

NEL QUINTO LIBRO DEL LIBER ABACI (1202), FIBONACCI INTRODUCE, PER LA PRIMA VOLTA NEL MONDO LATINO LE **FRAZIONI**, SEGUENDO LA VIA GIÀ PERCORSO DAGLI ARABI NEI SECOLI PRECEDENTI. NEGLI ELEMENTI DI EUCLIDE SI PARLAVA DI RAPPORTO TRA GRANDEZZE, MA NON DI FRAZIONE NEL SENSO NUMERICO. PER FIBONACCI LA FRAZIONE SI OTTIENE ROMPENDO L'INTERO IN PARTI UGUALI E OPERANDO CON QUESTE.

I **numeri rotti** si ottengono sommando m volte ($m < n$) l'ennesima parte dell'unità. Sono i numeri che oggi chiamiamo "frazioni proprie".

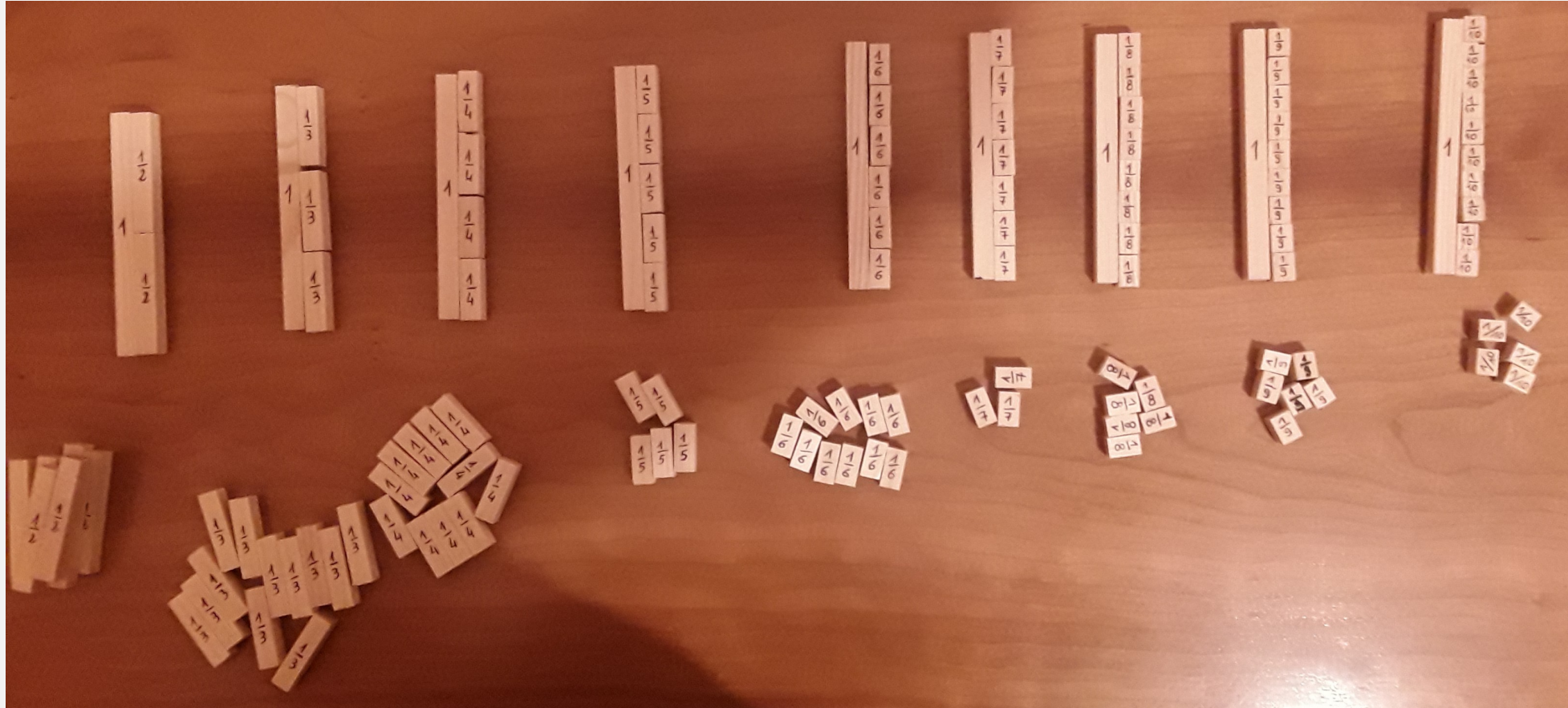
$$\frac{m}{n} = \underbrace{\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n}}_{m \text{ volte}}$$

Se m è maggiore o uguale a n , Fibonacci scrive la frazione come un **numero misto**: un intero più un numero rotto. La stessa scrittura è ancora in uso in molti paesi, soprattutto anglosassoni. Ad esempio, $9/7$ viene scritto come $1 + 2/7$. Il segno "più" è spesso sottointeso ed il numero rotto è scritto più piccolo.

$$\frac{9}{7} = 1 \frac{2}{7}$$



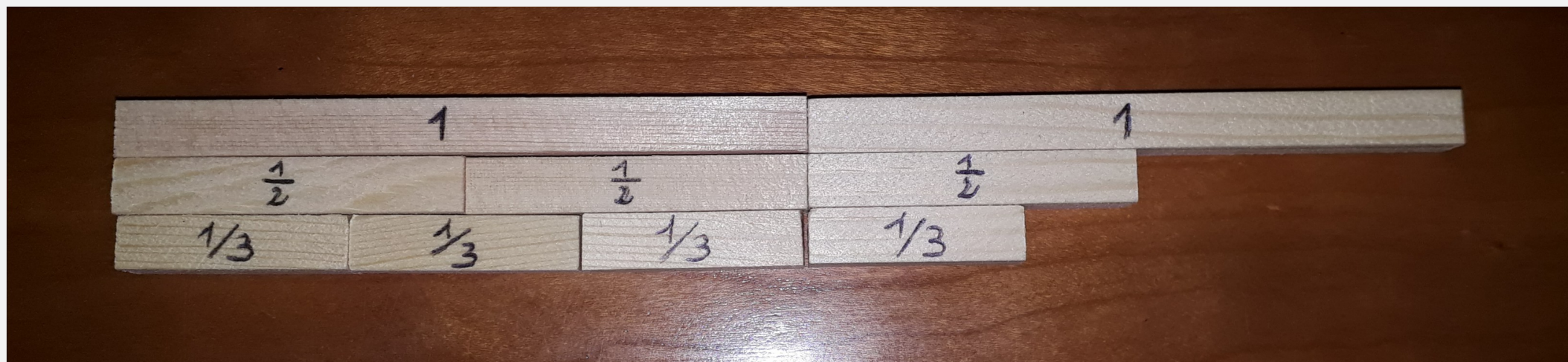
IL MATERIALE USATO PER LO STUDIO DELLE FRAZIONI



LA MANIPOLAZIONE DEL MATERIALE HA COME OBIETTIVO QUELLO DI FORMALIZZARE LE REGOLE, SENZA CHE QUESTE VENGANO USATE MECCANICAMENTE.

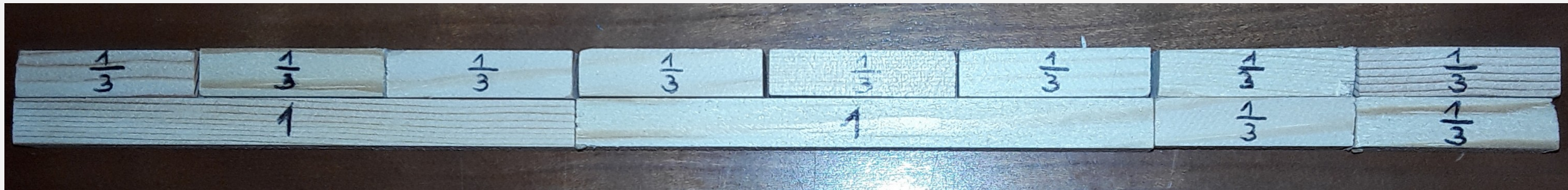
LE ASTE DA CUI SONO STATE RICAVATE LE UNITÀ FRAZIONARIE SONO DI LEGNO: L'INTERO È LUNGO 10 CM, $\frac{1}{2}$ 5 CM, $\frac{1}{3}$ LA TERZA PARTE DI 10 CM, E COSÌ VIA....

SI POSSONO **CONFRONTARE** LE FRAZIONI SULLA RETTA DEI NUMERI, AD ESEMPIO È PIÙ GRANDE $\frac{3}{2}$ O $\frac{4}{3}$?



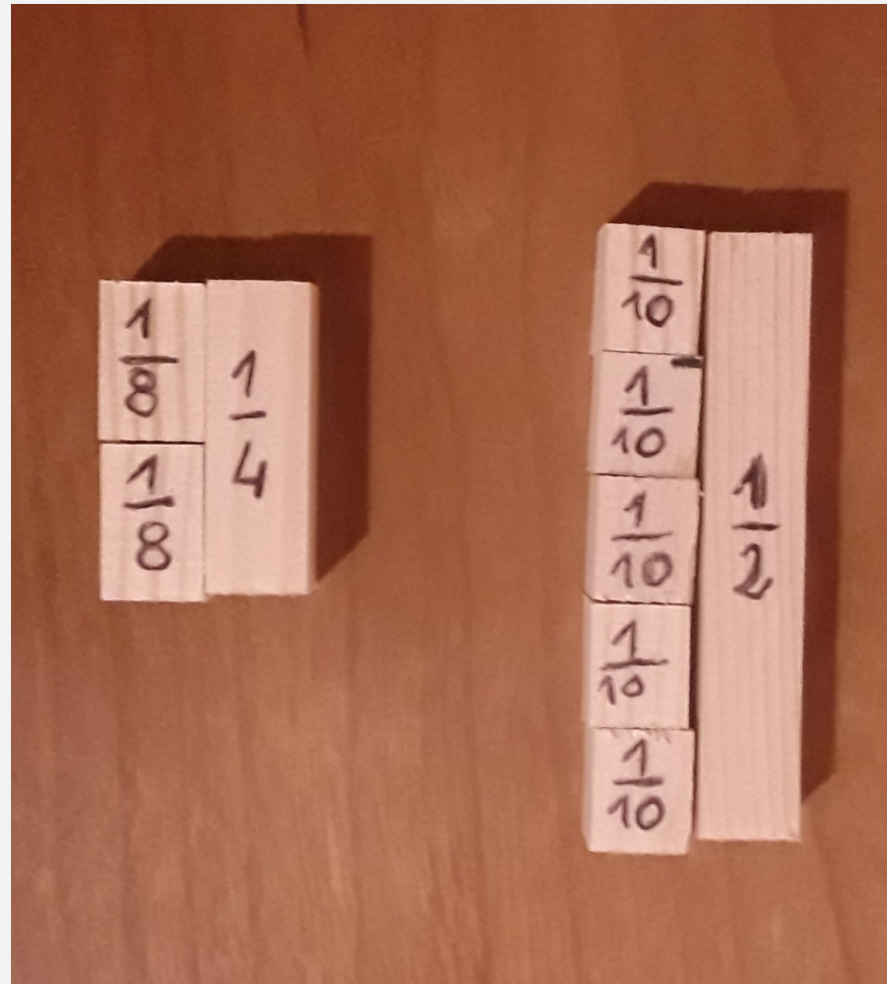
SI PUÒ SCRIVERE UN NUMERO MISTO COME SOMMA DI UN
INTERO E UN NUMERO ROTTO.

AD ESEMPIO, $\frac{8}{3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}$ cioè
 $\frac{8}{3} = (\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}) + (\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}) + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}$, quindi $\frac{8}{3} = 2 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}$, infine $\frac{8}{3} = 2 + \frac{2}{3}$.



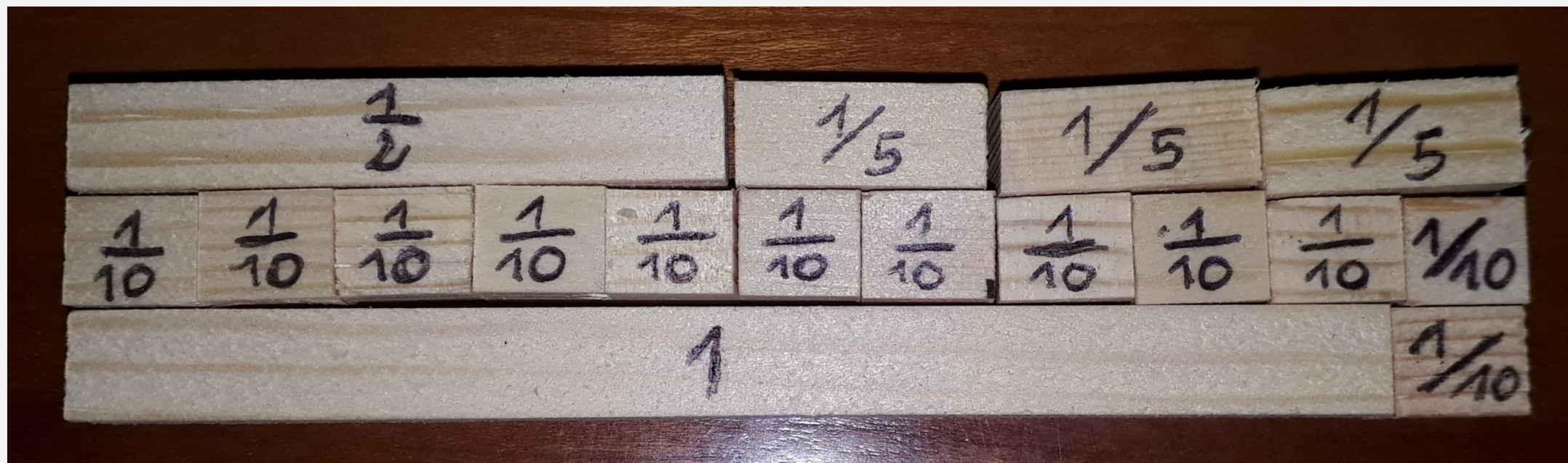
In generale, ***se $m = q \times n + r$, allora $m/n = q + r/n$***

SI POSSONO SCRIVERE I NUMERI ROTTI IN NUMERI ROTTI PIÙ PICCOLI.



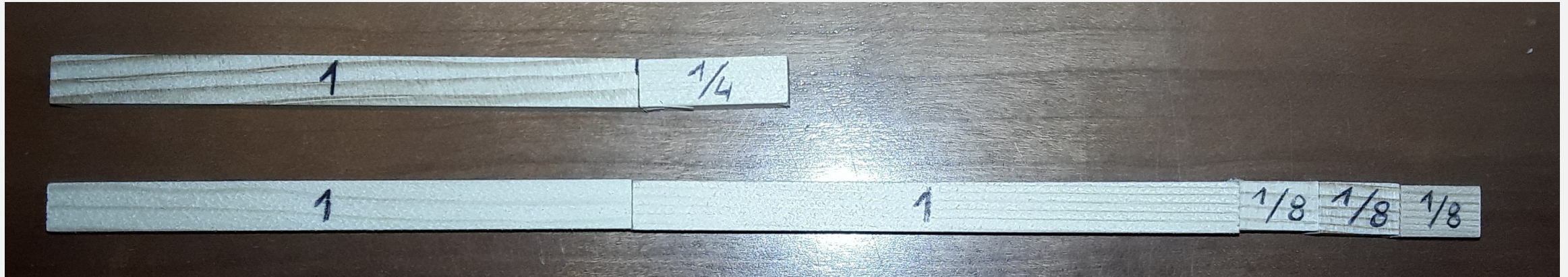
SI PUÒ EFFETTUARE LA SOMMA.
 AD ESEMPIO, CALCOLIAMO $\frac{1}{2} + \frac{3}{5}$. SI CERCA UN NUMERO ROTTO CHE
 DIVIDE SIA $\frac{1}{2}$ CHE $\frac{1}{5}$. PROVANDO MATERIALMENTE CON LE NOSTRE
 ASTE SI TROVA CHE $\frac{1}{10}$ DIVIDE $\frac{1}{2}$ IN 5 PARTI UGUALI E DIVIDE ANCHE
 $\frac{1}{5}$ IN DUE PARTI UGUALI.

ALLORA, $\frac{1}{2} + \frac{3}{5} = (1/10 + 1/10 + 1/10 + 1/10 + 1/10) + 3 \times (1/10 + 1/10)$, CIOÈ
 $\frac{1}{2} + \frac{3}{5} = (1/10 + 1/10 + 1/10 + 1/10 + 1/10) + (1/10 + 1/10) + (1/10 + 1/10) + (1/10 + 1/10)$.
 $\frac{1}{2} + \frac{3}{5} = 11/10$. Poiché $11 = 10 \times 1 + 1$, si ha che $11/10 = 1 + 1/10$.

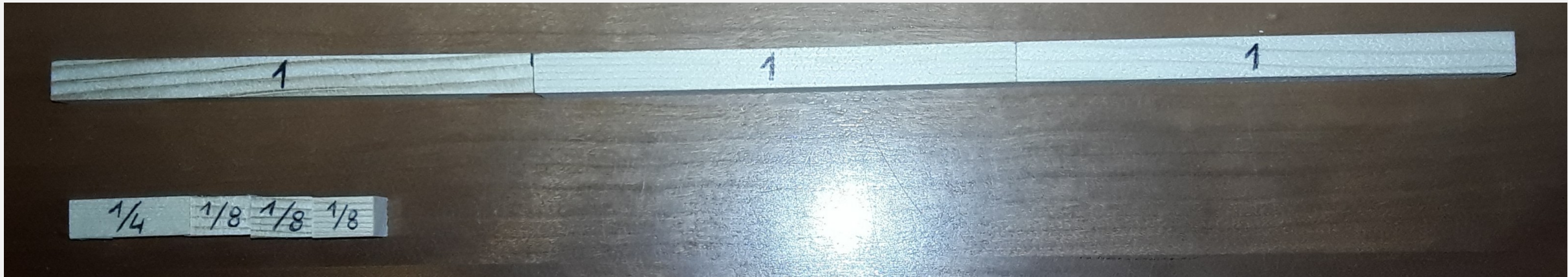


Come si sommano due numeri misti?

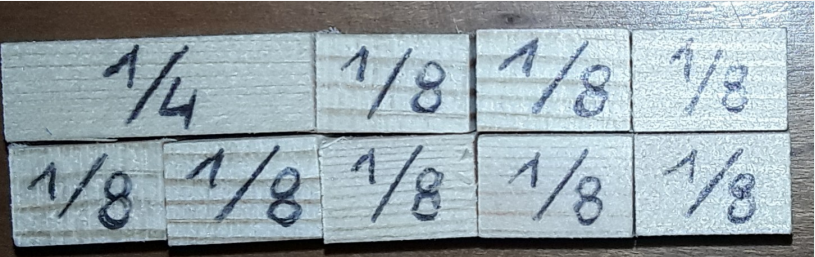
Si vuole calcolare $(1 + \frac{1}{4}) + (2 + \frac{3}{8})$.



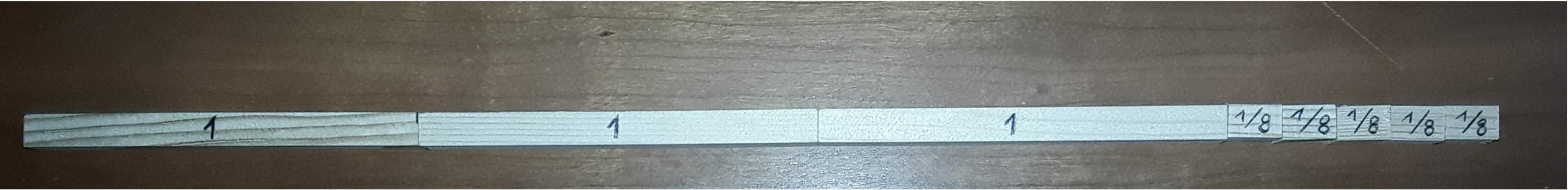
Si sommano gli interi con gli interi ed i rotti con i rotti.



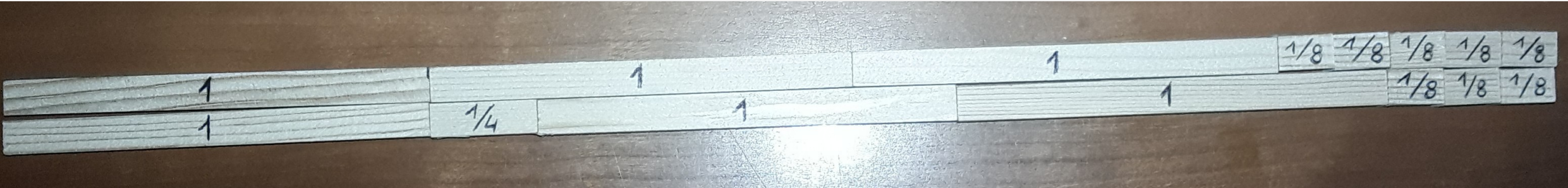
Si ripete lo stesso procedimento dell'addizione tra numeri rotti.



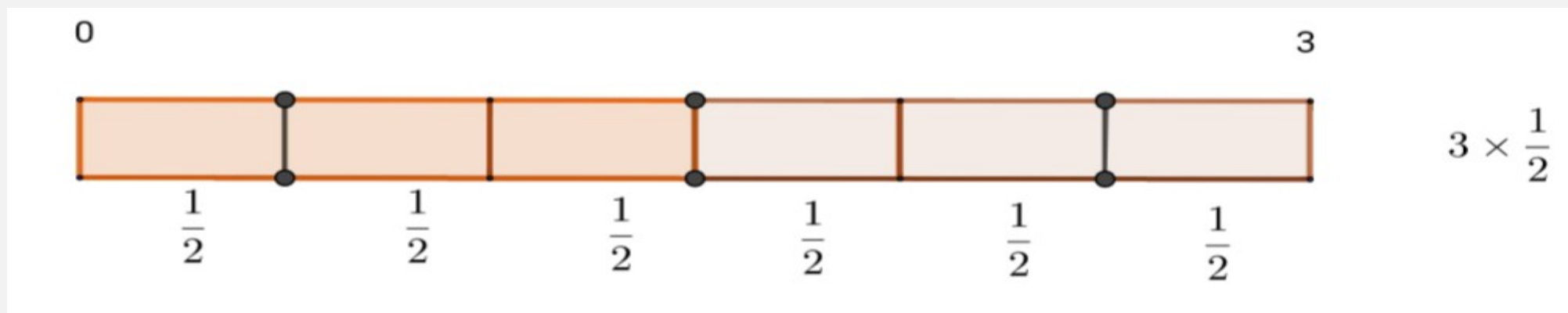
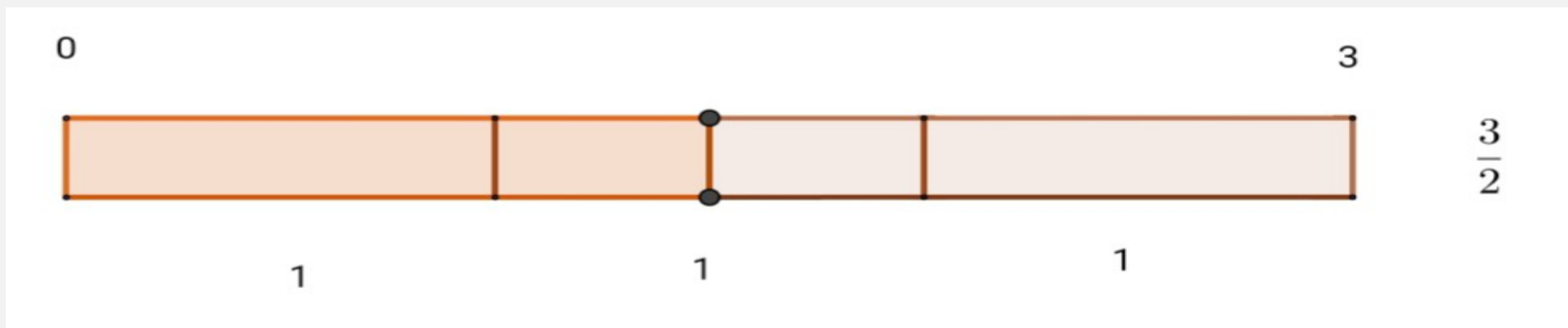
Per cui il risultato sarà $3+\frac{5}{8}$, oppure $3\frac{5}{8}$.



Si confronta l'esattezza del risultato confrontando le 2 combinazioni.

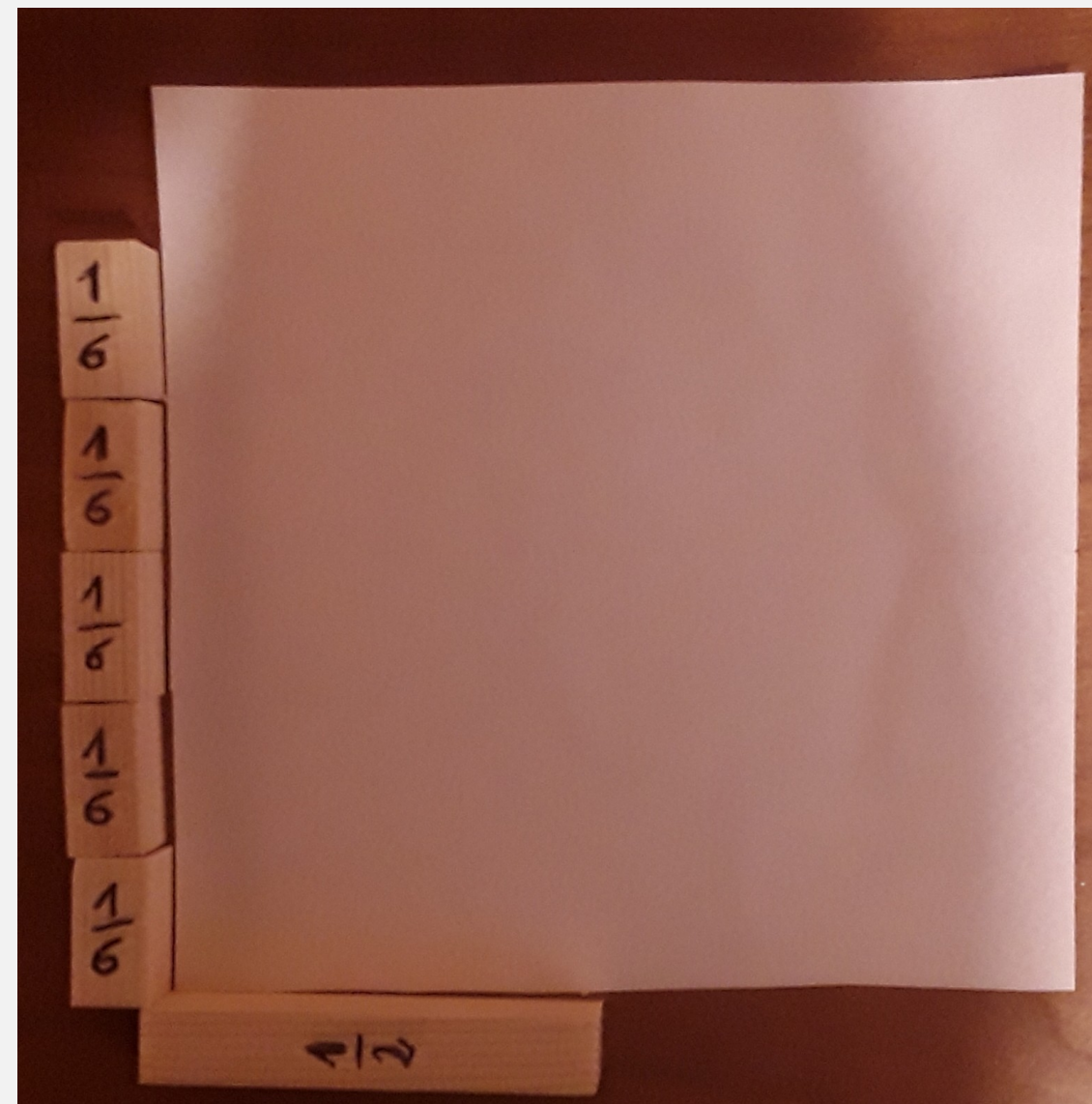


Prima di trattare la moltiplicazione con le frazioni, notiamo che m/n significa dividere m in n parti. Possiamo vedere m/n come $m \times 1/n$, quindi $1/n$ sommato con se stesso m volte.

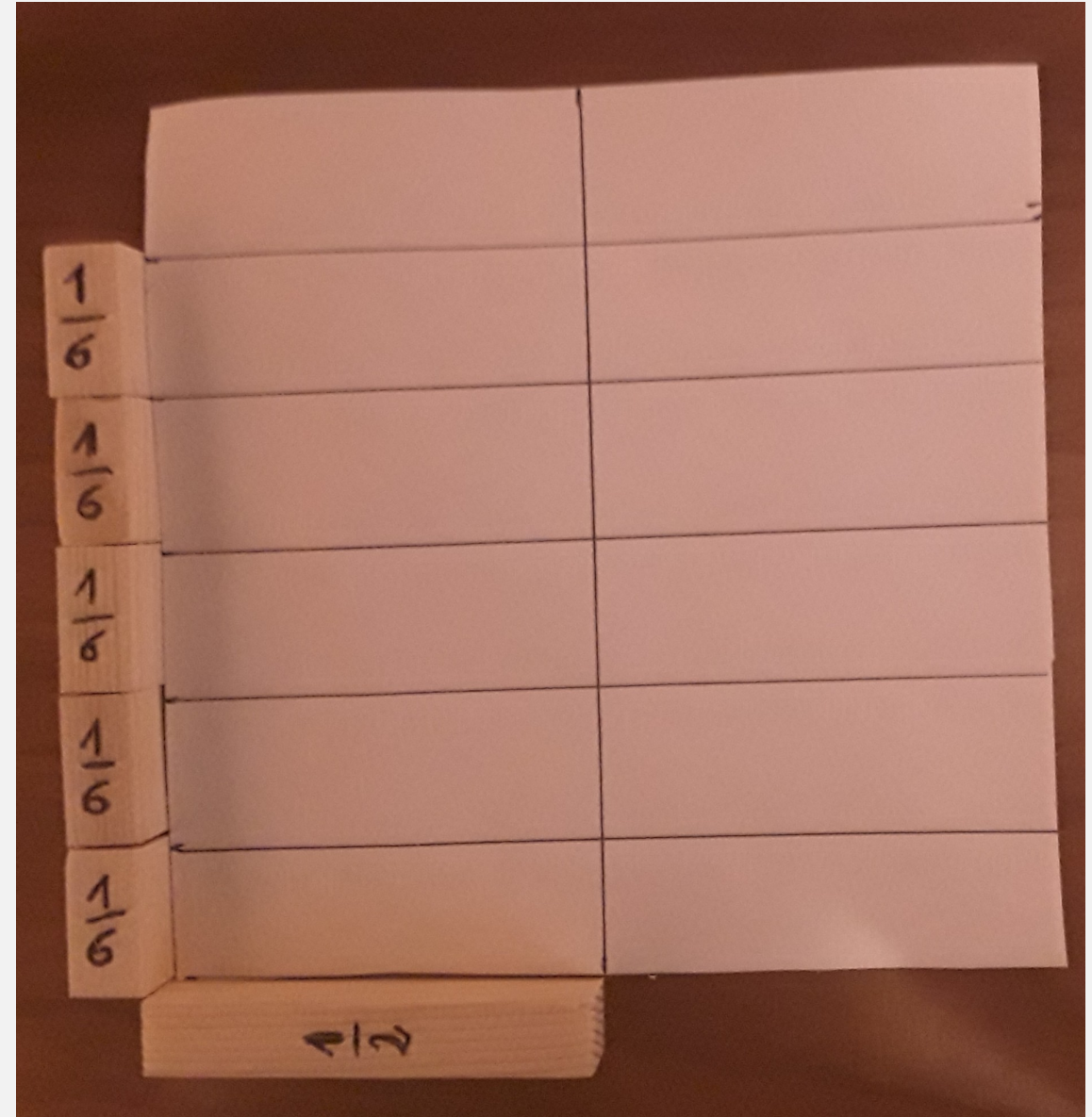


SI CONSIDERA UN QUADRATO
RITAGLIATO DA UN FOGLIO
BIANCO CHE HA COME LATI
L'ASTA CHE INDICA L'INTERO,
QUINDI LA SUA AREA SARÀ
 $1 \times 1 = 1$. IL PRODOTTO DI DUE
NUMERI ROTTI VERRÀ
RAPPRESENTATO COME UNA
FRAZIONE DELL'AREA
UNITARIA.

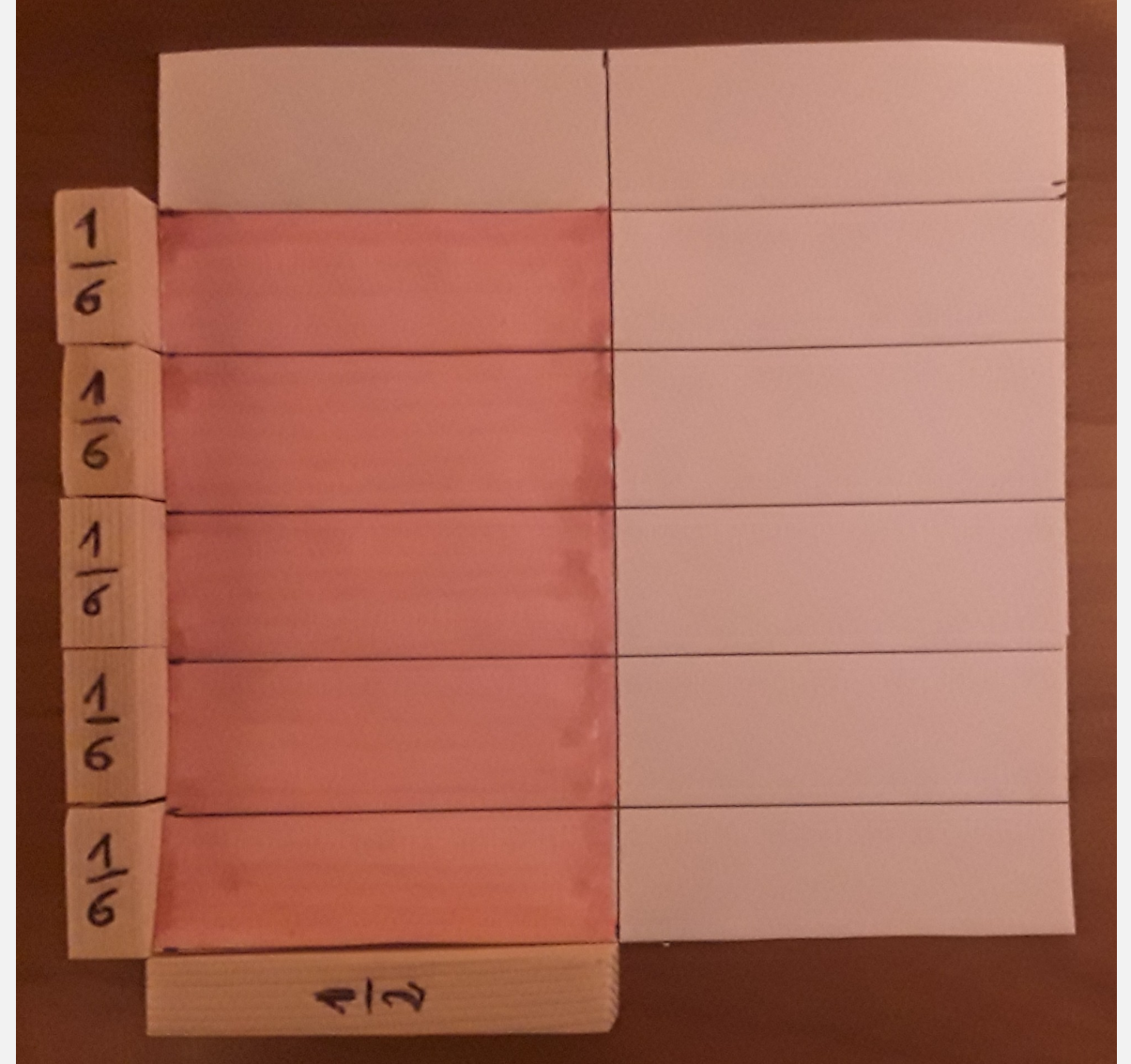
SI POSIZIONANO SU DUE LATI I
FATTORI, $\frac{1}{2} \times \frac{5}{6}$



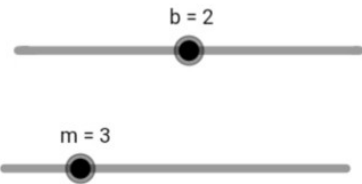
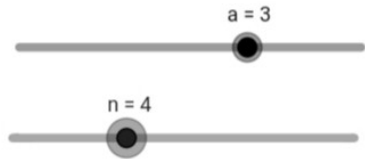
SI SUDDIVIDE CIASCUN LATO
IN TANTE PARTI QUANTE IL
«DENOMINATO», IN QUESTO
CASO 12 RETTANGOLI.



SI CONSIDERANO I
RETTANGOLI INDIVIDUATI
DALLE ASTE. IN QUESTO
CASO SONO 5, PER CUI
 $\frac{1}{2} \times \frac{5}{6} = \frac{5}{12}$.

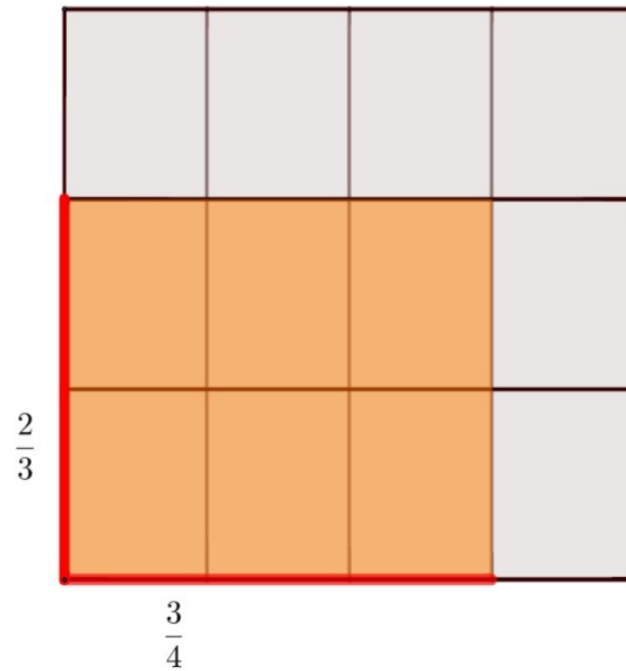


Si eseguono le moltiplicazioni anche con geogebra



$$\frac{a}{n} \times \frac{b}{m}$$

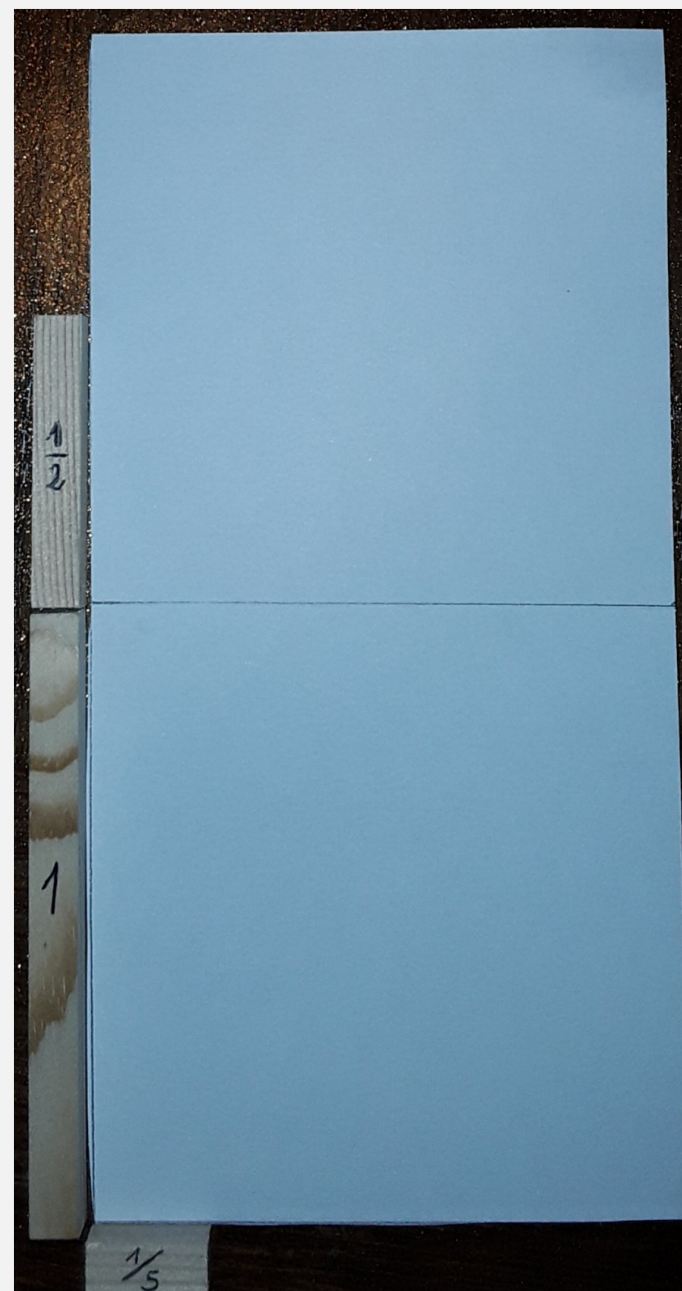
$$\frac{3}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{6}{12}$$



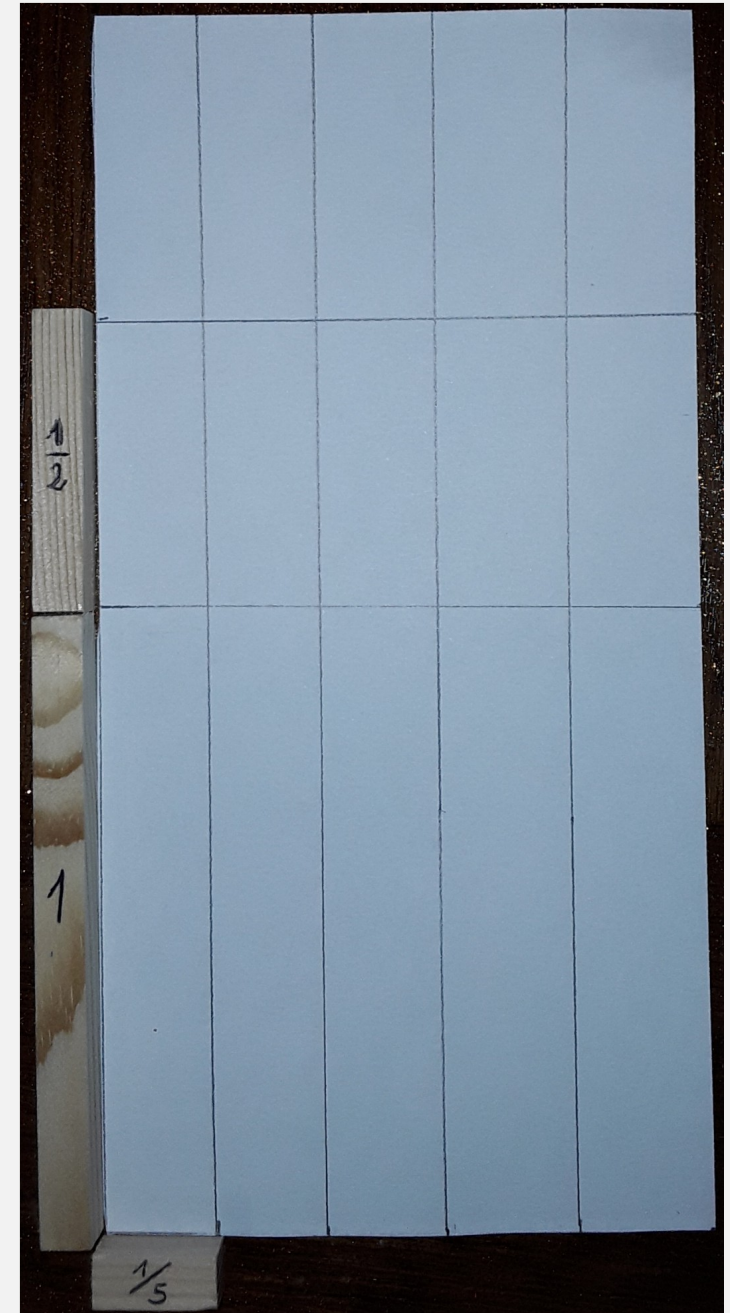
LE MOLTIPLICAZIONI VISTE
COINVOLGONO I NUMERI ROTTI
ED I LORO MULTIPLI. COME SI
SVOLGE CON I NUMERI MISTI?

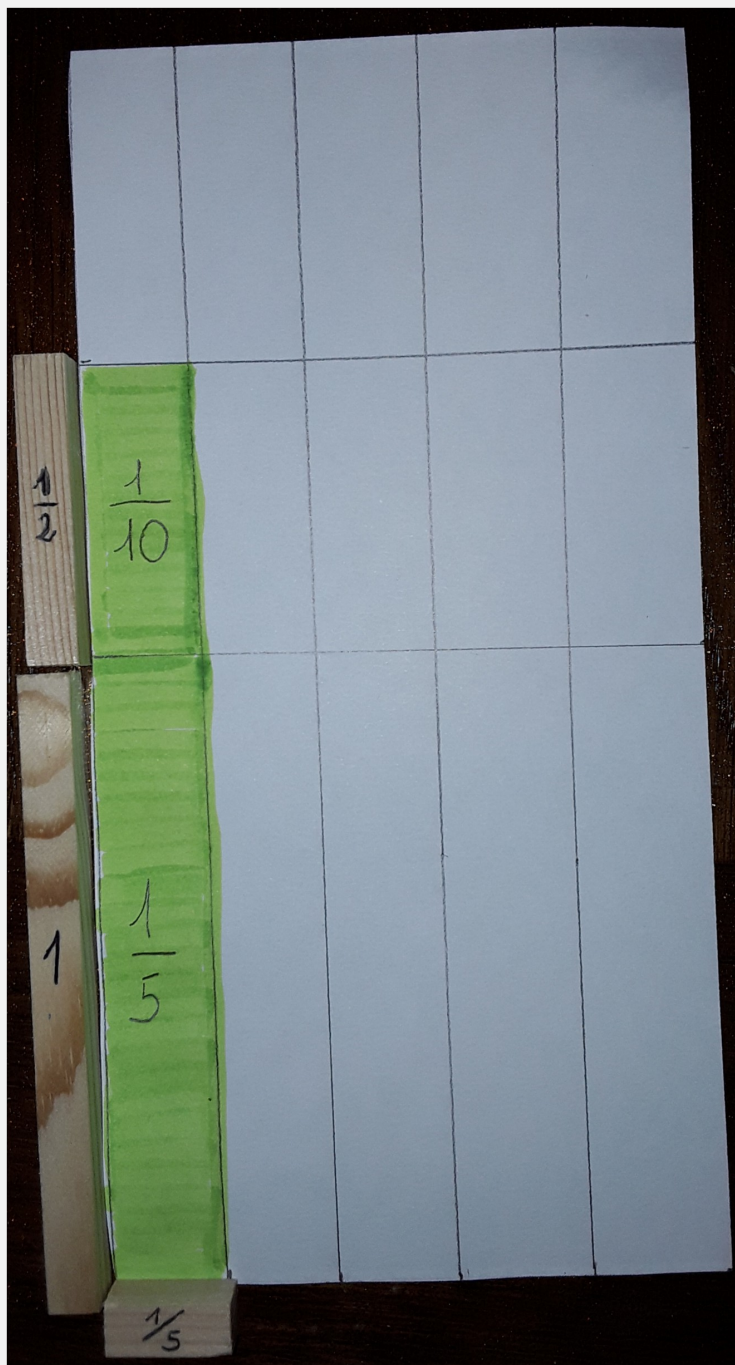
Se volessimo moltiplicare $(1+\frac{1}{2}) \times \frac{1}{5}$?

Disegniamo il rettangolo avente come
dimensioni il numero misto considerato ed il
numero rotto.



Suddividiamo il rettangolo tenendo in considerazione le lunghezze delle aste. Otteniamo così 5 rettangoli di dimensioni $\frac{1}{5}$ e 1, e 10 rettangoli di dimensioni $\frac{1}{5}$ e $\frac{1}{2}$.





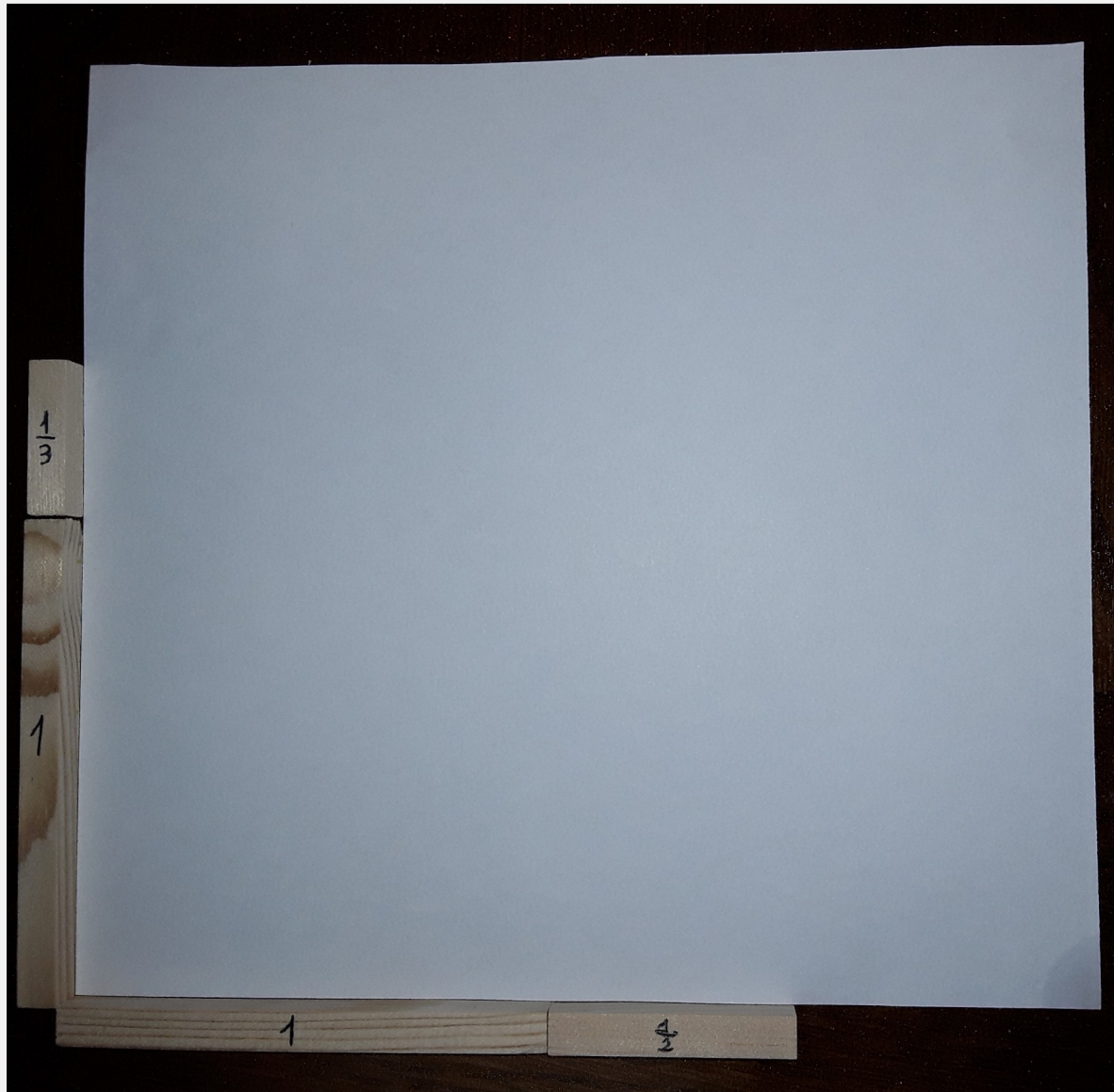
Con un procedimento analogo a quello adottato per i numeri rotti, si nota che la moltiplicazione si riduce all'addizione $\frac{1}{5} + \frac{1}{10}$. Si noti che tale costruzione segue la proprietà distributiva. Per cui,
 $(1 + \frac{1}{2}) \times \frac{1}{5} = 1 \times \frac{1}{5} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{5}$.

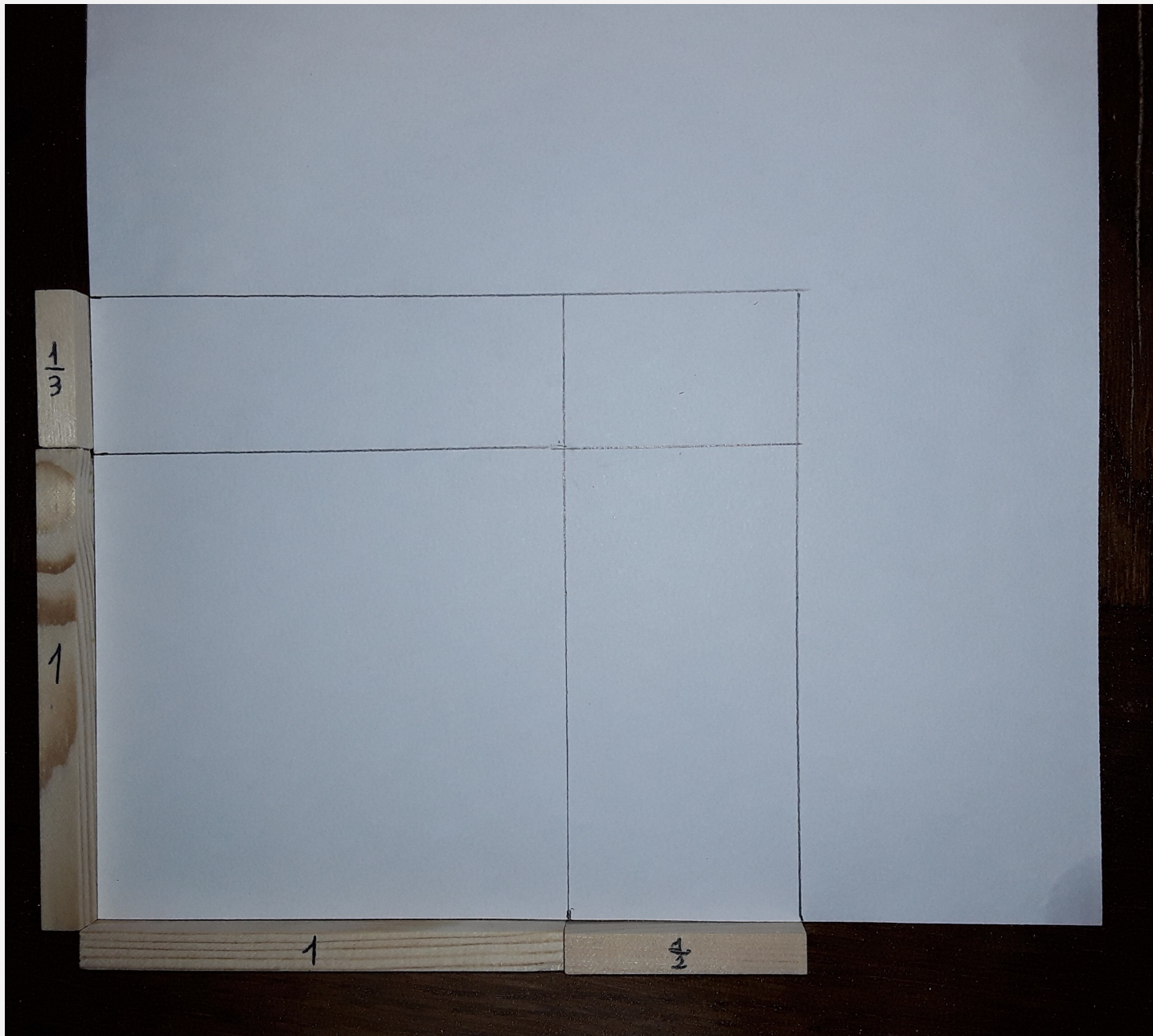
Dentro $\frac{1}{5}$ ci sono $\frac{2}{10}$, quindi si ottiene il prodotto richiesto, cioè $\frac{3}{10}$.



Eseguiamo ora la seguente moltiplicazione $(1+\frac{1}{2})\times(1+\frac{1}{3})$

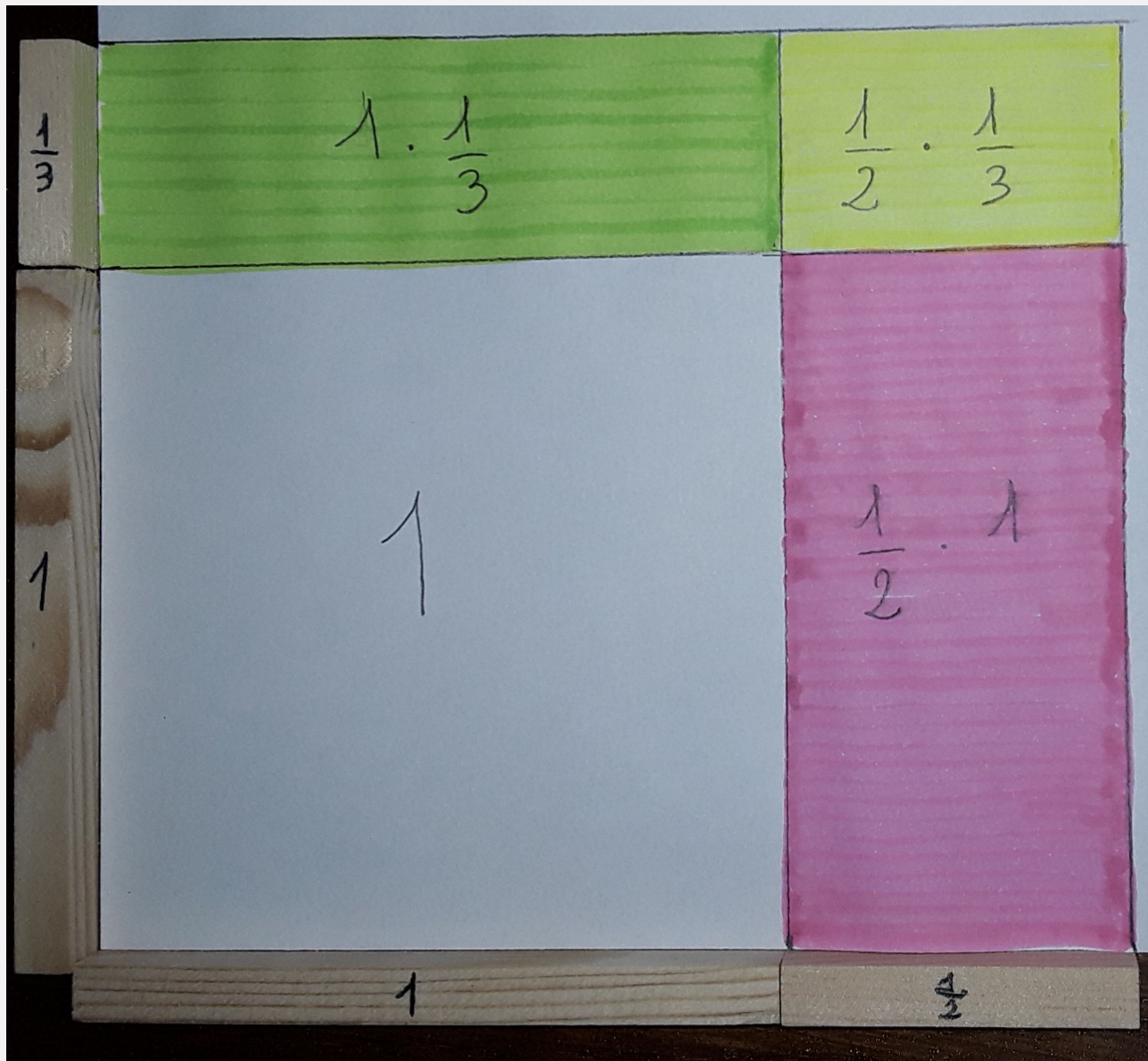
Si considera un foglio bianco e si posizionano su due lati consecutivi i fattori della moltiplicazione dei numeri misti in questione.



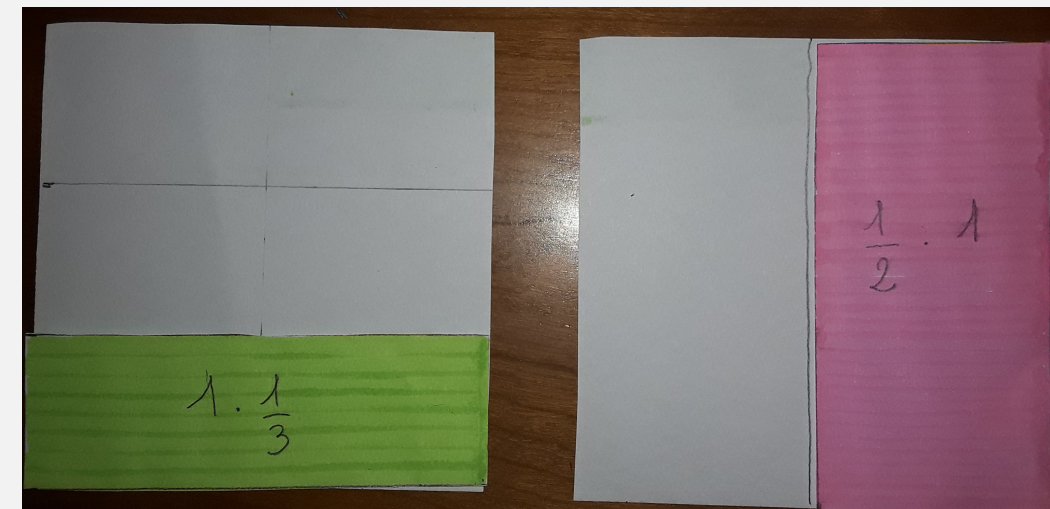


Si traccia il rettangolo di dimensioni le aste considerate. La moltiplicazione sarà l'area del rettangolo dato.

Si tracciano rispettivamente le parallele ai lati passanti per i punti in cui terminano le aste intere.



Il rettangolo iniziale risulta essere scomposto in un quadrato unitario e tre rettangoli, che esprimiamo come frazioni di esso.



Area rettangolo $(1+\frac{1}{3}) \times (1+\frac{1}{2}) = 1 + 1 \times \frac{1}{3} + 1 \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3}$, cioè la proprietà distributiva.

Per cui, si calcola il prodotto dei rotti e si somma al quadrato e ai rettangoli.

$$1 \cdot \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{2} \cdot 1$$

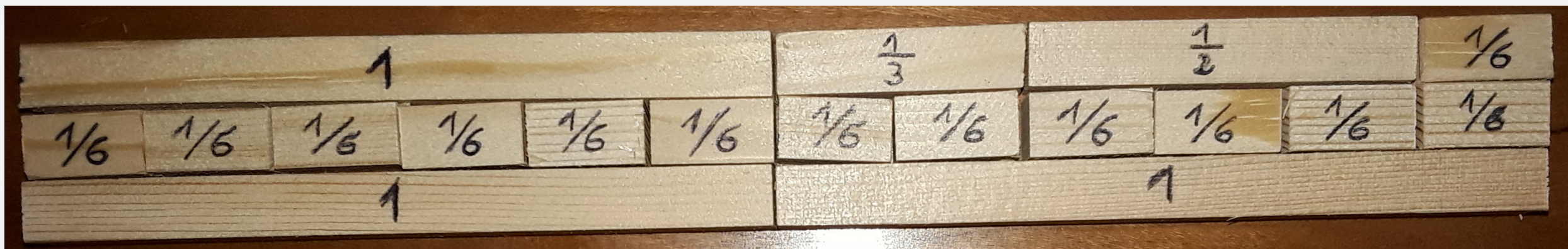
$$\frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{2}$$

Eseguiamo ora $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6}$.

Tutti i numeri sono divisibili per il numero rotto $\frac{1}{6}$.



Il prodotto è $\frac{12}{6}$, cioè 2.

IL PROGETTO CONTINUA....

Stiamo ideando altre attività relative alla divisione, alla divisione tra frazioni, ai rapporti e proporzioni, essenziali per i commercianti dell'epoca, periodo fiorente per l'economia, ed usati anche dai pittori e dagli architetti nei secoli successivi....

Sempre con lo stesso obiettivo, diffondere una cultura interdisciplinare in cui le conoscenze matematiche si intreccino a quelle umanistiche.