Numeri

Francesca Tovena Università di Roma Tor Vergata
Laura Lamberti Liceo Righi

Progetto con la mente e con le mani
Accademia dei Lincei
Polo di Roma
16 gennaio 2019

- …. La volta scorsa........

Le frazioni di Farey e il teorema di Pick
- Area del parallelogramma
- Aree di poligoni con vertici sulla griglia
- Proprietà delle frazioni di Farey
- Risoluzione di problemi lineari

….ancora prima....
- Il reticolo
- la diagonale dei rettangoli e il MCD
- divisori e multipli

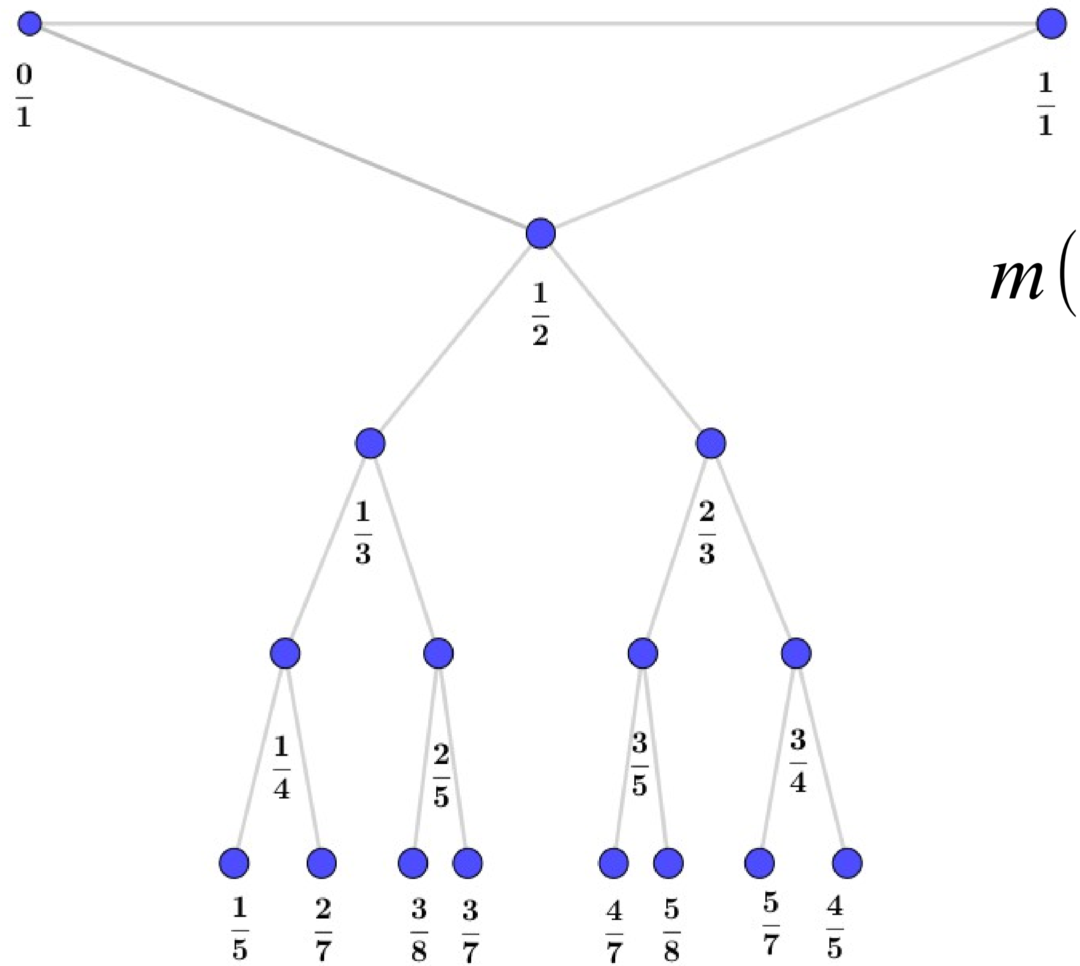
In questo quarto incontro:

-Costruzione dell'albero dei medianti [Brocot-tree]
- Applicazione geometrica delle frazioni di Farey [Ford circles]

- Approssimazione dei numeri razionali con le frazioni di Farey
-Costruzione delle frazioni continue per i numeri razionali
- Costruzione delle frazioni continue per irrazionali quadratici

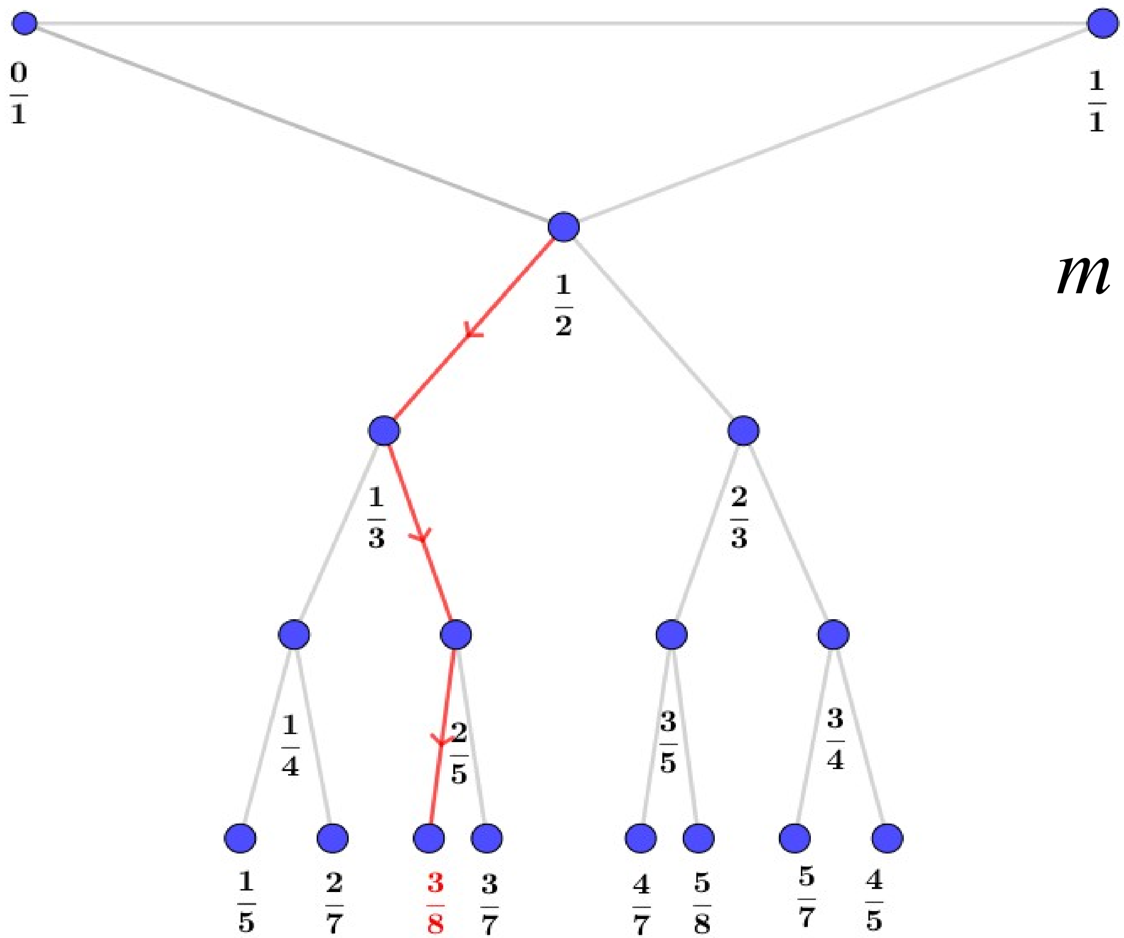
-Approssimazione di π con medianti e/o convergenti

Costruzione dell'albero dei medianti



$$m\left(\frac{p}{q},\frac{r}{s}\right)=\frac{p+r}{q+s}$$

Approssimazione di 3/8 attraverso l'albero

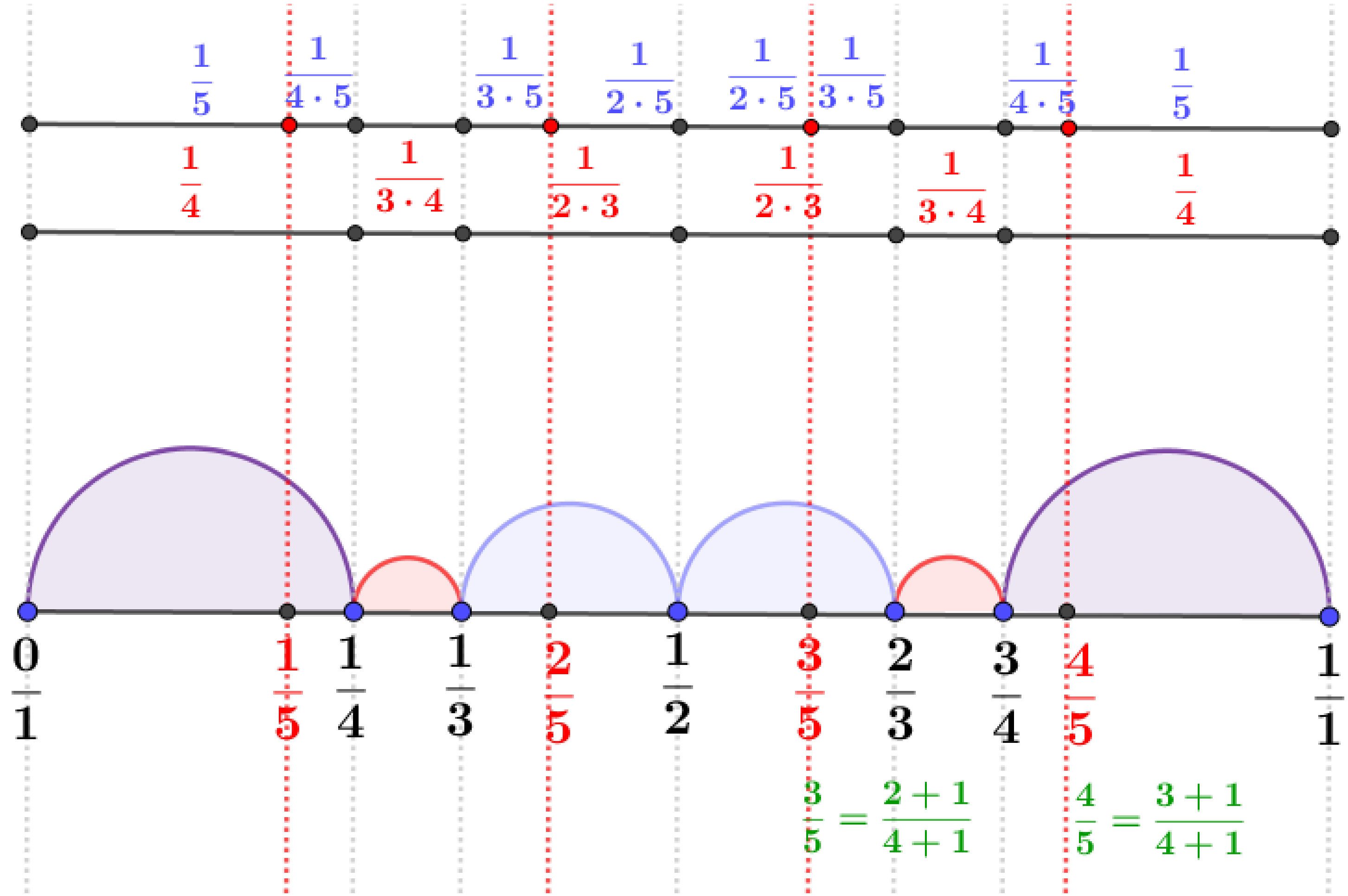


$$m\left(\frac{p}{q},\frac{r}{s}\right)=\frac{p+r}{q+s}$$

1/2
1/3
2/5
3/8

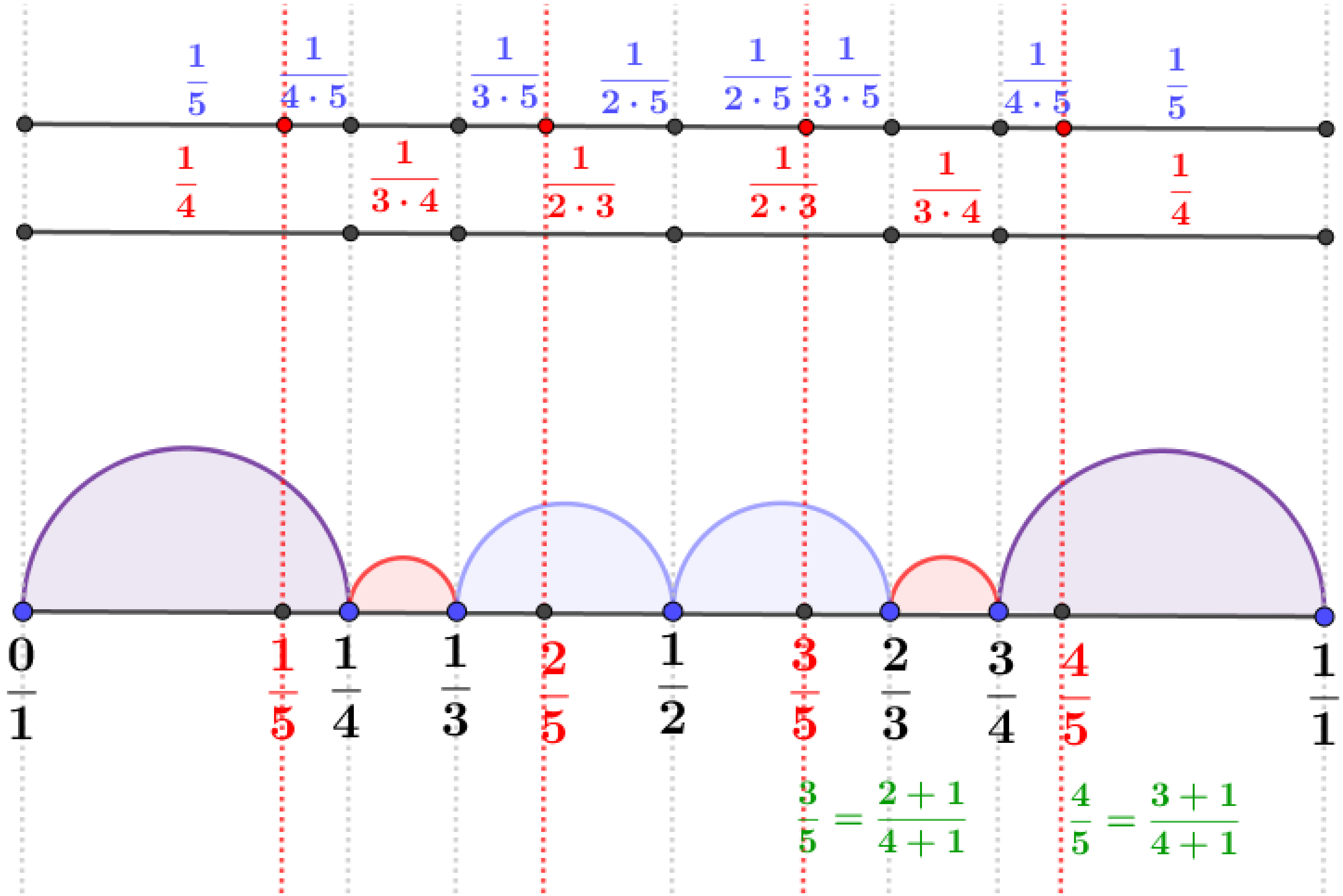
Seguendo il percorso otteniamo la successione dei razionali approssimanti e possiamo anche associare al numero 3/8 una stringa che lo identifica : LRL

Frazioni di Farey
ordinate sulla retta orientata



I medianti tra due frazioni “vicine” si inseriscono tra le frazioni e hanno minima distanza da entrambe

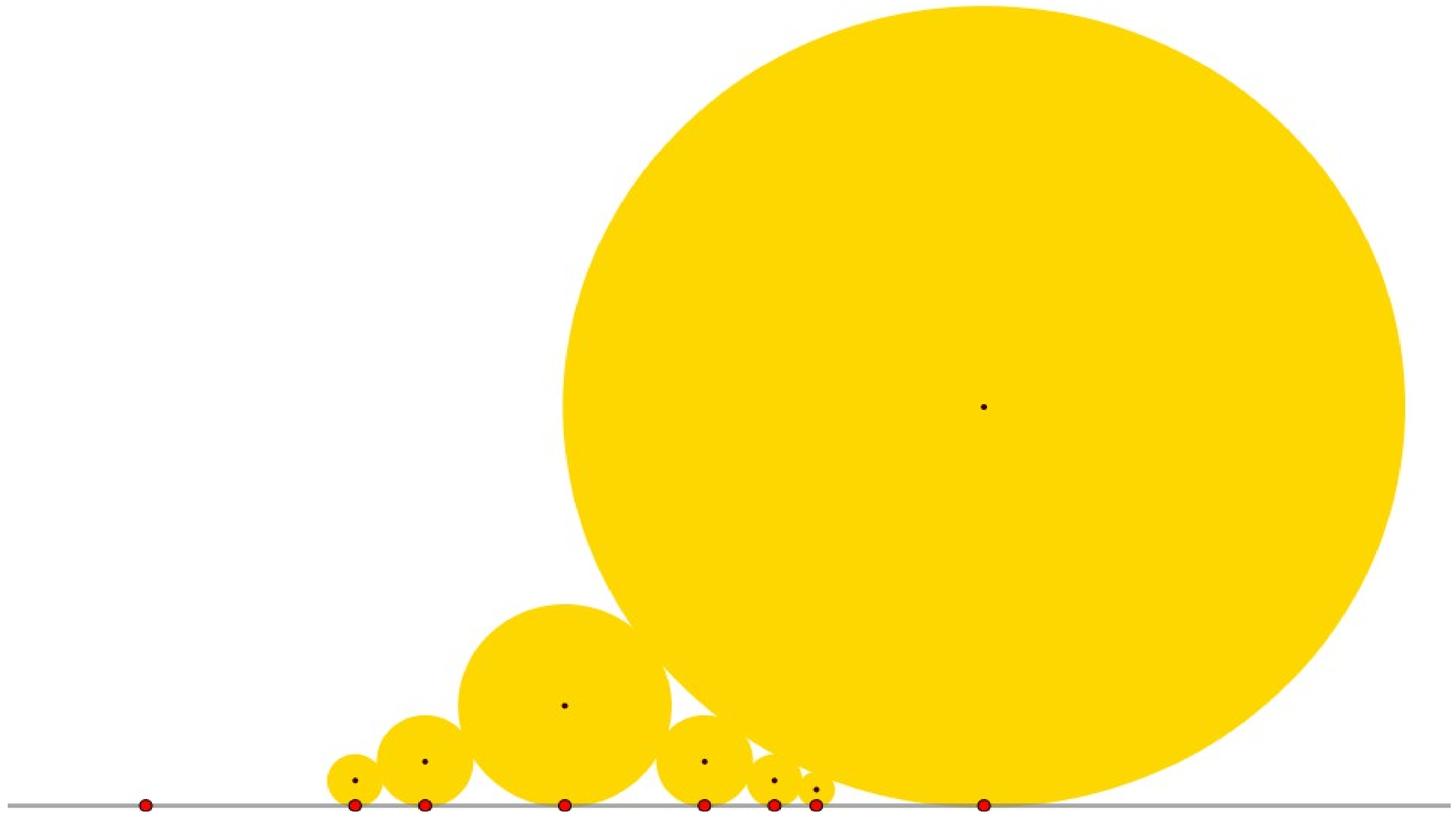
Frazioni di Farey
ordinate sulla retta orientata



$$\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{a\,d-b\,c}{b\,d}=\frac{1}{b\,d}$$

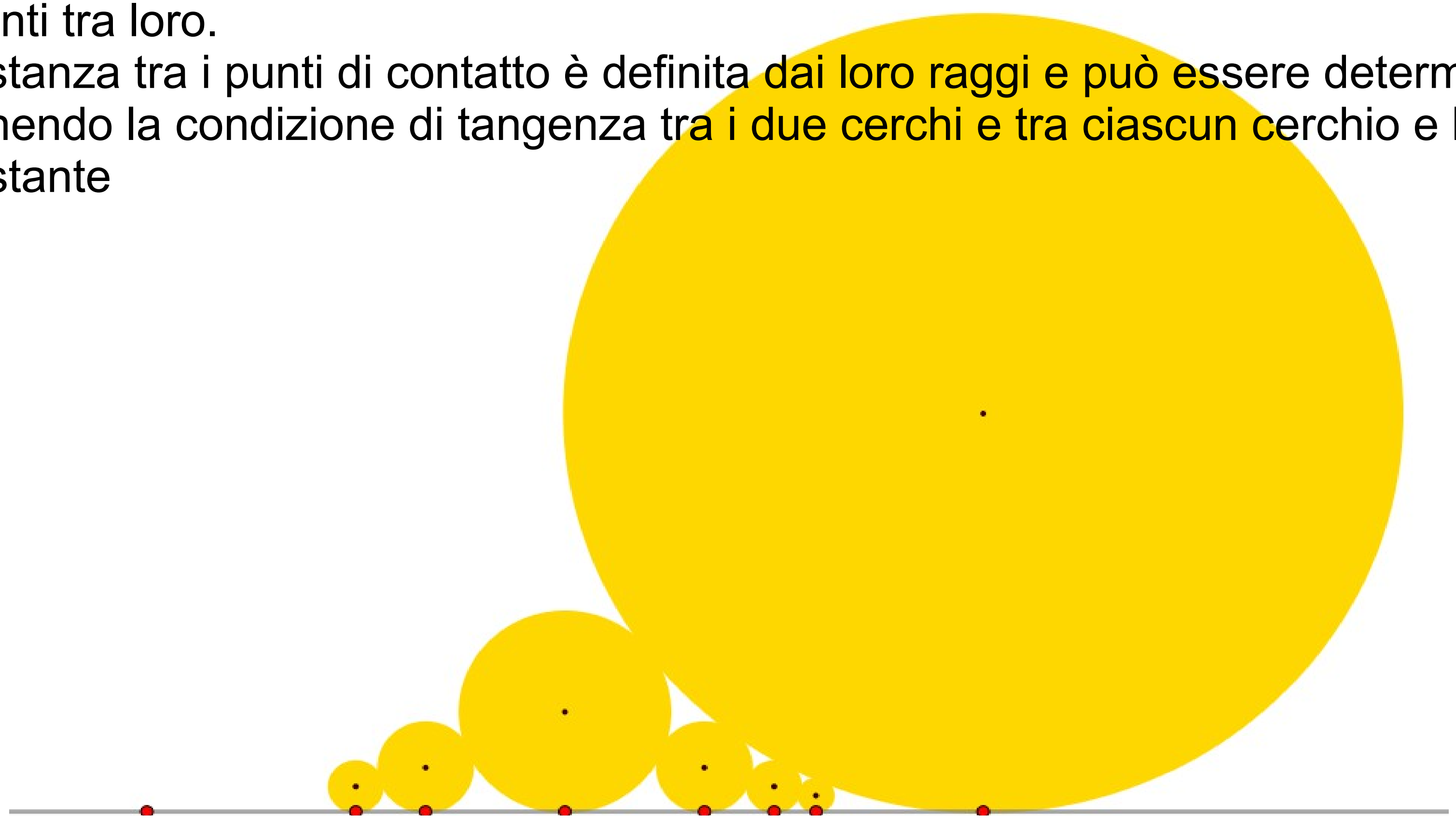
I Ford circle
la geometria e le frazioni di Farey

Immaginiamo di voler disegnare una successione di cerchi tangenti tutti alla stessa retta e tra loro tangenti a coppie.



I Ford circle
la geometria e le frazioni di Farey

Ciascun cerchio tocca la retta in un punto.
Seguendo l'ordine dei punti di contatto possiamo individuare le coppie di cerchi tangenti tra loro.
La distanza tra i punti di contatto è definita dai loro raggi e può essere determinata imponendo la condizione di tangenza tra i due cerchi e tra ciascun cerchio e la retta sottostante

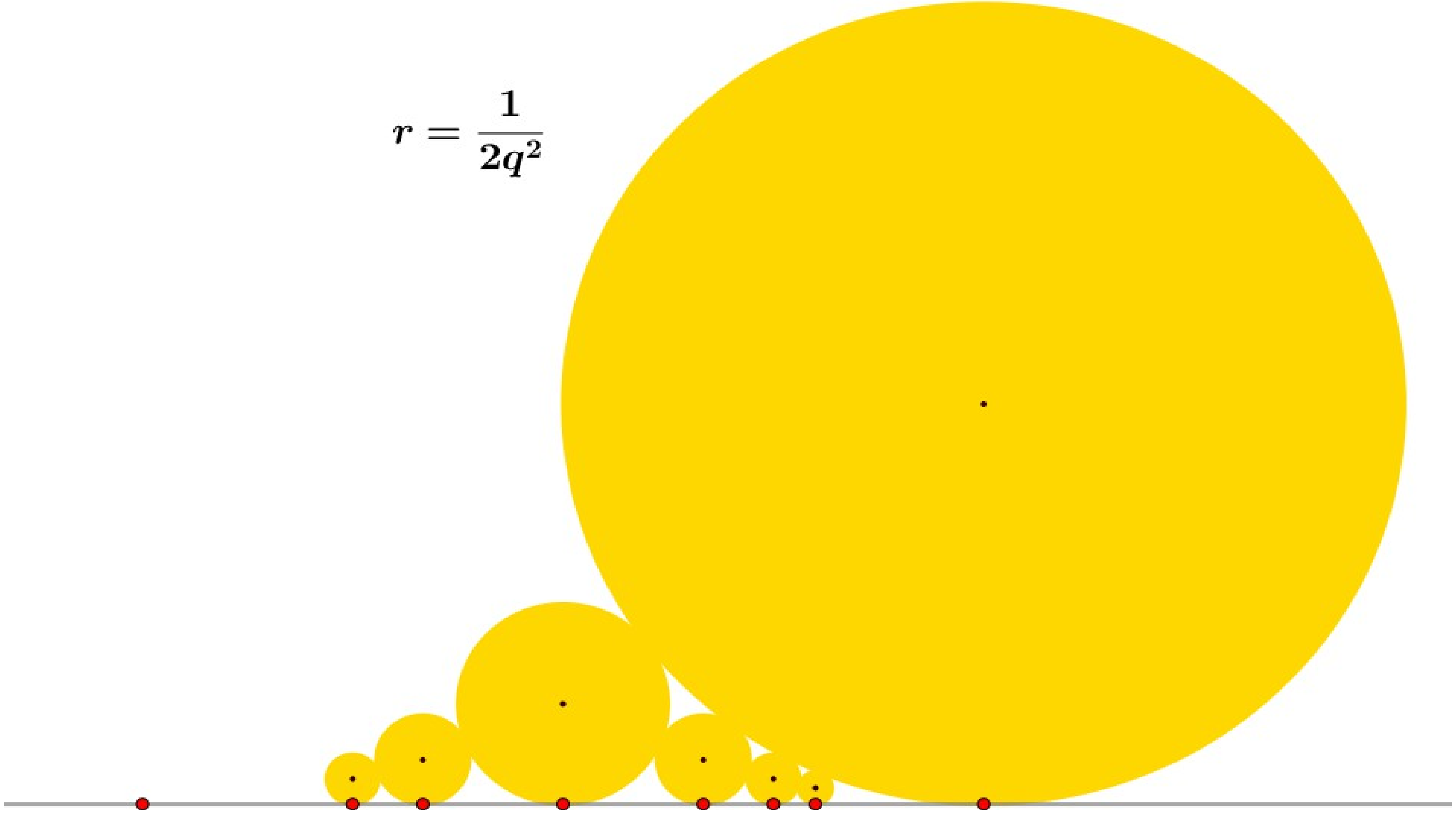


In generale la distanza d tra due punti di contatto è $d = 2\sqrt{Rr}$

I Ford circle
la geometria e le frazioni di Farey

Scegliamo adesso una opportuna sequenza di raggi e disegniamo un insieme di cerchi tangenti tutti alla stessa retta e tra loro tangenti o esterni.

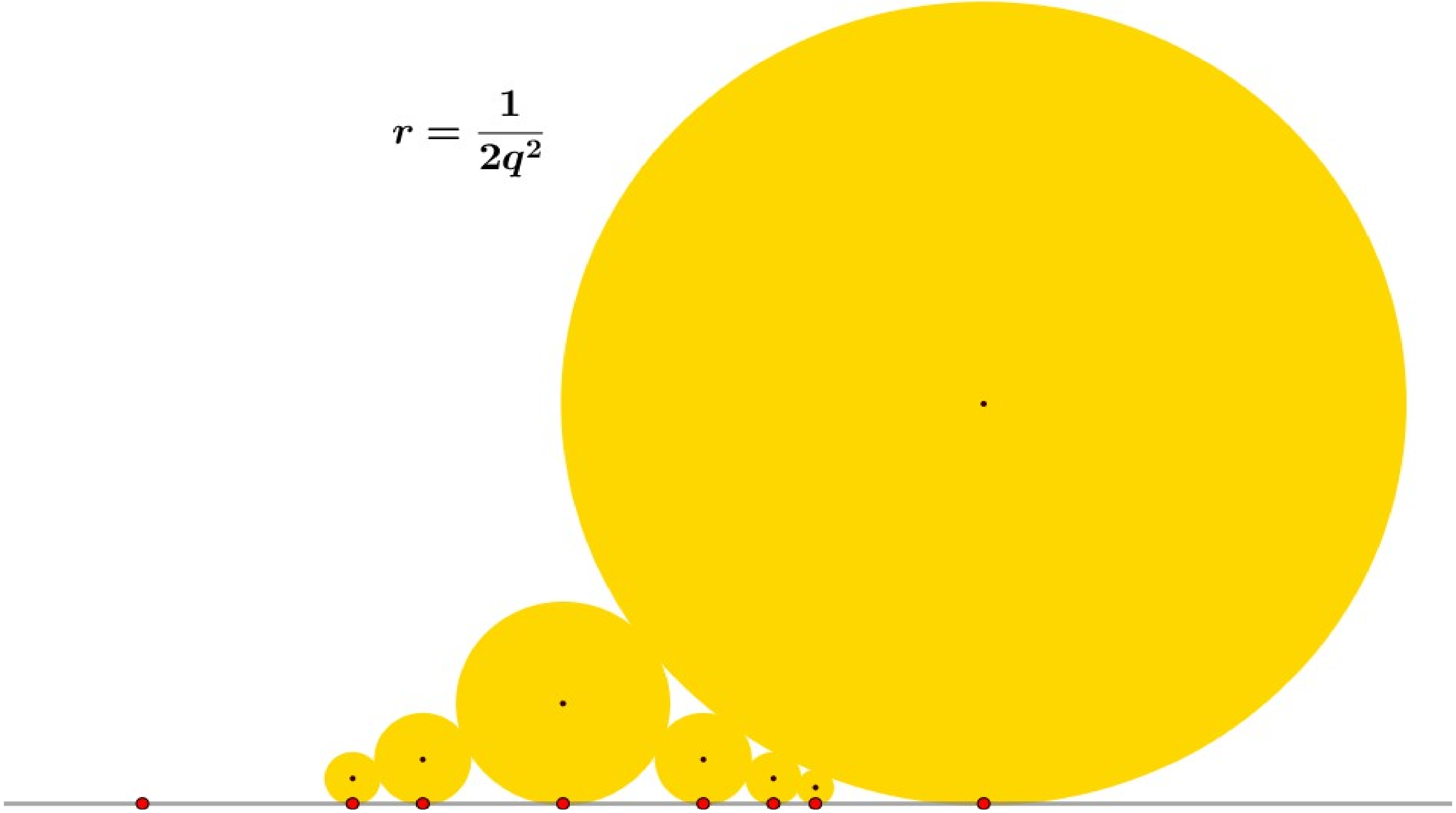
$$r = \frac{1}{2q^2}$$



I Ford circle
la geometria e le frazioni di Farey

Scegliamo una opportuna sequenza di raggi e disegniamo un insieme di cerchi tangenti tutti alla stessa retta e tra loro tangenti o esterni.

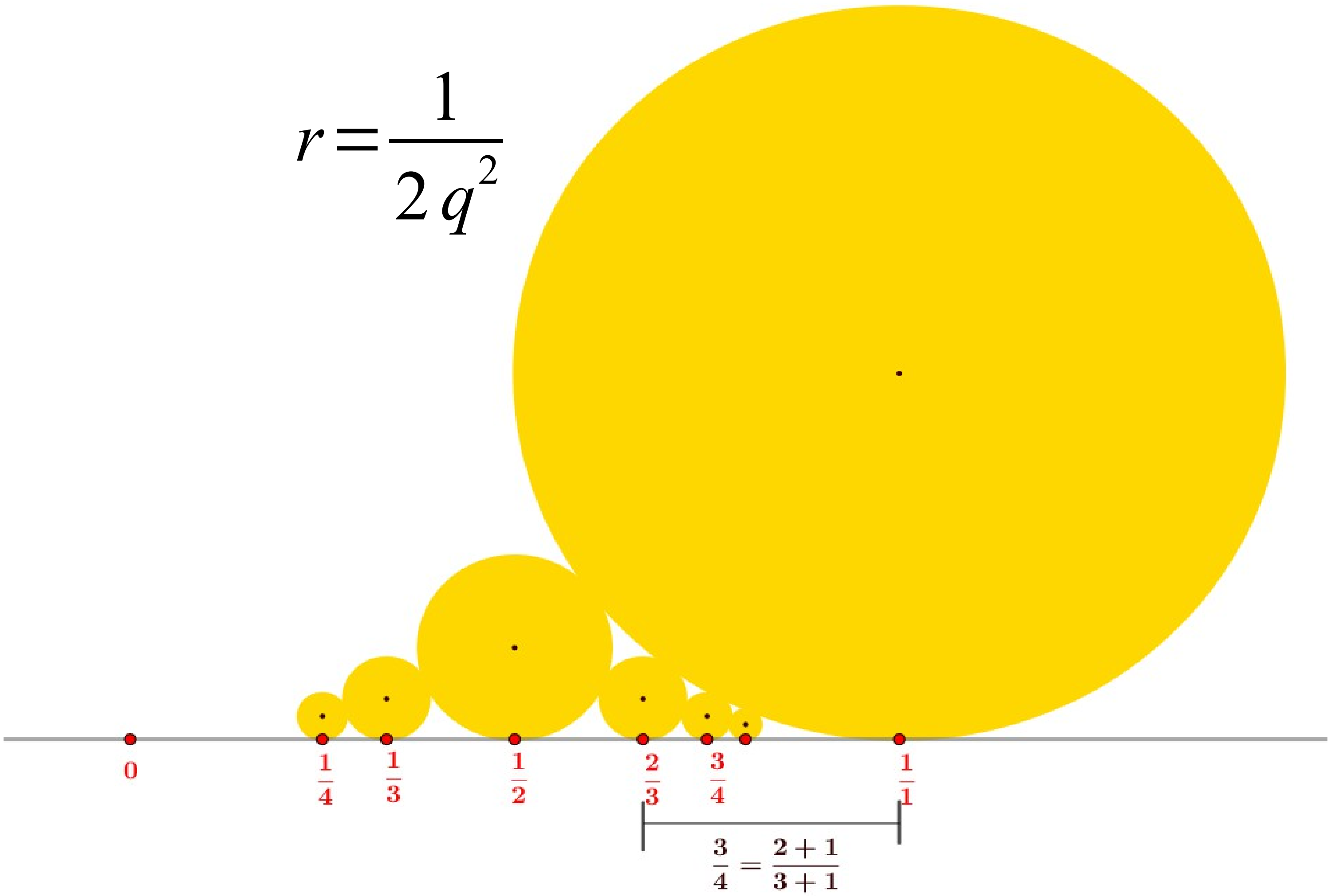
$$r = \frac{1}{2q^2}$$



I Ford circle
la geometria e le frazioni di Farey

Supponiamo di adottare la formula indicata per i raggi dei cerchi e iniziare a posizionare
Il cerchio di raggio 1/2 (q=1) sul punto di ascissa 1 della retta.

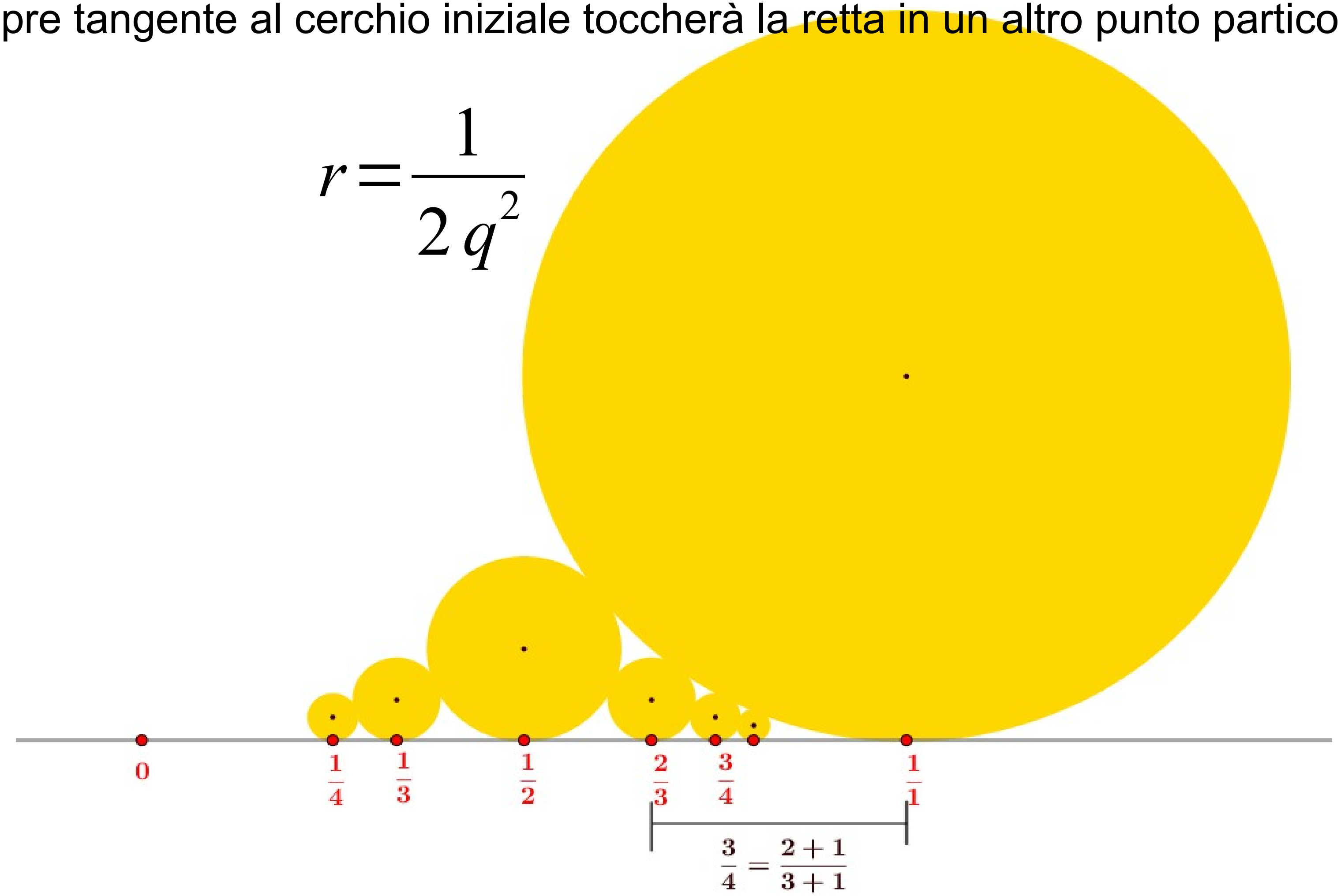
$$r = \frac{1}{2q^2}$$



I Ford circle
la geometria e le frazioni di Farey

Noteremo che il cerchio di raggio 1/8 (q=2), tangente al cerchio iniziale, toccherà la retta in un punto di ascissa particolare e che anche il cerchio di raggio 1/18 (q=3) sempre tangente al cerchio iniziale toccherà la retta in un altro punto particolare.

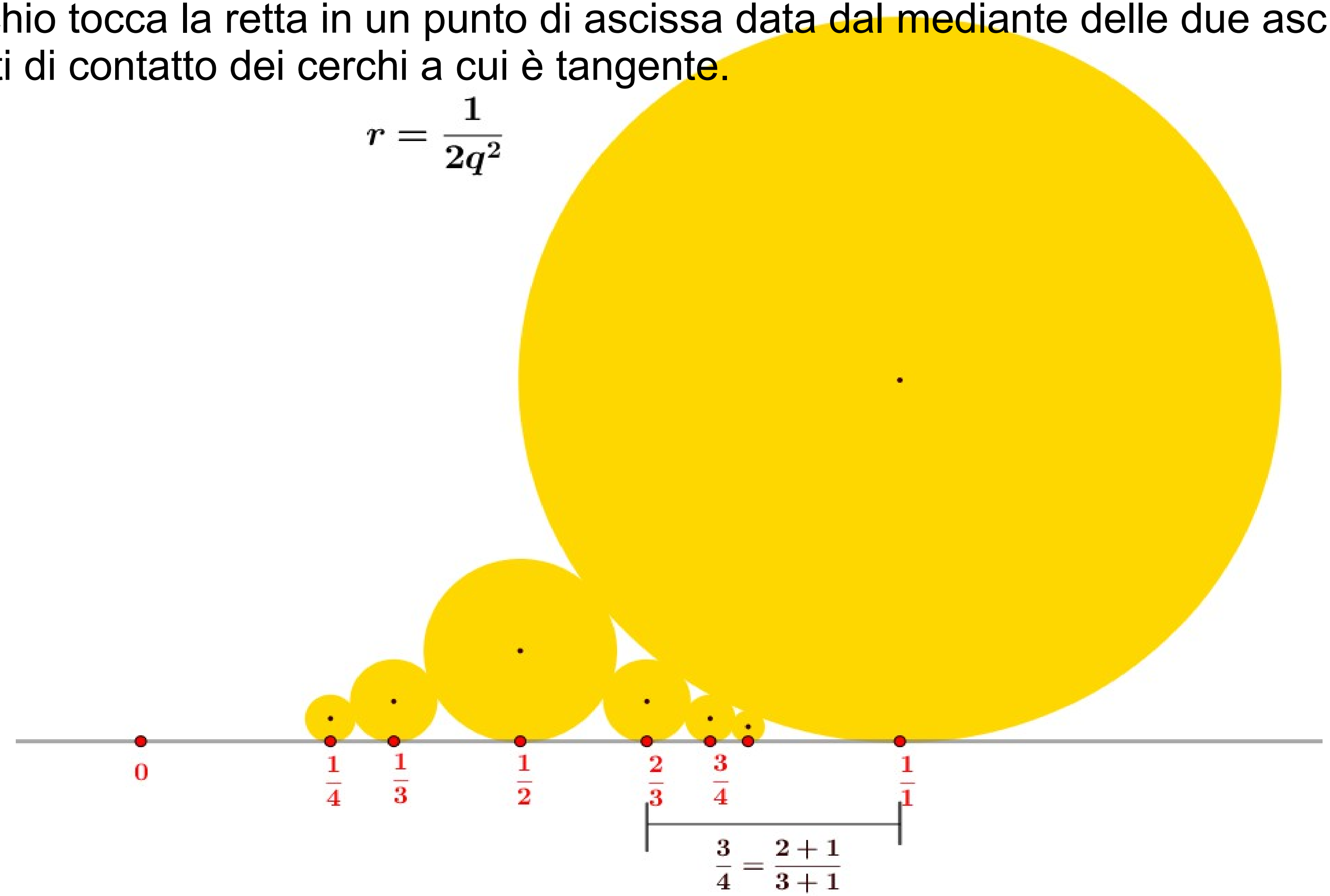
$$r = \frac{1}{2q^2}$$



I Ford circle
la geometria e le frazioni di Farey

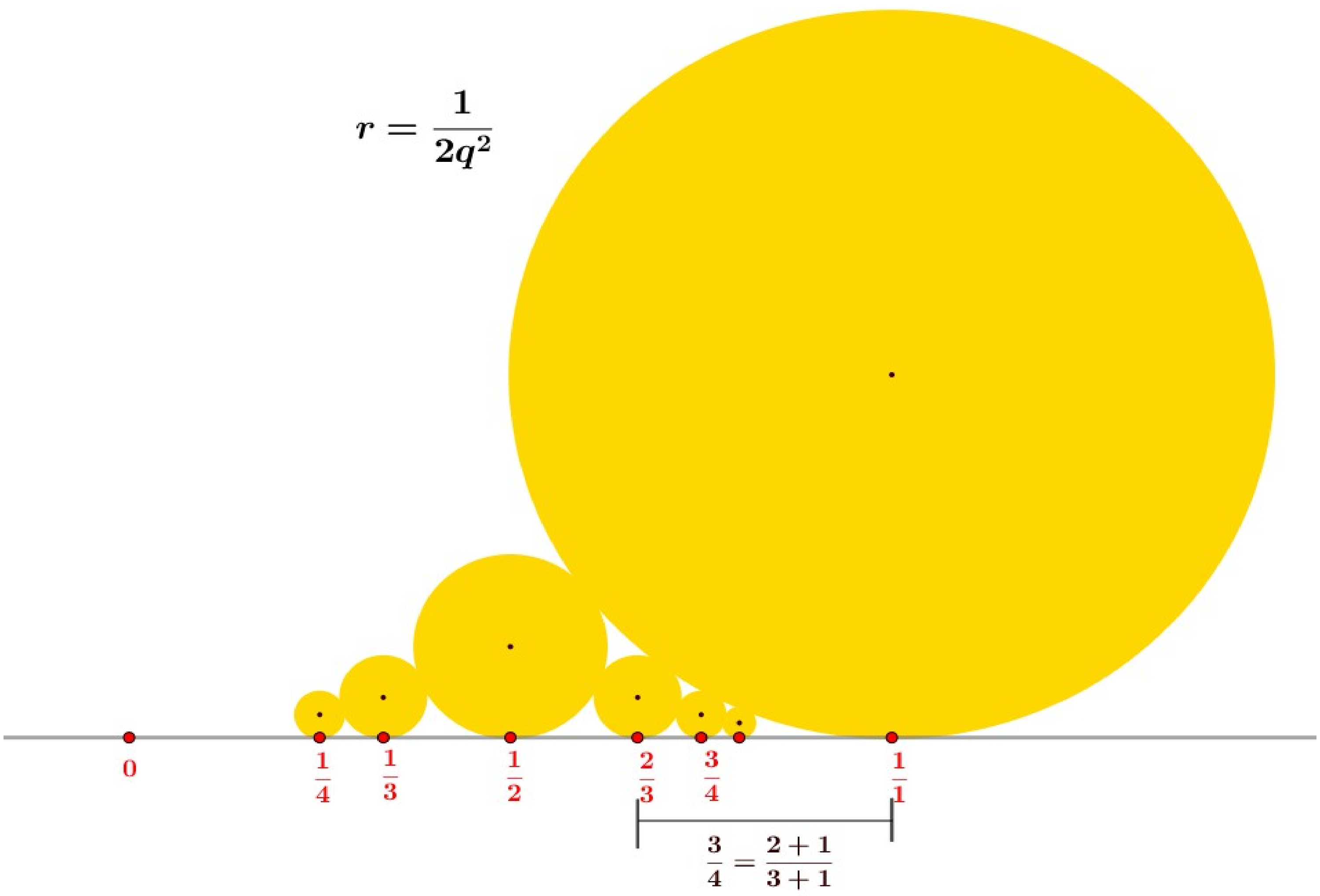
Analizzando la sequenza delle ascisse dei punti di contatto dei cerchi sulla retta ritroviamo una regolarità, ovvero: nel caso in cui volessimo inserire un cerchio tangente alla retta e tangente a due cerchi già disegnati troveremo che il nuovo cerchio tocca la retta in un punto di ascissa data dal mediante delle due ascisse dei punti di contatto dei cerchi a cui è tangente.

$$r = \frac{1}{2q^2}$$



I Ford circle
la geometria e le frazioni di Farey

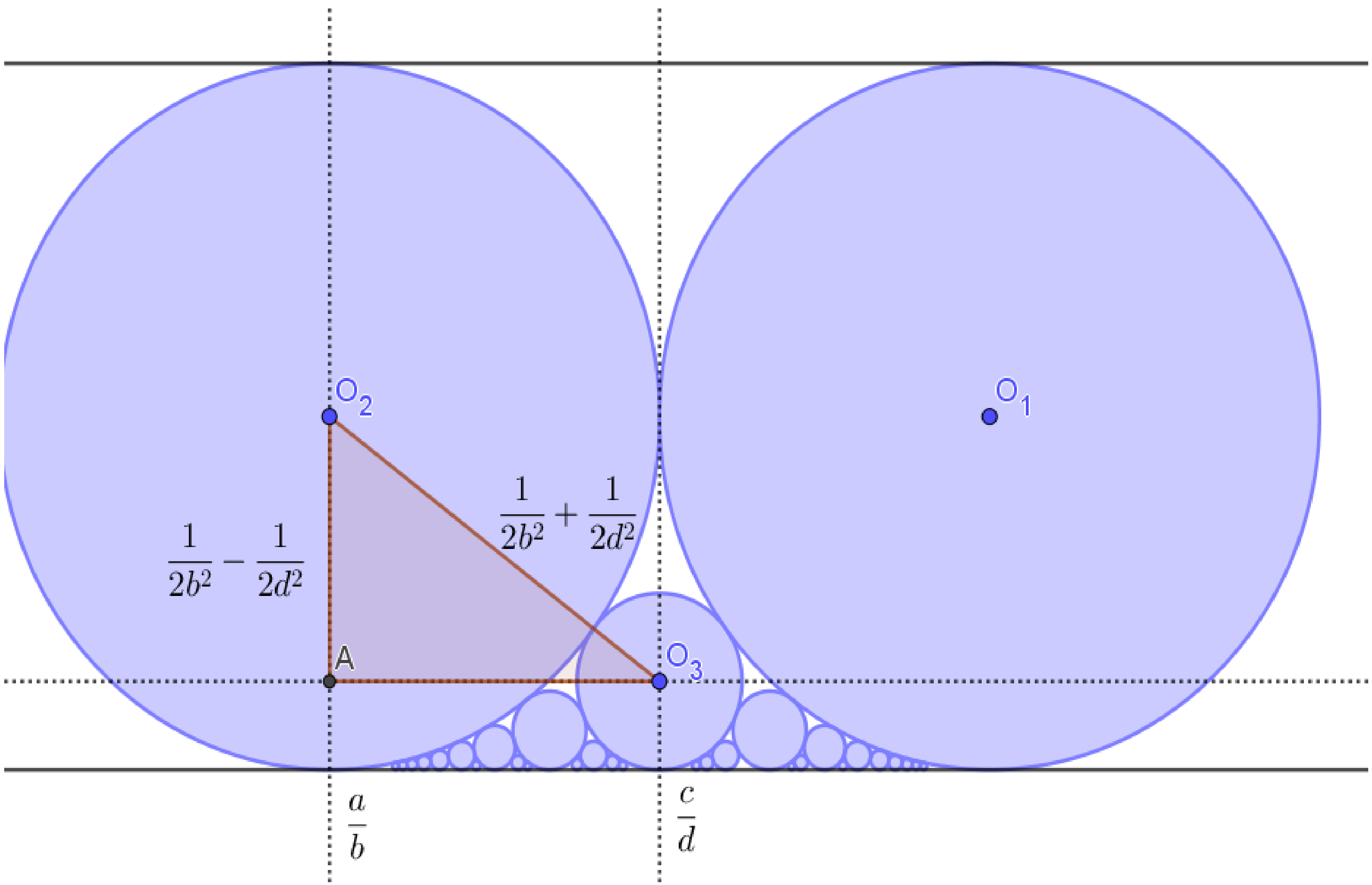
Per dimostrare questa regolarità basta applicare il teorema di Pitagora ad una coppia di cerchi tangenti tra loro e tangenti alla retta.



I Ford circle
la geometria e le frazioni di Farey

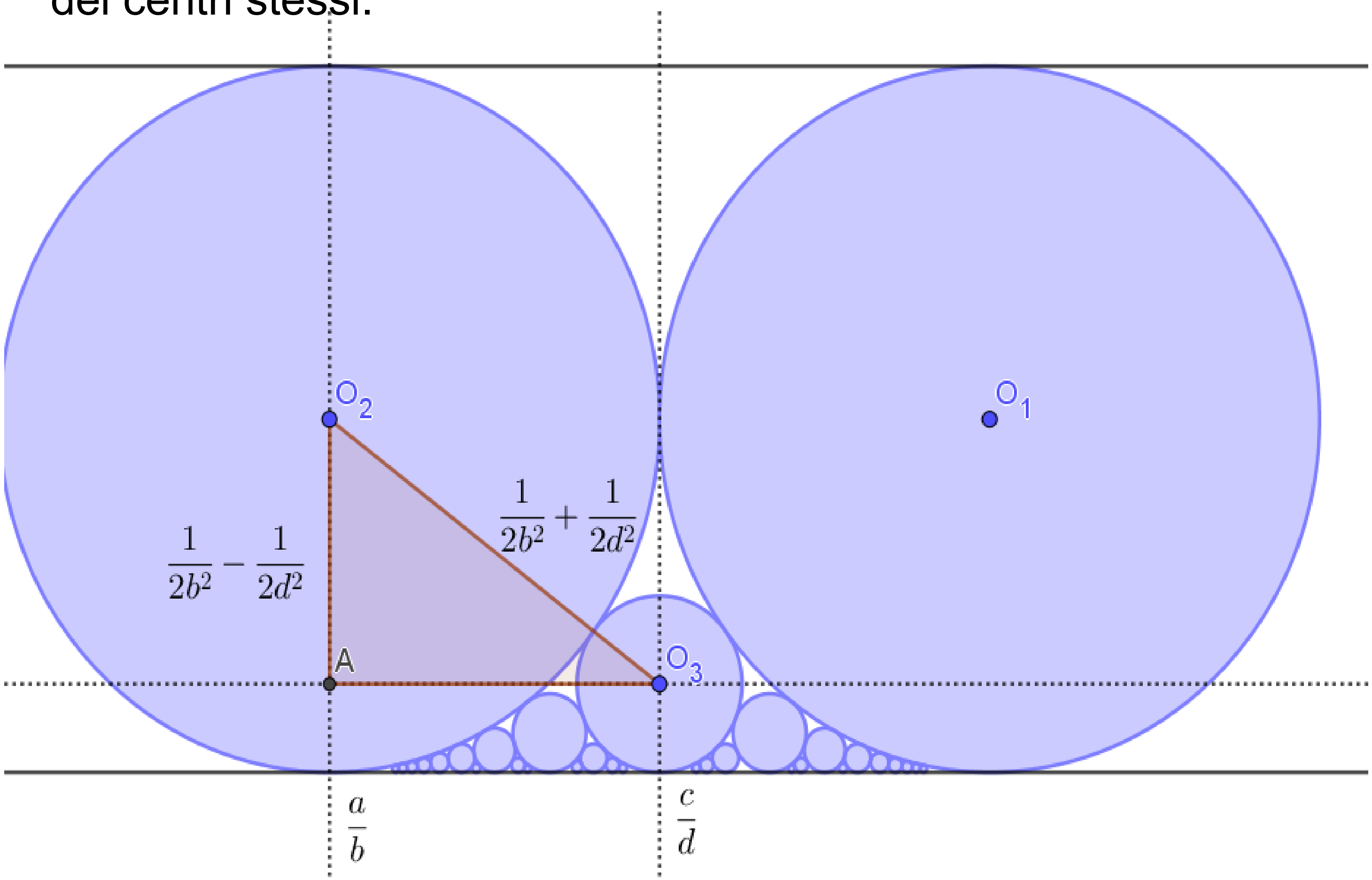
Partiamo da due cerchi tangenti tra loro e tangenti alla retta.
I raggi dei cerchi sono fissati dalla formula in cui q è il denominatore dell'ascissa del punto di contatto

$$r = \frac{1}{2q^2}$$



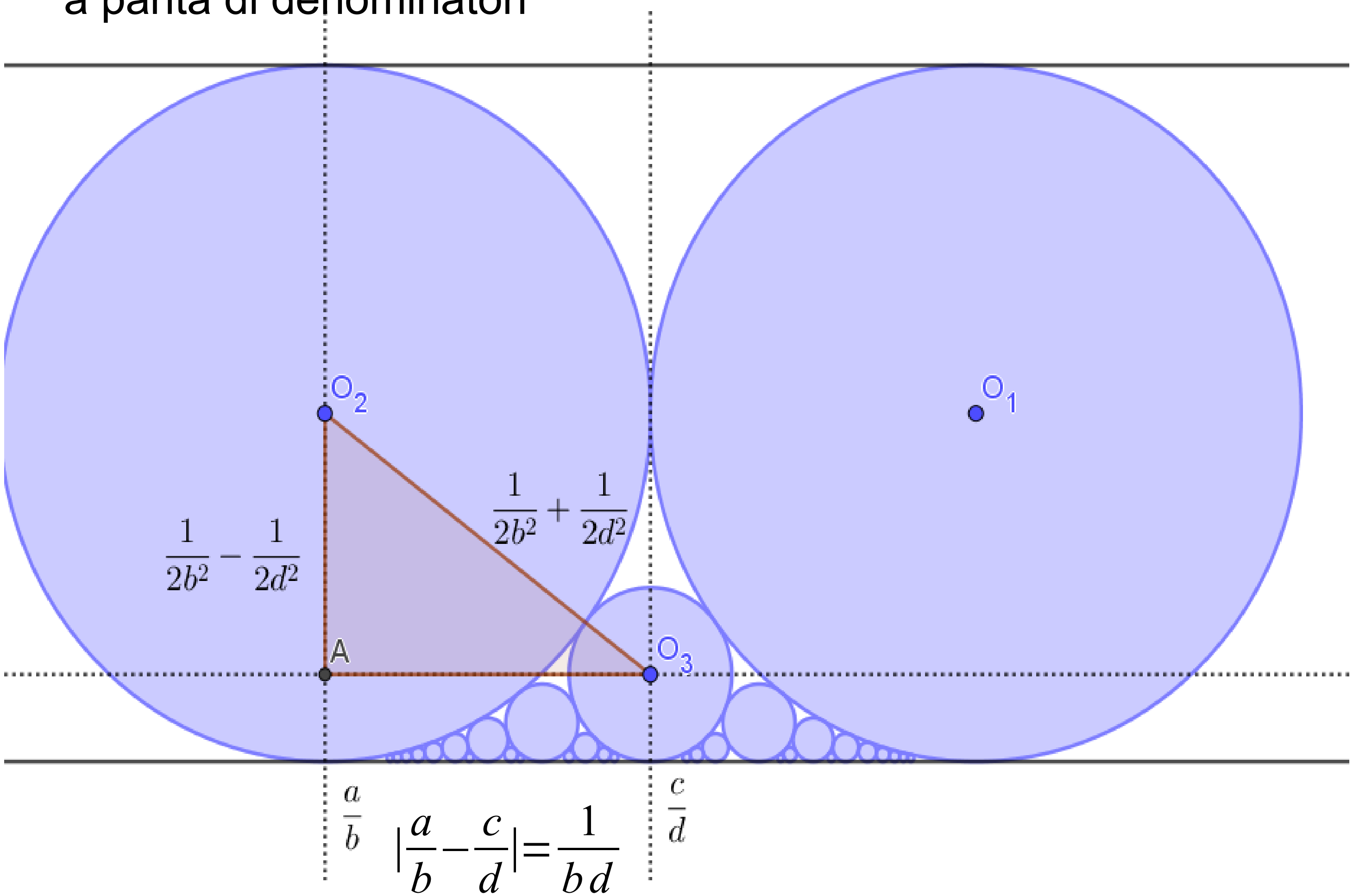
I Ford circle
la geometria e le frazioni di Farey

Applichiamo il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo AO_2O_3 ottenuto congiungendo i centri dei due cerchi e disegnando i cateti come differenze tra le ascisse e le quote dei centri stessi.

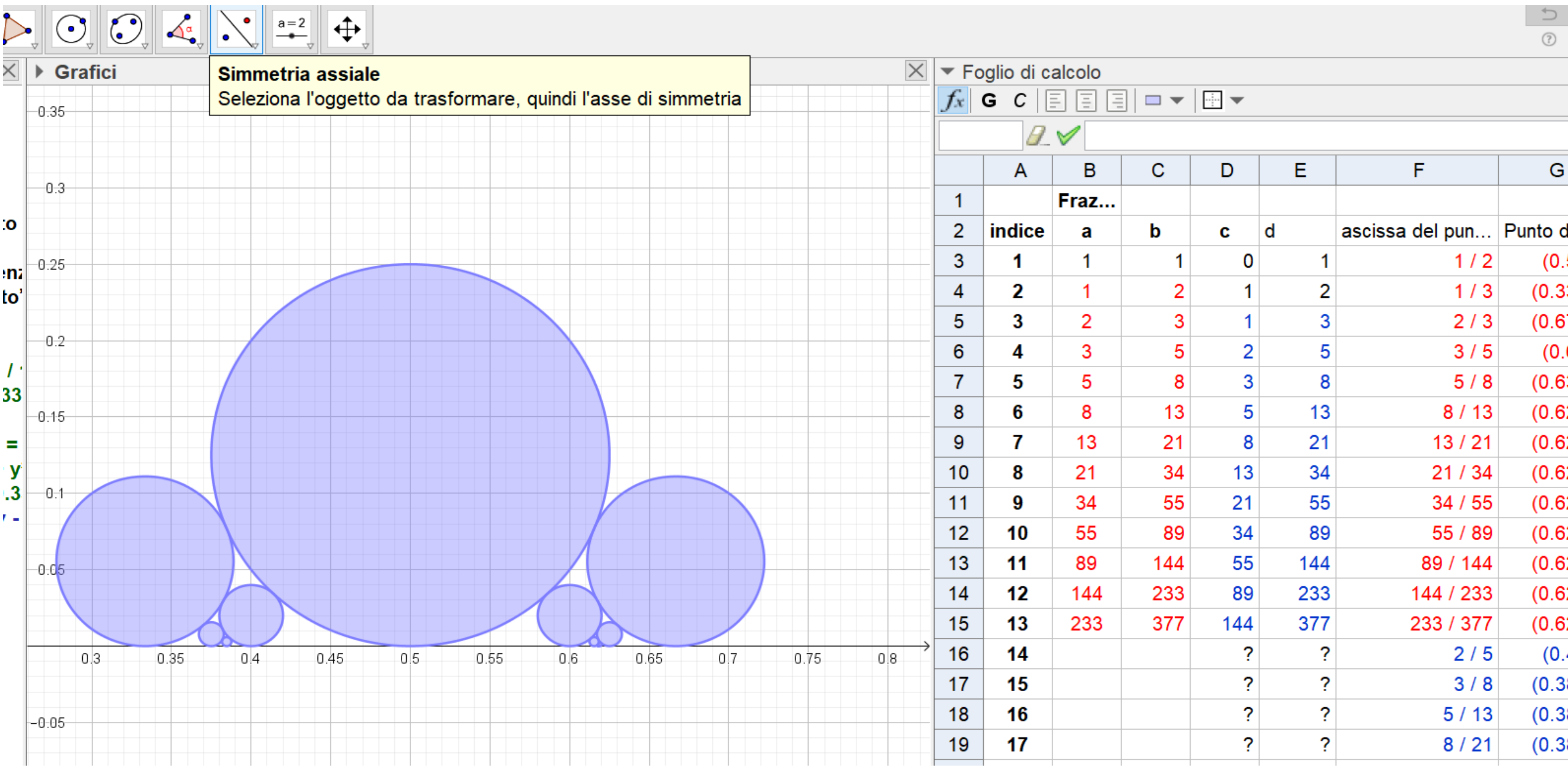


I Ford circle
la geometria e le frazioni di Farey

Scopriremo che la differenza delle ascisse,
cioè la distanza tra i punti di contatto dei due cerchi è la stessa distanza
che si avrebbe se le due ascisse fossero due frazioni di Farey successive, la minima
a parità di denominatori



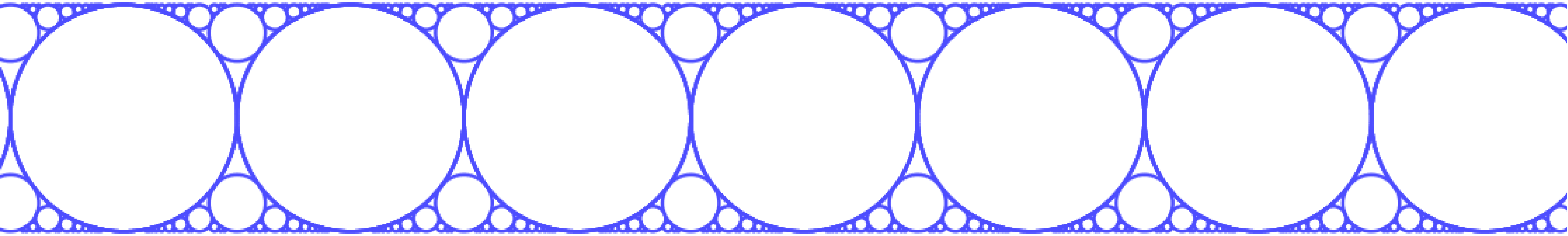
I Ford circle
la geometria e le frazioni di Farey



	A	B	C	D	E	F	G
1		Fraz...					
2	indice	a	b	c	d	ascissa del pun...	Punto di
3	1	1	1	0	1	1 / 2	(0.5,
4	2	1	2	1	2	1 / 3	(0.33,
5	3	2	3	1	3	2 / 3	(0.67,
6	4	3	5	2	5	3 / 5	(0.6,
7	5	5	8	3	8	5 / 8	(0.63,
8	6	8	13	5	13	8 / 13	(0.62,
9	7	13	21	8	21	13 / 21	(0.62,
10	8	21	34	13	34	21 / 34	(0.62,
11	9	34	55	21	55	34 / 55	(0.62,
12	10	55	89	34	89	55 / 89	(0.62,
13	11	89	144	55	144	89 / 144	(0.62,
14	12	144	233	89	233	144 / 233	(0.62,
15	13	233	377	144	377	233 / 377	(0.62,
16	14			?	?	2 / 5	(0.4,
17	15			?	?	3 / 8	(0.38,
18	16			?	?	5 / 13	(0.38,
19	17			?	?	8 / 21	(0.38,

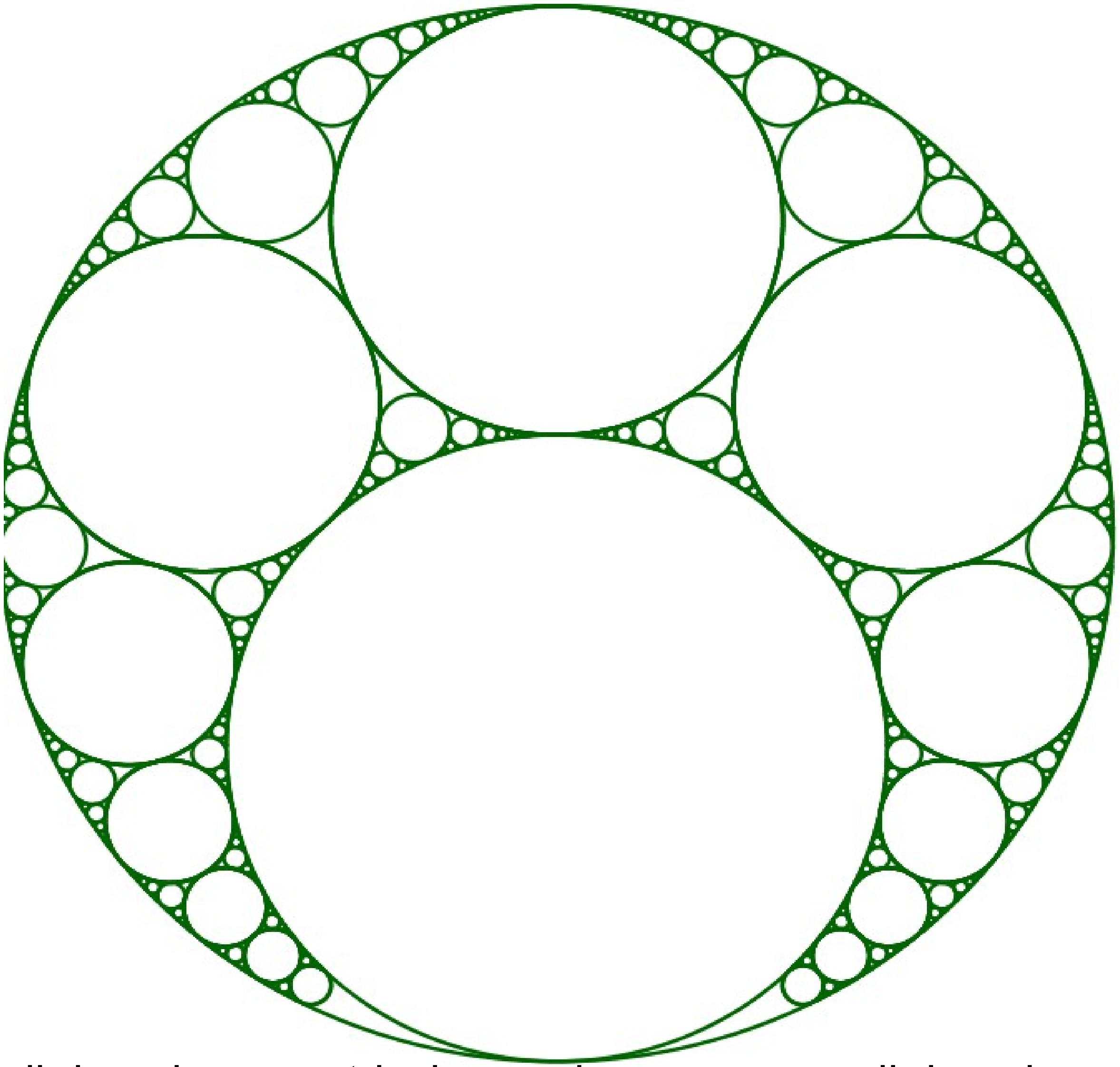
Possiamo allora applicare questo risultato per costruire un insieme di cerchi consecutivi, tangenti a coppie e tangenti alla retta

I Ford circle
la geometria e le frazioni di Farey



Una volta individuato il modulo iniziale, cioè l'insieme dei cerchi tangenti tra 0 e 1 possiamo ripetere il procedimento tra 1 e 2 o semplicemente traslare il modulo stesso. Una simmetria rispetto all'asse della striscia permetterà di ottenere la sequenza dei cerchi tangenti alla retta che chiude in alto la striscia.

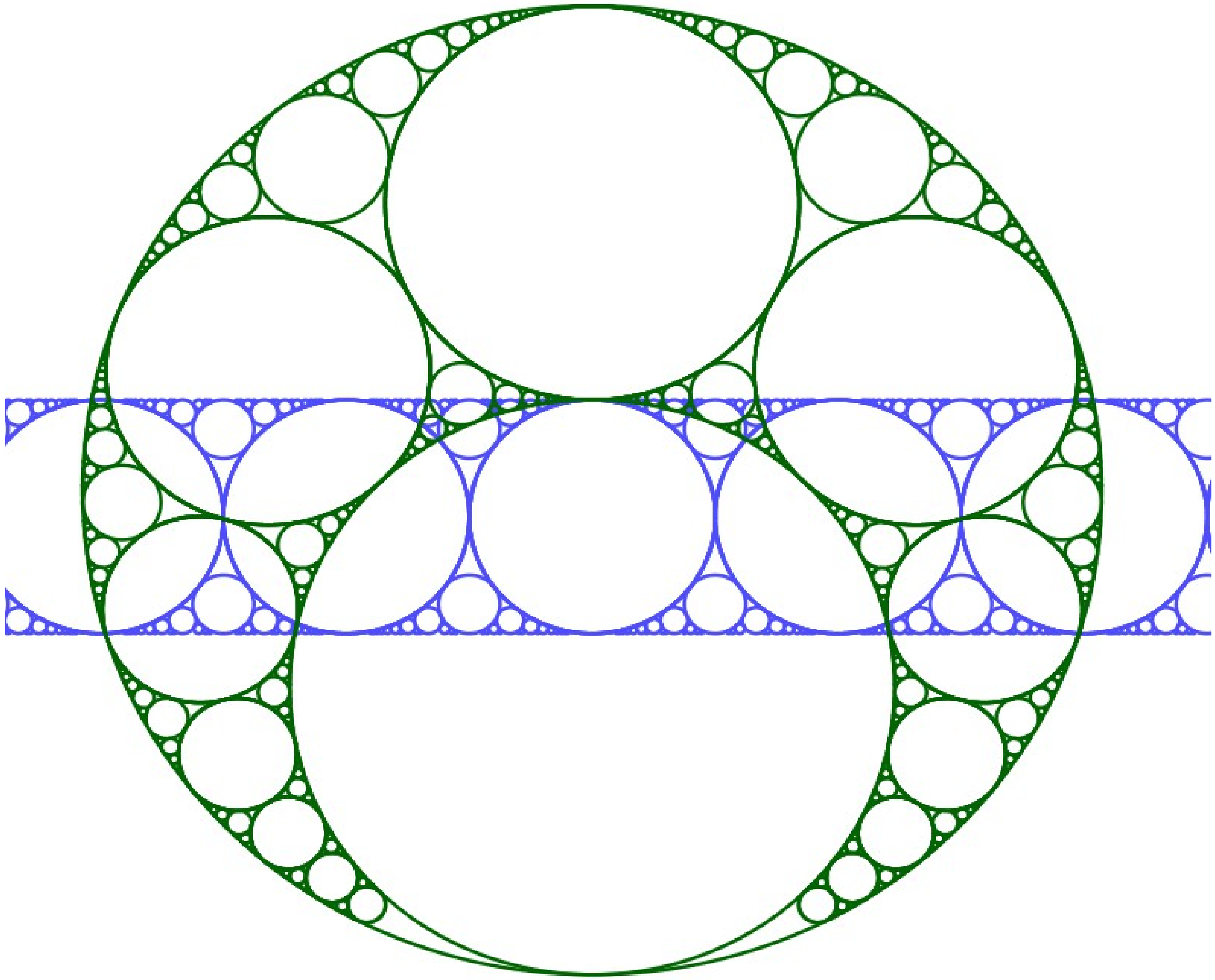
I Ford circle
la geometria e le frazioni di Farey



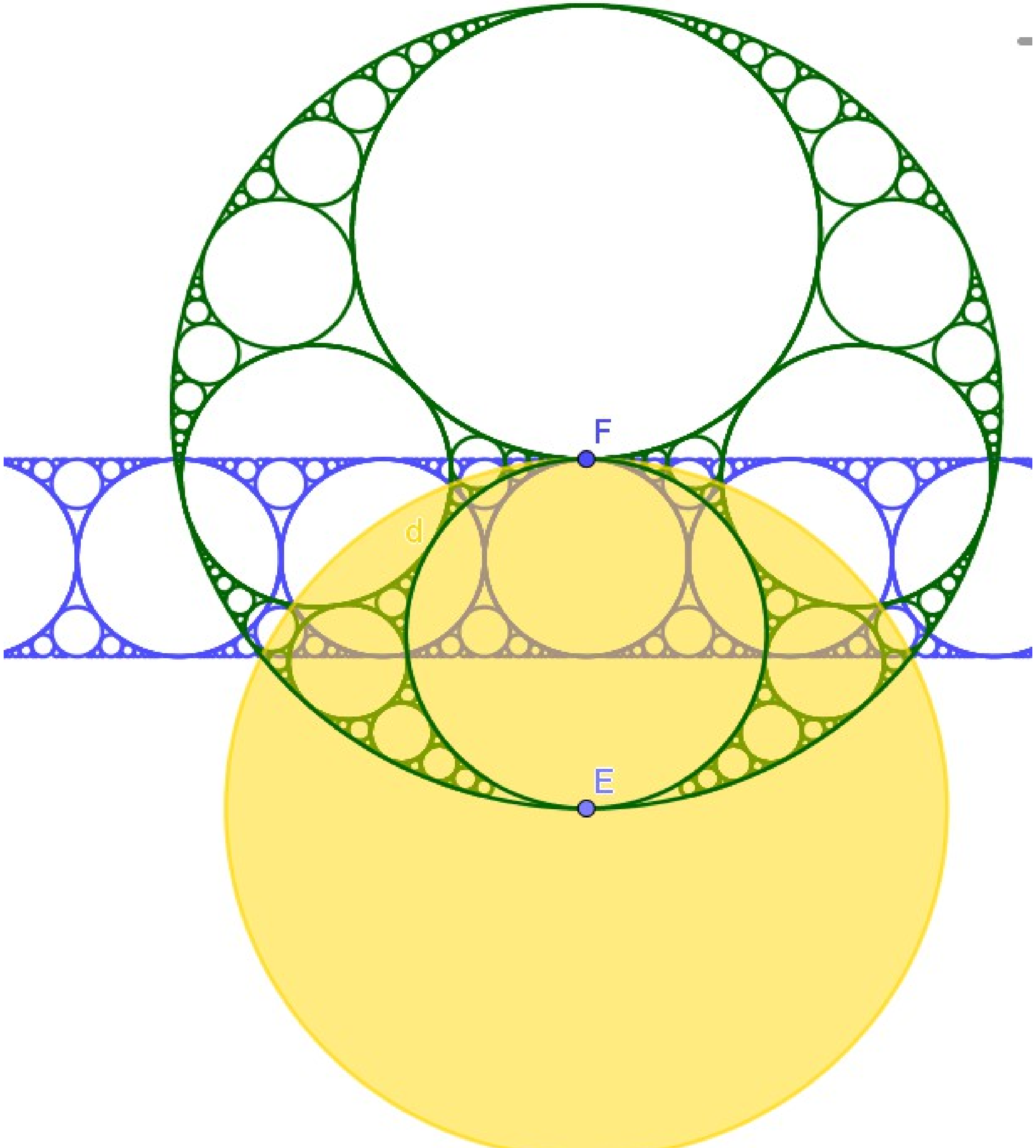
Invece di riempire una striscia possiamo pensare di riempire un cerchio con cerchi a lui tangenti

I Ford circle
e le frazioni di Farey

La nuova figura ha una corrispondenza con la striscia se la immaginiamo come la trasformata della striscia mediante una inversione circolare.



I Ford circle
le frazioni di Farey



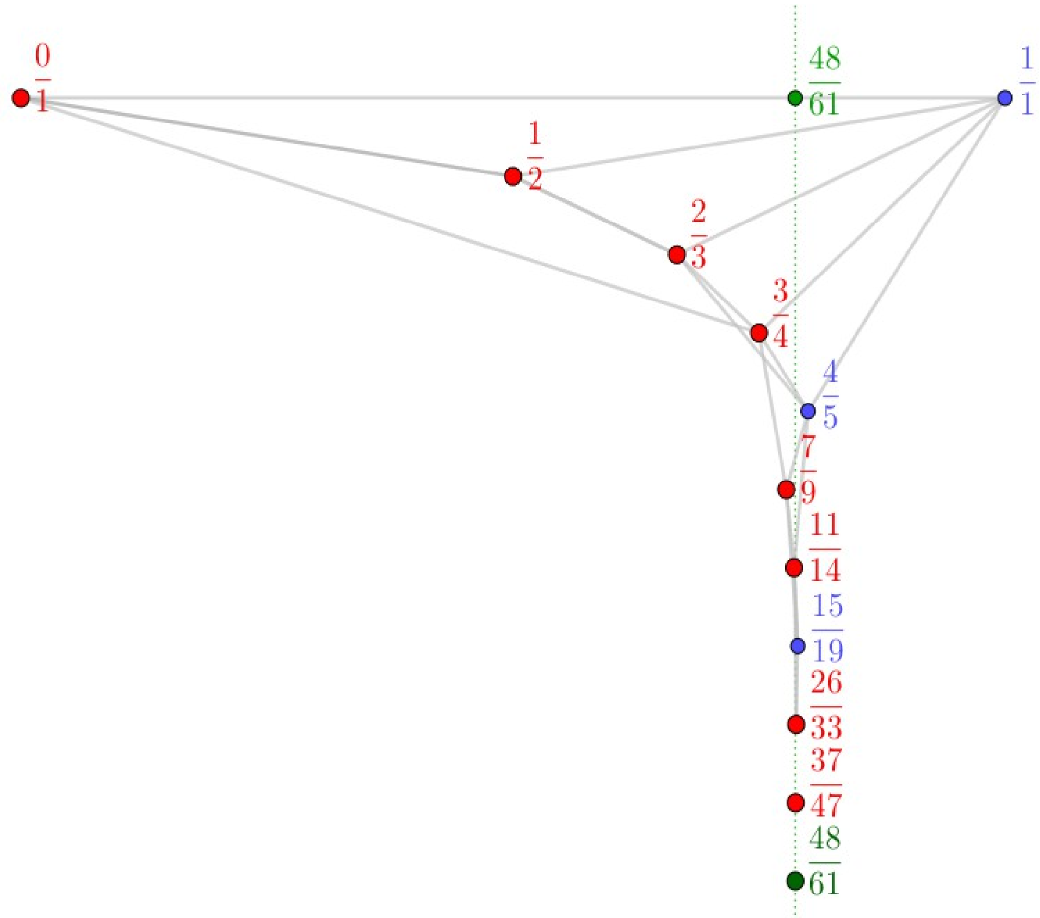
Una volta definito il cerchio inversore (in giallo in figura) è possibile trasformare ogni punto P del piano in un punto P' tale che

$$OP \cdot OP' = k$$

gioco dei ford circles

Numeri

i medianti per approssimare 48/61



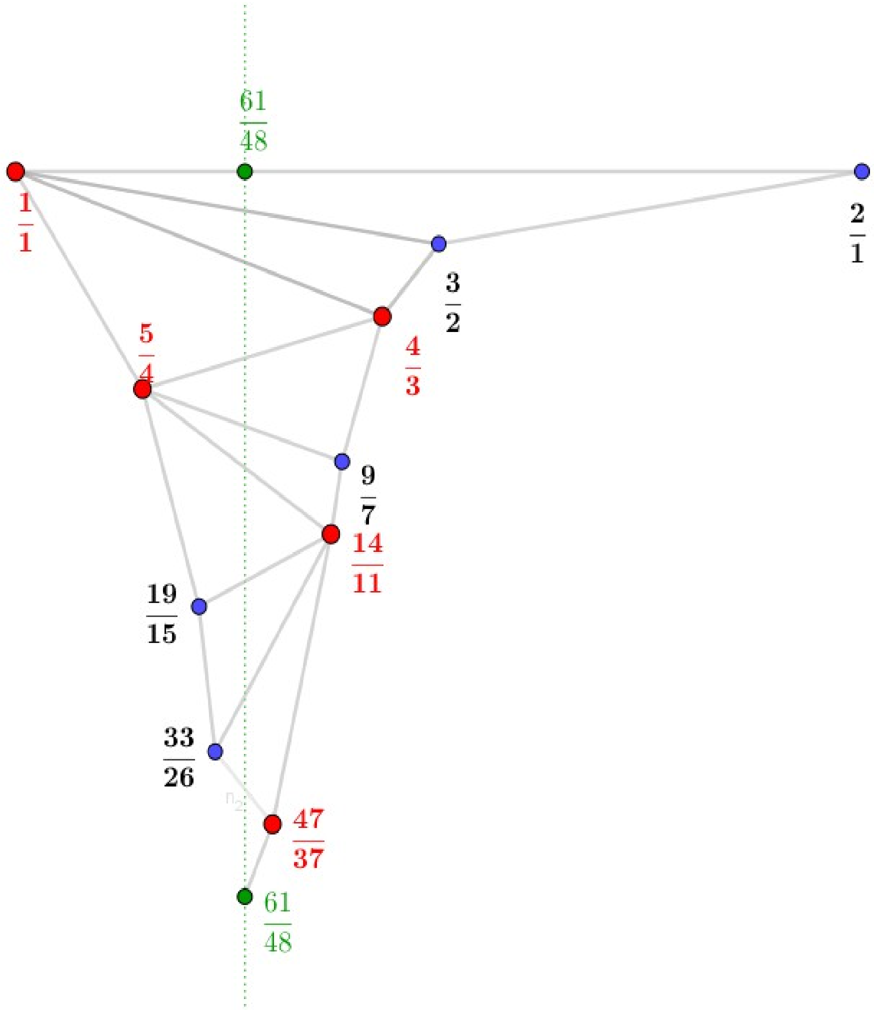
$$m\left(\frac{p}{q},\frac{r}{s}\right)=\frac{p+r}{q+s}$$

$$61\,x-48\,y=1$$

I numeri in rosso approssimano per difetto, quelli in blu per eccesso

Numeri

i medianti per approssimare 61/48



$$61\,x - 48\,y = 1$$

I numeri in rosso sono i convergenti della frazione continua

Numeri
medianti e frazioni continue

$$61\,x-48\,y=1$$

Medianti [partendo da 1 e 2]	Convergenti	Quozienti parziali
	1	$a_0=1$
3/2		
4/3	4/3	$a_1=3$
5/4	5/4	$a_2=1$
9/7		
14/11	14/11	$a_3=2$
19/15		
33/26		
47/37		
61/48	61/48	$a_2=4$

Numeri
i convergenti

Per comprendere il ruolo dei convergenti nell'approssimazione di 61/48
Partiamo dalla divisione di 61 per 48

$$61=\left[\frac{61}{48}\right]*48+resto$$

$$\left[\frac{61}{48}\right]=1=a_0 \rightarrow quoziente$$

$$resto=61\cdot a_0-48=13$$

Pertanto la frazione 61/48 diventa:

$$\frac{61}{48}=a_0+\frac{13}{48}=a_0+\frac{1}{\frac{48}{13}}$$

Numeri
i convergenti

Analogamente:

$$48 = \left[\frac{48}{13}\right] * 48 + resto$$

$$\left[\frac{48}{13}\right] = 3 = a_1 \rightarrow quoziente$$

$$resto = 48 - 13 \cdot a_1 = 9$$

$$\frac{48}{13} = a_1 + \frac{9}{13} = a_1 + \frac{1}{\frac{13}{9}}$$

Numeri
i convergenti

Analogamente:

$$48 = \left[\frac{48}{13}\right] * 48 + resto$$

$$\left[\frac{48}{13}\right] = 3 = a_1 \rightarrow quoziente$$

$$resto = 48 - 13 \cdot a_1 = 9$$

$$\frac{48}{13} = a_1 + \frac{9}{13} = a_1 + \cfrac{1}{\cfrac{13}{9}}$$

$$\frac{61}{48} = a_0 + \frac{13}{48} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\cfrac{13}{9}}}$$

Numeri
i convergenti

$$13 = \left[\frac{13}{9}\right] * 9 + resto$$

$$\left[\frac{13}{9}\right] = 1 = a_2 \rightarrow quoziente$$

$$13 \cdot a_2 - 9 = 4 \rightarrow resto$$

$$\frac{13}{9} = a_2 + \frac{4}{9} = a_2 + \frac{1}{\frac{9}{4}}$$

Numeri
i convergenti

$$13 = \left[\frac{13}{9}\right] * 9 + resto$$

$$\left[\frac{13}{9}\right] = 1 = a_2 \rightarrow quoziente$$

$$13 \cdot a_2 - 9 = 4 \rightarrow resto$$

$$\frac{13}{9} = a_2 + \frac{4}{9} = a_2 + \frac{1}{\frac{9}{4}}$$

$$\frac{61}{48} = a_0 + \frac{13}{48} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\frac{9}{4}}}}$$

Numeri
i convergenti

$$9=\left[\frac{9}{4}\right]*4+resto$$

$$\left[\frac{9}{4}\right]=2=a_3 \rightarrow quoziente$$

$$9-a_3\cdot 4=1 \rightarrow resto$$

$$\frac{9}{4}=a_3+\frac{1}{4}$$

$$\frac{61}{48}=a_0+\frac{13}{48}=a_0+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\cfrac{1}{4}}}}$$

Numeri
frazioni continue

$$\frac{61}{48} = 1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{4}}}}$$

$$\frac{61}{48} = [a_{0,} a_{1,} a_{2,} a_{3,} a_4]$$

$$\frac{61}{48} = [1; 3, 1, 2, 4]$$

Numeri
convergenti dei numeri razionali

61/48					
dividendo	divisore	quozienti	resto		convergenti
		Parte intera			
61	48	1	13		1
48	13	3	9		4/ 3
13	9	1	4		5/ 4
9	4	2	1		14/11
4	1	4	0		61/48

8/3					
dividendo	divisore	quozienti	resto		convergenti
		Parte intera			
8	3	2	2		2
3	2	1	1		3/ 1
2	1	2	0		8/ 3

Numeri
Convergenti di radice di due

Anche per i numeri irrazionali possiamo pensare di estrarre la parte intera

$$\sqrt{2} = [\sqrt{2}] + \frac{1}{\alpha_1} = 1 + \frac{1}{\alpha_1}$$

Numeri
Convergenti di radice di due

$$\sqrt{2} = [\sqrt{2}] + \frac{1}{\alpha_1} = 1 + \frac{1}{\alpha_1}$$

La stessa relazione risolta rispetto ad α_1
permette di ricavare il valore del denominatore α_1

$$\alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{2} - 1} = \sqrt{2} + 1$$

Numeri

Convergenti di radice di due

$$\sqrt{2}=[\sqrt{2}]+\frac{1}{\alpha_1}=1+\frac{1}{\alpha_1}$$

$$\alpha_1=\frac{1}{\sqrt{2}-1}=\sqrt{2}+1$$

Il procedimento può essere ripetuto

$$\alpha_1=[\alpha_1]+\frac{1}{\alpha_2}=2+\frac{1}{\alpha_2}$$

$$\alpha_2=\frac{1}{\alpha_1-2}=\sqrt{2}+1=\alpha_1$$

Numeri
Convergenti di radice di due

$$\sqrt{2}=[\sqrt{2}]+\frac{1}{\alpha_1}=1+\frac{1}{\alpha_1}$$

$$\downarrow$$

$$\alpha_1=\frac{1}{\sqrt{2}-1}=\sqrt{2}+1$$

$$\downarrow$$

Il procedimento può essere ripetuto

$$\alpha_1=[\alpha_1]+\frac{1}{\alpha_2}=2+\frac{1}{\alpha_2}$$

$$\downarrow$$

$$\alpha_2=\frac{1}{\alpha_1-2}=\sqrt{2}+1=\alpha_1$$

Anche il secondo denominatore è quindi formato dalla stessa parte intera e dallo stesso completamento irrazionale

Numeri
frazioni continue per i numeri irrazionali

Possiamo pertanto immaginare la seguente sequenza

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{\alpha_1} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\alpha_1}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \alpha_1}}$$

Sequenza che non ha fine.

Infine ricordiamo che i numeri 1 e 2 che compaiono nello sviluppo
non sono altro che i quozienti delle divisioni intere che sono state eseguite
(cioè le parti intere)

Numeri
frazioni continue per i numeri irrazionali

Lo sviluppo in frazione continua del numero “ radice di due” è

$$\sqrt{2}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2....}}}}$$

con una scrittura più compatta:

$$\sqrt{2}=[a_{0,}\overline{a_1}]$$

$$\sqrt{2}=[1,\overline{2}]$$

Numeri
frazioni continue per i numeri irrazionali

Ogni volta che si interrompe lo sviluppo si ottiene un numero razionale che approssima il numero irrazionale

$$\sqrt{2} = 1$$

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{\frac{5}{2}} = 1 + \frac{2}{5} = \frac{7}{5}$$

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}} = 1 + \frac{12}{7} = \frac{17}{12}$$

Numeri

frazioni continue per i numeri irrazionali

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\cfrac{\frac{1}{2}}{2 + \cfrac{1}{2}}}} = \frac{41}{29}$$

Ottenendo così la successione dei convergenti....

Si possono fare numerose osservazioni sulla natura dei numeratori e denominatori di questa successione

Numeri

frazioni continue per i numeri irrazionali

$$\sqrt{2} \rightarrow 1 \rightarrow \frac{3}{2} \rightarrow \frac{7}{5} \rightarrow \frac{17}{12} \rightarrow \frac{41}{29} \rightarrow C_n = \frac{Den_{n-1}}{Num_{n-1} + Den_{n-1}}$$

Possiamo impostare la nostra ricerca di approssimanti utilizzando un foglio excel come mostrato qui di seguito, mettendo in luce l'espansione decimale del numero razionale trovato

Numeri

Convergenti di $\sqrt{2}$

8/3						
dividendo	divisore	quozienti	resto		convergenti	
		Parte intera				
8	3	2	2		2	
3	2	1	1		3/ 1	
2	1	2	0		8/ 3	
Sqrt(2)						
dividendo	divisore	quozienti	resto		convergenti	
		Parte intera				
		1			1	1,0000
		2			3/ 2	1,5000
		2			7/ 5	1,4000
		2			17/12	1,4167
		2			41/29	1,4138
		2			99/70	1,4143
		2			140/99	1,4142

Numeri
frazioni continue per i numeri irrazionali

$$\sqrt{2} \rightarrow 1 \rightarrow \frac{3}{2} \rightarrow \frac{7}{5} \rightarrow \frac{17}{12} \rightarrow \frac{41}{29}$$

Oppure possiamo metter in evidenza l'alternanza tra valori maggiori o minori del numero cercato sia graficamente, interpretando i convergenti come pendenze di rette, o numericamente calcolandone i loro quadrati e confrontandoli con 2.

Numeri
frazioni continue per i numeri irrazionali

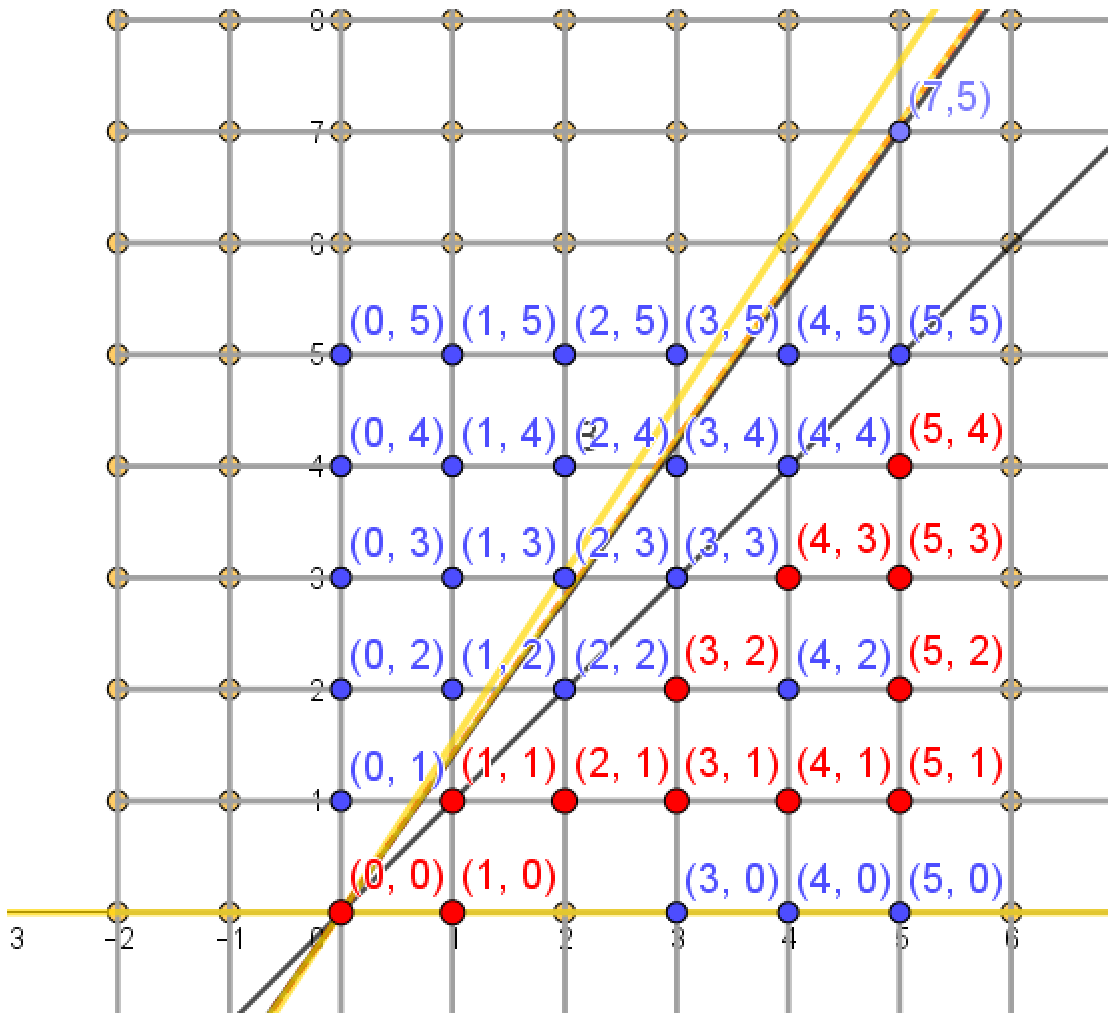
$$\sqrt{2} \rightarrow 1 \rightarrow \frac{3}{2} \rightarrow \frac{7}{5} \rightarrow \frac{17}{12} \rightarrow \frac{41}{29}$$

Sqrt(2)							
dividendo	divisore	quozienti	resto		convergenti	quadrati dei convergenti	
		Parte intera					
		1			1	1/ 1	1,000000
		2			3/ 2	9/ 4	2,250000
		2			7/ 5	49/ 25	1,960000
		2			17/ 12	289/ 144	2,006944
		2			41/ 29	19988109/10000000	1,998811
		2			99/ 70	20002041/10000000	2,000204
		2			239/169	399993/ 200000	1,999965

Numeri

frazioni continue per i numeri irrazionali

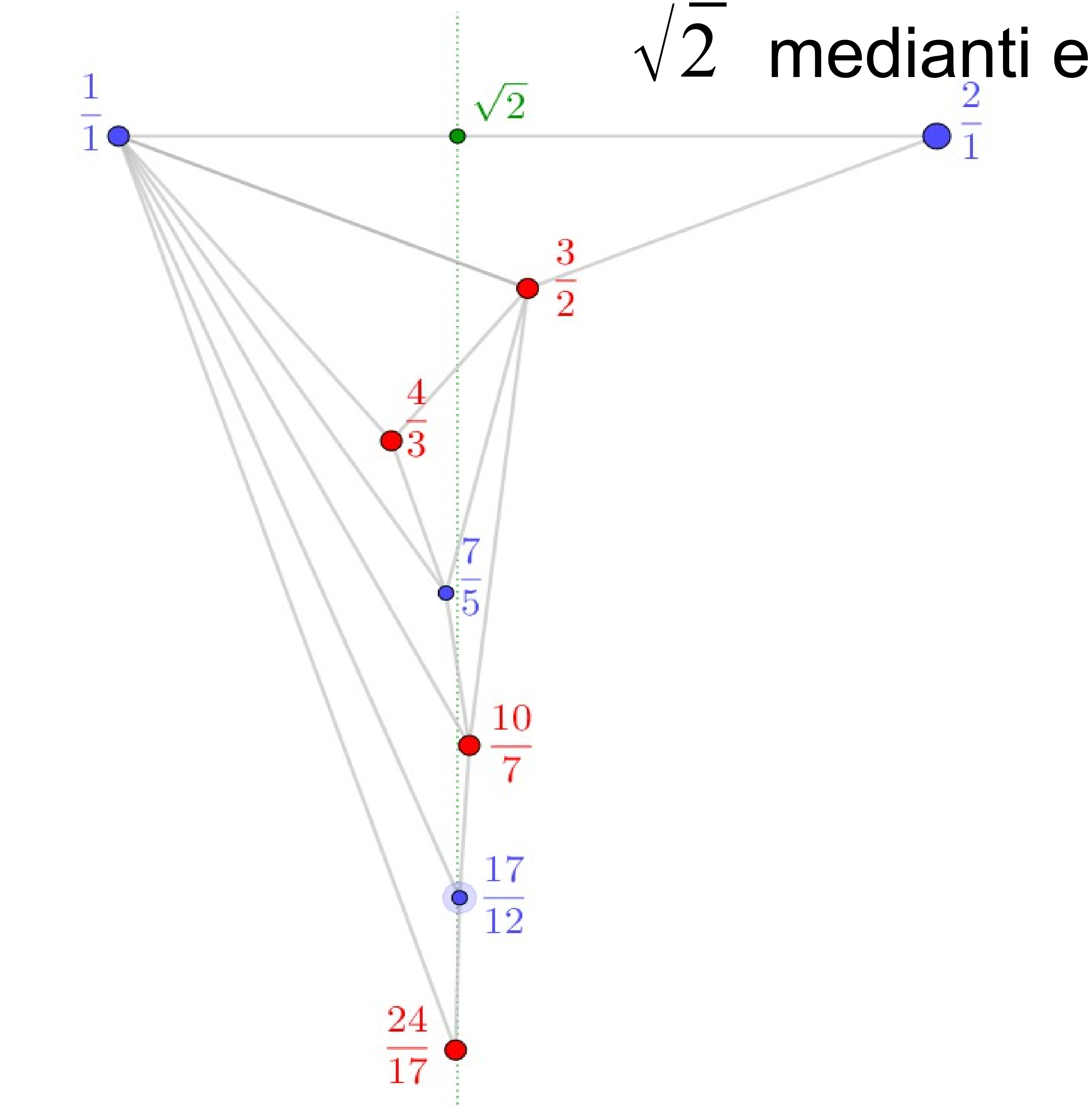
$$\sqrt{2} \to 1 \to \frac{3}{2} \to \frac{7}{5} \to \frac{17}{12} \to \frac{41}{29}$$



In figura le rette disegnate con linea continua hanno pendenza uguale ai razionali convergenti mentre la retta tratteggiata ha coefficiente angolare uguale a $\sqrt{2}$

Numeri

$\sqrt{2}$ medianti e convergenti



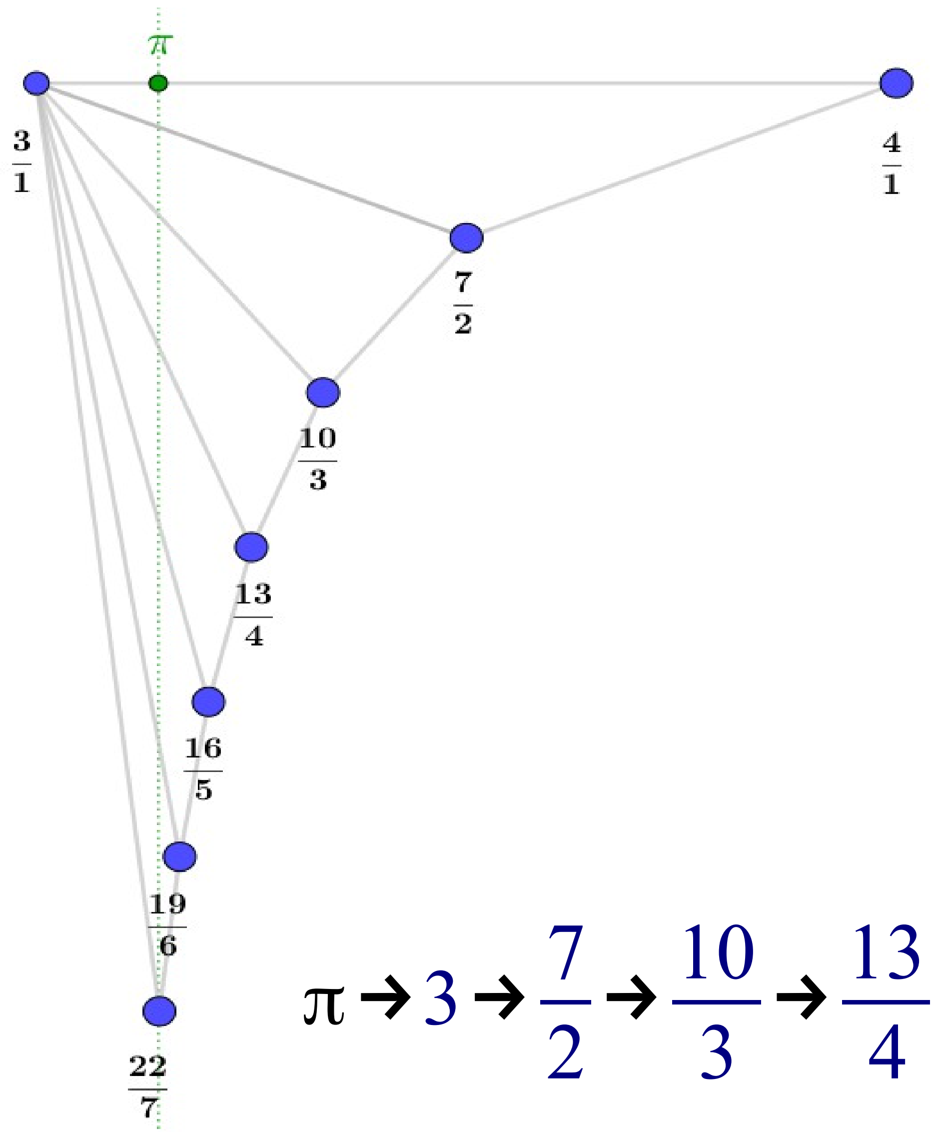
Numeri
medianti e convergenti

$$\sqrt{2}$$

Medianti [partendo da 1 e 2]	Convergenti	Quozienti parziali
	1	$a_0=1$
3/2	3/2	$a_1=2$
4/3		
7/5	7/5	$a_2=2$
10/7		
17/12	17/12	$a_3=2$
24/17		
41/29	41/29	$a_4=2$
58/41		
99/70	99/70	

Numeri

π con i medianti



$$\pi \rightarrow 3 \rightarrow \frac{7}{2} \rightarrow \frac{10}{3} \rightarrow \frac{13}{4} \rightarrow \frac{16}{5} \rightarrow \frac{19}{6} \rightarrow \frac{22}{7}$$

Numeri

π con i convergenti

π	3,14159265						
		quozienti	resto		convergenti		
		Parte intera					
		3			3		3,0000000
		7			22/ 7		3,1428571
		15			333/106		3,1415094
		1			31415929/10000000		3,1415929
		292			31415927/10000000		3,1415927
		1			31415927/10000000		3,1415927
		1			31415927/10000000		3,1415927

$$\pi = [3\,; 7, 15, 1, 292, 1, 1, \ldots]$$

Numeri

π con i convergenti

π	3,14159265						
		quozienti	resto		convergenti		
		Parte intera					
		3			3		3,0000000
		7			22/ 7		3,1428571
		15			333/106		3,1415094
		1			31415929/10000000		3,1415929
		292			31415927/10000000		3,1415927
		1			31415927/10000000		3,1415927
		1			31415927/10000000		3,1415927

$$\pi \to 3 \to \frac{7}{2} \to \frac{10}{3} \to \frac{13}{4} \to \frac{16}{5} \to \frac{19}{6} \to \frac{22}{7}$$

$$\pi \to 3 \to \frac{22}{7} \to \frac{333}{106} \to \frac{31415929}{100000000} \to \ldots.$$

Numeri

π con i convergenti

$$\pi = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{292 + \cfrac{1}{1 + \ddots}}}}}$$

La successione dei convergenti $\pi \rightarrow 3 \rightarrow \frac{22}{7} \rightarrow \frac{333}{106} \rightarrow \frac{31415929}{100000000} \rightarrow ....$

La successione dei medianti $\pi \rightarrow 3 \rightarrow \frac{7}{2} \rightarrow \frac{10}{3} \rightarrow \frac{13}{4} \rightarrow \frac{16}{5} \rightarrow \frac{19}{6} \rightarrow \frac{22}{7}$

Numeri
frazioni continue di alcuni irrazionali quadratici

Nella tabella qui a fianco
sono indicate le frazioni continue per i primi radicali quadratici.

H. Davenport "*Higher Aritmethics, An Introduction to Number Theory*"
5th ed.
Cambridge University press,1982

N	Continued fraction for $\sqrt{N}$
2	1; 2
3	1; 1, 2
5	2; 4
6	2; 2, 4
7	2; 1, 1, 1, 4
8	2; 1, 4
10	3; 6
11	3; 3, 6
12	3; 2, 6
13	3; 1, 1, 1, 1, 6
14	3; 1, 2, 1, 6
15	3; 1, 6
17	4; 8
18	4; 4, 8