze tra giusto ed errato saltano subito agli occhi. Qualunque tentativo di «vitalizzazione» non farebbe che allontanare il bambino dal forte contatto percettivo con i compiti che lo assorbono. Se gli si presentasse una storia su conigli e su cavoli, proprio pensare a questi animali e vegetali gli renderebbe difficile estrarre le quantità. Insomma, raccomanda Arnheim, fate come predica K. Stern: «*Non riempite di numeri la vita ma portate la vita nella matematica*» L'idea che proponiamo è quella di un laboratorio che si muova nella tradizione italiana tracciata da Maria Montessori e Emma Castelnuovo, pur aggiornandosi con nuovi strumenti tecnologici. Che porti la vita nella matematica, in una matematica già ben costruita e vitale nello studente attraverso un insegnamento che non insegua romanticismi didattici illusori, una matematica che ancora è vitale nelle nostre scuole e che rende i nostri ricercatori apprezzati in tutto il mondo. Nel quale si superi il concetto limitato di "matematica per il cittadino", slogan per noi infelice e riduttivo, e che riporti nella matematica i c o n t e s t i c u l t u r a l i nei quali essa si è sviluppata e rafforzata, cioè le manifestazioni del p e n s i e r o c r e a t i v o dell'uomo, come ad esempio le arti e la musica, la storia della scienza e le nuove realtà culturali.

E' ormai abbastanza diffusa, soprattutto nel nostro paese, l'importanza di un approccio storico nella didattica della matematica e delle scienze in generale. Vi sono molti motivi per sostenere questa impostazione che caratterizza la nostra impostazione rispetto ad altre pure molto diffuse nel nostro paese. Intanto come sostiene la Montessori *l'origine delle cose* contribuisce a dare senso alle idee che si intende presentare dal momento che ogni nascita ha un suo perché, una

[11] R. Arnheim, Il pensiero visivo,

sua motivazione e questo aiuta l'insegnate a rispondere a quella richiesta di s e n s o che con forza e naturalmente sale dagli studenti. Perché? Che senso ha? Guai se queste domande dovessero restare inevase o peggio censurate. E' dunque il contesto storico culturale di una data epoca che aiuta a comprendere e a dare un significato allo sforzo che comunque la matematica richiede. Perché la dimostrazione? Perché la geometria? E' il contesto dove queste idee sono nate che contribuisce a rispondere a queste domande. Il rigore dimostrativo nasce in Grecia insieme alla d e m o c r a z i a in un'epoca nella quale si doveva convincere delle proprie ragioni e delle scelte politiche che si intendeva proporre, una maggioranza e questo era possibile attraverso un ragionamento che facesse appello alle delle regole logiche universalmente accettate. Queste regole vengono stabilite da Aristotele e vengono accolte da Euclide e sono alla base tutt'oggi del pensiero umano. Questa gigantesca operazione culturale che avviene solo nel contesto greco e non in Egitto o in India o in Cina è a fondamento della identità europea e trova nella matematica un terreno privilegiato di applicazione. Non a caso da vari anni proponiamo nel progetto *Con la mente e con le mani* presso l'Accademia dei Lincei il laboratorio *Logica naturale e logica formale*. Il conoscere e saper usare la logica formale aristotelica è un prezioso strumento indispensabile all'uomo moderno che non si può acquisire spontaneamente. Recenti studi in ambito neuro cognitivo dimostrano ampiamente che, contrapposta a una logica formale aristotelica, esiste una logica naturale che guida le inferenze nelle nostre conversazioni quotidiane totalmente diversa e spesso in forte attrito con la logica formale in particolare nell'uso della negazione. Il metodo dimostrativo "per assurdo" viene compreso a fatica dal nostro pensiero naturale e diventa - come le regole del calcolo - "pensiero morto" dopo molte applicazioni ed esempi il più delle volte ricavati dalla geometria euclidea. Gli stessi teoremi sono organizzati spesso da Euclide come vertici del Quadrilatero aristotelico per addestrare il pensiero a interferenze innaturali che operano sugli oggetti astratti della geometria.



Anche il contesto storico nel quale nasce l'algebra come disciplina a se stante con i suoi oggetti di studio (le equazioni) i sui metodi (gli algoritmi risolutivi) e le sue applicazioni ci è utile per capirne l'importanza. Siamo nel pieno sviluppo dell'impero arabo nel IX secolo d.C. a Baghdad nella casa della Sapienza simile a un moderno centro di ricerche interdisciplinari, al-Khwarizmi autore del primo testo di Algebra[12] dedica la metà del suo libro ai problemi relativi ai lasciti testamentari da suddividere tra gli eredi sulla base dei principi giuridici sanciti dal Corano. Il primo esempio che viene fornito è molto significativo

[12] L. Catastini, F. Ghione, R. Rashed ALGEBRA, origini e sviluppi tra mondo arabo e mondo latino ed. Carocci, 2016

Un uomo muore e lascia due figli; ha legato un terzo del suo bene a uno straniero, ha un bene di 10 dirham ha anche un credito di 10 dirham da uno dei suoi due figli (che al momento della morte del padre non possiede nulla).

La legge coranica stabilisce che prima di tutto si deve onorare il lascito e quel che rimane va diviso in parti uguali tra i due figli. Ora per stabilire quale sia la parte di eredità che spetta a ciascuno, si deve sapere a quanto ammonta il bene complessivo, ma per sapere a quanto ammonta il bene complessivo si deve sapere quale sarà la parte del figlio indebitato da aggiungere ai 10 dirham. Ne nasce un circolo vizioso dal quale è impossibile uscirne usando il solo linguaggio verbale. Usando invece l'algebra tutto è chiaro, semplice e condivisibile. Chiamiamo x la parte di eredità che va al figlio indebitato, il bene da dividere sarà dunque 10+x, poiché un terzo va al legatario e i rimanenti 2/3 vanno divisi in parti uguali tra i due figli, a ognuno spetterà un terzo di x+10. Questo è dunque quello che setta anche al figlio indebitato e dunque

$$\frac{x+10}{3} = x$$

Ma se A=B anche 3A=3B e se una "cosa" più 10 e uguale a tre "cose" due "cose" saranno uguali a 10 e dunque una "cosa", cioè x, sarà uguale a 5. Conclusione 5 dirham vanno al legatario, 5 al figlio senza debiti e nulla al foglio indebitato e tutti sono d'accordo. Nel mondo arabo l'algebra e il calcolo algebrico nascono come strumento di giustizia di equità, il segno "uguale" ha un significato ben più ampio di un segno. Così sarà immediatamente recepita nell'Italia del '200. Un'Italia dove nascono le prime banche dove è necessario dividere equamente gli utili tra soci che hanno fatto investimenti diversi, un'Italia curiosa di cultura di scienza, un'Italia aperta verso la scienza islamica che tradotta in lingua latina darà un primo avvio a una nuova Europa.

Ovviamente non vi sono solo motivazioni così generali e queste non possono essere sicuramente sufficienti per rispondere alla richiesta di senso. Si tratta di sviluppare una ricerca sia teorica che sperimentale che abbia tra i suoi obiettivi quello di rispondere a questa richiesta entrando ogni volta nel dettaglio dello specifico argomento trattato. Ad esempio la dimostrazione in matematica diventa importante -per questo viene accettata senza problemi dagli studenti- quando, attraverso di essa, si arriva a un risultato sorprendente "meraviglioso" (nel senso etimologico della parola). Risultati di questo tipo vanno cercati e va cercato il modo di presentarli facendo nascere il dubbio, l'incredulità la difficoltà a provare un tale risultato o per la sua estrema generalità o per la sua difficoltà logica. I teoremi di geometria si prestano bene sia perché colgono in un solo enunciato i n f i n i t e situazioni apparentemente molto diverse tra loro sia quando si tratta di dimostrare l' i m p o s s i b i l i t à. Simone Veil, la sorella del grande matematico André, critica fortemente il modo di insegnare la geometria quando sia o troppo formale o troppo empirico. Entrambi questi due approcci la presentano come fosse qualcosa senza relazioni relazione col mondo quando invece "l'universo in cui viviamo è un tessuto di relazioni geometriche". Dice Simone:

> Un modo facile di introdurre la necessità geometrica in una scuola professionale sarebbe quello di associare lo studio e l'officina. Si dovrebbe dire ai ragazzi: "ecco un certo numero di lavori da compiere (fabbricare, ad esempio, oggetti soddisfacendo a un certo numero di condizioni) alcuni sono possibili altri impossibili. Eseguite quelli che sono possibili e dimostrate che non sono possibili quelli che non eseguite." Con questo sistema tutta la geometria può entrare a far parte del lavoro. L'esecuzione è una prova empirica della possibilità ma per l'impossibilità non c'è prova empirica: occorre la dimostrazione. L'impossibilità è la forma concreta della necessità.[13]

Ecco un altro canale di ricerca che può aiutare il nostro cammino: le applicazioni o meglio il r a p p o r t o d e l l a m a t e m a t i c a c o l m o n d o. Il termine applicazione è molto abusato e porta a identificare il termine a una qualche utilità pratica cosa che risulta generalmente riduttiva. Non si vuole limitare con questo l'importanza di educare lo studente verso applicazioni anche molto concrete, anzi, riteniamo fondamentale sviluppare l'idea in generale di m o d e l l o. Riteniamo

---

[13] Simone Weil, La prima radice, pag 70-71

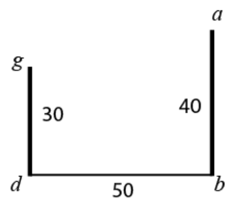
molto importante ogni attività che vada in questa direzione perché permette di relazionare tra loro cose diversissime individuando ciò che è essenziale e e ciò che è secondario e soprattutto eseguendo una decisa semplificazione dei dati senza la quale non è possibile articolare un ragionamento matematico o un qualsiasi ragionamento. Ci avverte Primo Levi, scienziato e scrittore in un tempo:

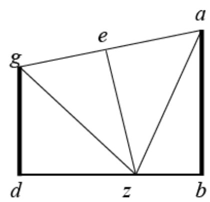
Ciò che comunemente intendiamo per "comprendere" coincide con "semplificare": senza una profonda semplificazione, il mondo intorno a noi sarebbe un groviglio infinito e indefinito, che sfiderebbe la nostra capacità di orientarci e di decidere le nostre azioni. Siamo insomma costretti a ridurre il conoscibile a schema: a questo scopo tendono i mirabili strumenti che ci siamo costruiti nel corso dell'evoluzione e che sono specifici del genere umano, il linguaggio ed il pensiero concettuale[14].

Tali operazioni sono troppo poco stimolate negli allievi i quali diventano muti di fronte a un problema presentato in un contesto concreto quando sarebbero assolutamente capaci di orientarsi se il problema restasse strettamente confinato nel contesto matematico. Faccio un esempio particolarmente semplice preso dal Liber abaci di Fibonacci dove al contrario questi passaggi da astratto al concreto, dalla realtà al modello sono frequentissimi. Prendo il problema delle due torri che si trova in tutti i manuali d'abaco del medio evo e anche prima nel medio oriente:

In un piano ci sono due torri una delle quali è alta 30 passi e l'altra 40 e distano a terra di 50 passi; tra di esse c'è una fonte. Due uccelli volando parimenti dalla cima delle due torri arrivano nello stesso istante al centro della fonte; si chiede la distanza del centro della fonte da ciascuna delle due torri[15].

La prima cosa da fare è semplificare il problema, è questo quello che fa il matematico ma questo esercizio viene normalmente sottaciuto e dato per scontato. Per cominciare supponiamo che le due torri siano due segmenti verticali (la verticalità non è nei dati del problema ma senza questa semplificazione il problema diventa più complicato), poi che il terreno tra le due torri sia pianeggiante, meglio sia proprio un piano e che le distanze misurate con i passi corrispondano il più possibile alla situazione reale. Questa operazione associa a un oggetto concreto (la torre che ha un suo volume, porte finestre, merlature, abitanti arcieri, forse un prigioniero ecc) un oggetto astratto un segmento e così per la loro distanza. Esaurita questa drastica semplificazione il problema si modellizza nel disegno di sinistra





e si risolve nel disegno di destra tracciando l'asse del segmento ga. La posizione della fonte nel punto z è ancora nel modo del modello matematico. Esso tornerà sul terreno dove sono costruite le torri calcolando, con un po di mestiere matematico, la distanza bz che risulterà di 18 passi. Passi! proprio 18 passi! Nascondere la diversità tra i due contesti, saltare direttamente al disegno, nasconde parte essenziale del metodo scientifico e non occorrono, come mostra questo esempio, grande fantasia per sviluppare questi processi. Solo in Fibonacci traviamo più di 300 esempi di questo tipo. Galileo Galilei quando studia il moto di un proiettile sparato da un cannone riesce a servirsi della matematica solo trascurando l'attrito dell'aria e moltissime altre condizioni legate all'aver semplificato la natura del proiettile identificandolo a un punto, cioè a ciò "che non ha parti". Dunque il rapporto tra la matematica e il mondo reale è una caratteristica fondamentale del

[14] Primo Levi, I sommersi e i salvati, 1986
[15] Fibonacci, Liber abaci ed Buoncompagni, pag 396

pensiero matematico che nasce con la matematica stessa quando parlando di segmenti si trascura lo spessore, il colore, la drittezza e mille altri accidenti reali che se esaminati impediscono di uscire da quel "groviglio infinito e indefinito" di cui parla Levi. In questo senso le applicazioni della matematica non si prefigurano come un capitolo a se ma come un tutt'uno intrinseco all'astrazione matematica stessa. Tali applicazioni se si riferiscono ad esempio alla visione confinano con un mondo di concetti alla base del disegno prospettico, del disegno tout court e in definitiva della pittura, nello stesso modo, se si riferiscono all'udito, confinano con l'immenso pianeta che chiamiamo musica. Queste vicinanze, questa "applicazioni" possono essere portate all'interno dei laboratori che proponiamo e queste esperienze coi loro risultati estremamente positivi sono già state fatte sia all'interno del Progetto Lauree Scientifiche col laboratorio *La geometria della visione*[16] (vedi il materiale prodotto sul sito http://www.mat.uniroma2.it/pls/labor/geom.html) che nel progetto Con la mente e con le mani dove è stato proposto e sviluppato da Laura Catastini il laboratorio Matematica e musica.

Questi esempi ci permettono di specificare meglio cosa pensiamo possa essere un l a b o r a t o r i o di Matematica. In primo luogo le attività di laboratorio non possono esaurire l'intera attività didattica ne per i contenuti ne per il metodo. Esse debbono essere ben pianificate sia sul piano scientifico che su quello didattico, per questo riteniamo essenziale una collaborazione paritaria Scuola-Università che sia fonte di arricchimento reciproco. Da un punto di vista metodologico riteniamo che il Laboratorio sia il luogo adatto dove sperimentare un approccio alla scienza di tipo "debolmente costruttivista" dove portare gli studenti alla scoperta dei risultati, lasciando il più possibile libero il dispiegarsi del loro pensiero, delle loro idee, anche quando sono sballate, favorendo il più possibile il tentare una via, il non darsi per vinto. Favorire la ricerca di parole, di un linguaggio per esprimere le proprie intuizioni, confrontando i diversi approcci e proponendo problemi stimolati, non banali, ma non impossibili. La "scoperta" insomma come motore della proposta didattica. Questo può essere stimolato attraverso l'uso di materiali geometrici in plastica, cartone o altro materiale, appositamente preparati che gli studenti possono manipolare e, attraverso questa manipolazione, scoprire relazioni, strutture, formule, invarianti, proprietà significative. Un esempio già ampiamente sperimentato riguarda il calcolo di aree curvilinee di figure molto belle, disegnate da Leonardo da Vinci componendo e scomponendo in vario modo segmenti circolari e lunule[17]. Quando una relazione, un teorema è stato scoperto dagli studenti, la successiva e fondamentale attività di scrittura, approfondimento, studio di un vocabolario scientifico diventa naturale e molto meno faticosa ed aiuta ogni successiva attività didattica anche non laboratoriale.

La scelta dei temi da proporre in un laboratorio matematico debbono essere temi centrali, nodi concettuali interni alla disciplina spesso trascurati dalla didattica tradizionale o trattati solo in modo formale con un forte alone di significati e di applicazioni nel mondo. Ecco alcuni esempi già in parte sperimentati: il concetto di area di una figura piana, di infinito, di numero intero razionale irrazionale, di probabilità, di luogo geometrico, di forma, di similitudine o teoremi fondamentali come quello di Pitagora o di Talete. Argomenti che ritornano in tutta la storia della matematica fino ai nostri giorni in forme sempre più generali e complesse. Ad esempio il concetto di area è il primo esempio non banale dell'idea di misura di una grandezza, idea ovviamente centrale in tutta la scienza e che, nella matematica contemporanea, sfocerà nel concetto e di spazio metrico; o il teorema di Pitagora, alla base dell'idea di distanza su un oggetto squadrato come la città di New York - o su un piano cartesiano - che oggi ci conduce a spasso su una varietà riemanniana; o il concetto di probabilità che, nato nella mente di Cardano, un accanito giocatore matematico del '500, è oggi alla base della fisica quantistica e della descrizione che gli scienziati riescono a dare della materia; o infine la descrizione dello spazio euclidea e non euclidea che porterà nel '900 alle gradi concezioni einsteiniane di uno spazio curvo .

---

[16] L.Catastini, F. Ghione, Le geometrie della visione, Springer, 2004

[17] F. Ghione, D. Pasquazi, I ludi geometrici di Leonardo da Vinci, attualmente prodotti dall'Opera Nazionale Montessori (http://www.operanazionalemontessori.it/index.php?option=com_content&task=view&id=720)