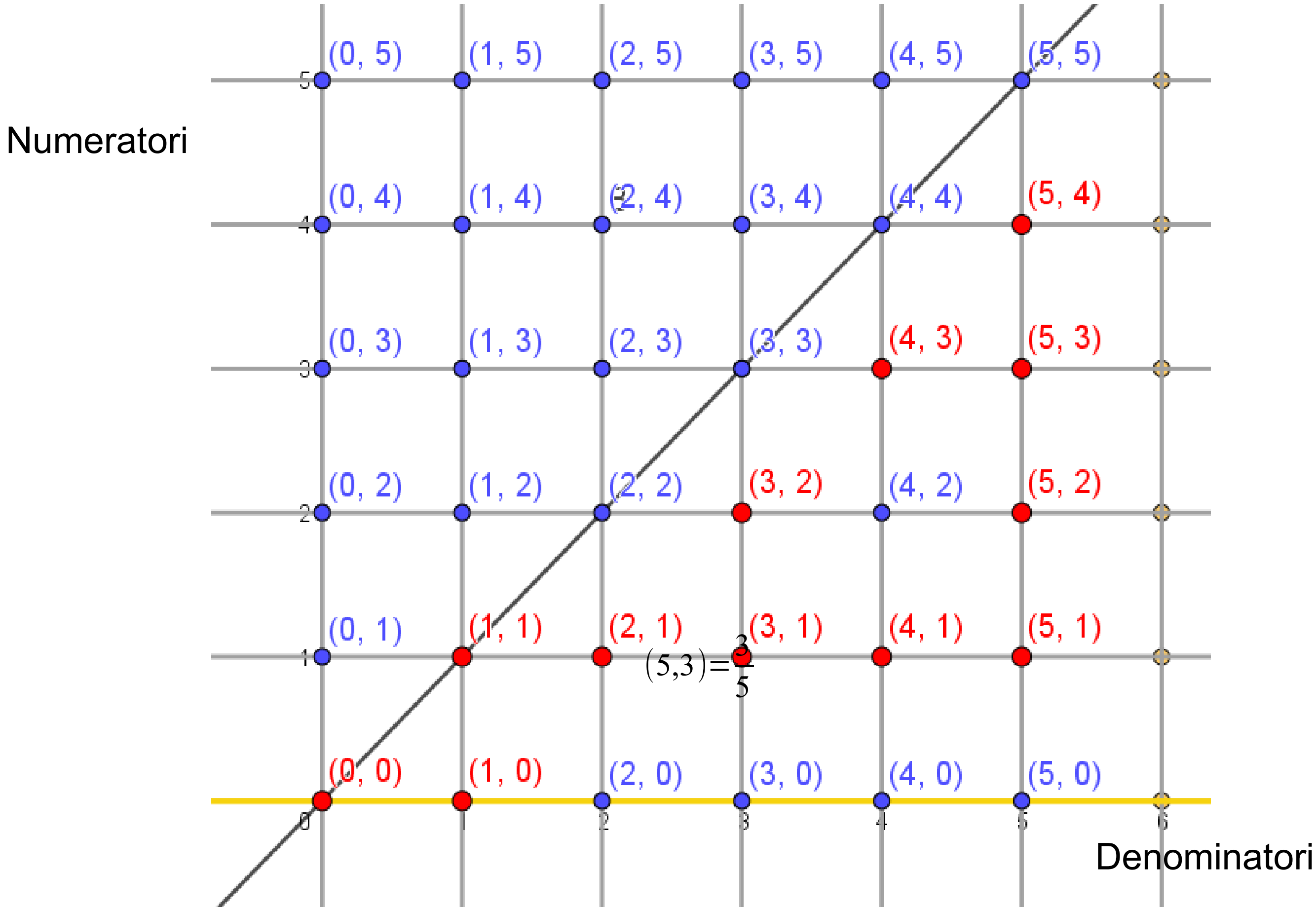
- Le frazioni di Farey e il teorema di Pick
- Area del parallelogramma
- Aree di poligoni con vertici sulla griglia
- Proprietà delle frazioni di Farey
- Risoluzione di problemi lineari

Progetto con la mente e con le mani
Accademia dei Lincei
Polo di Roma
3° incontro 12 dicembre 2018

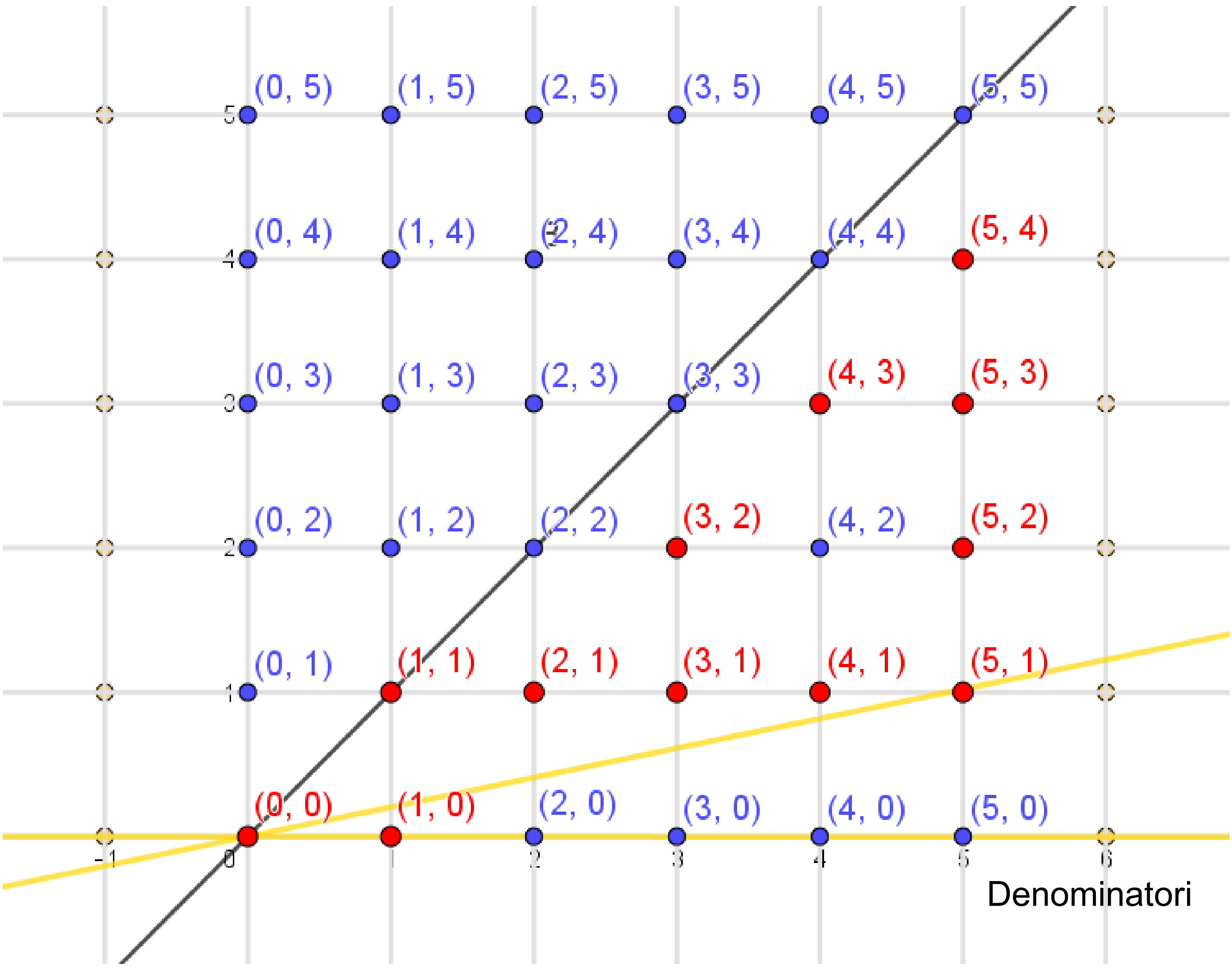
# Le frazioni di Farey




$$(5,3)=\frac{3}{5}$$

Reticolo raggio e frazioni

# Ordinamento delle frazioni di Farey

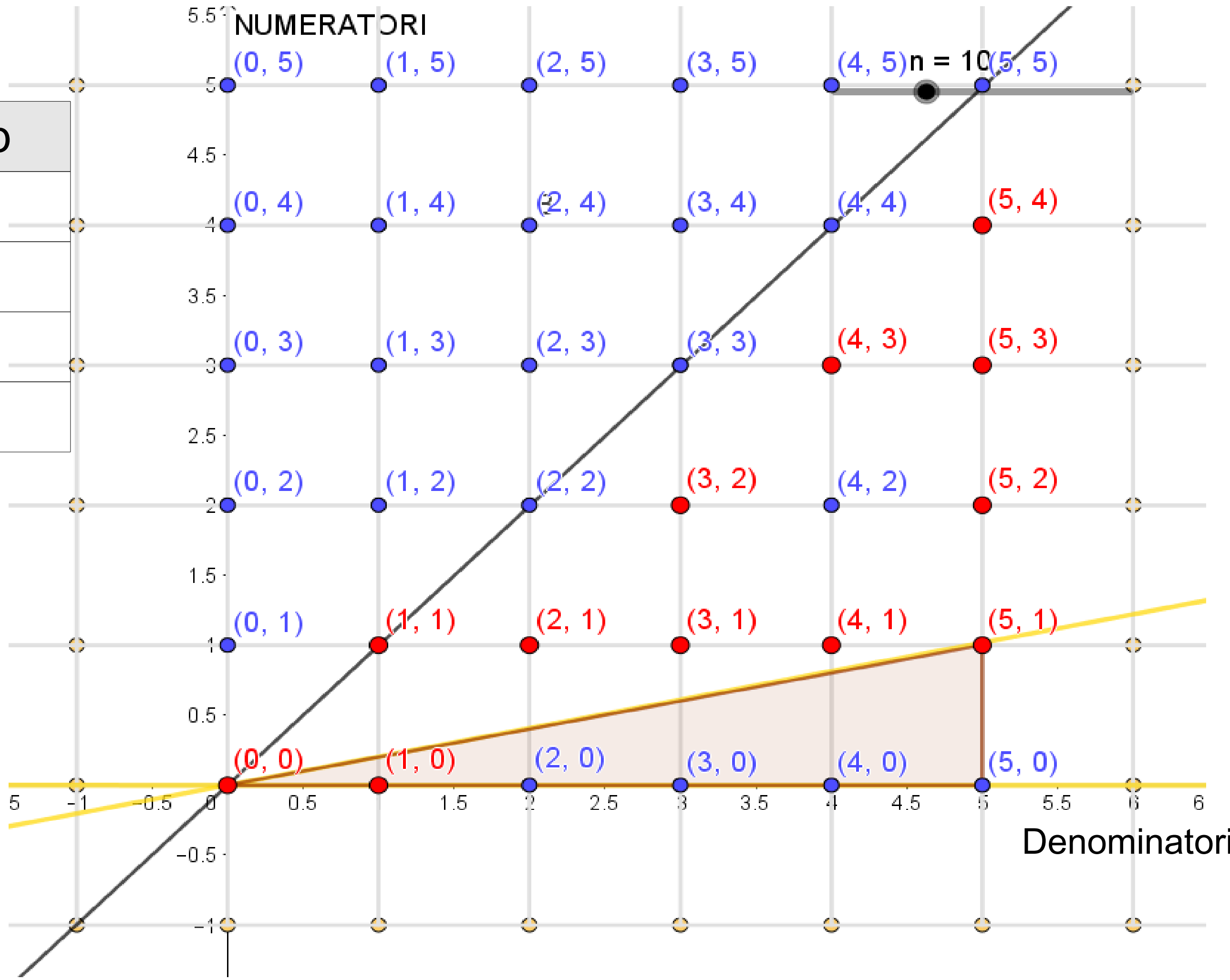



Reticolo raggio e frazioni

# Le frazioni di Farey e le aree

## qualche congettura

| A | i | p |
|---|---|---|
| 5/2 | 0 | 7 |
| | | |
| | | |
| | | |

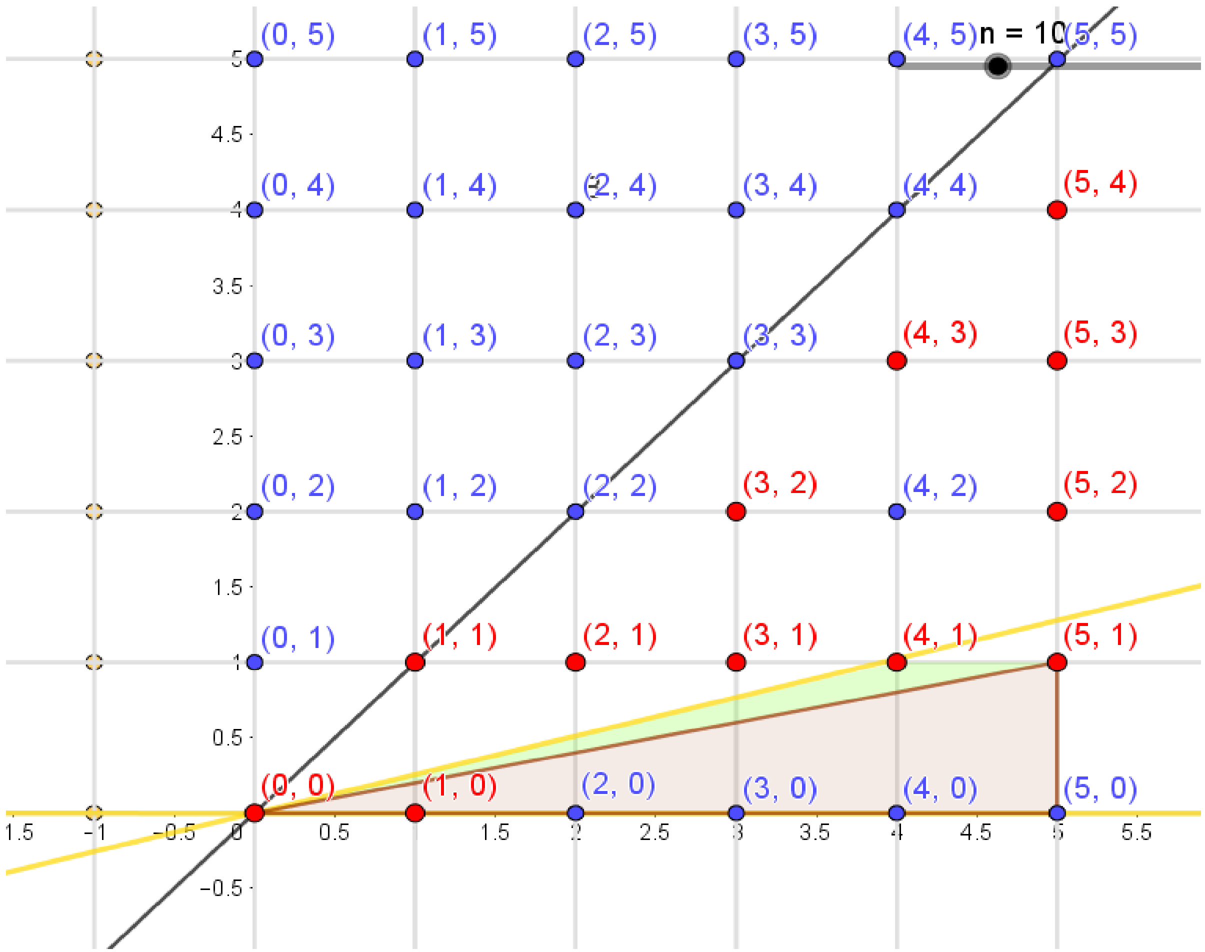



Reticolo raggio e frazioni

# Le frazioni di Farey e le aree

## qualche congettura

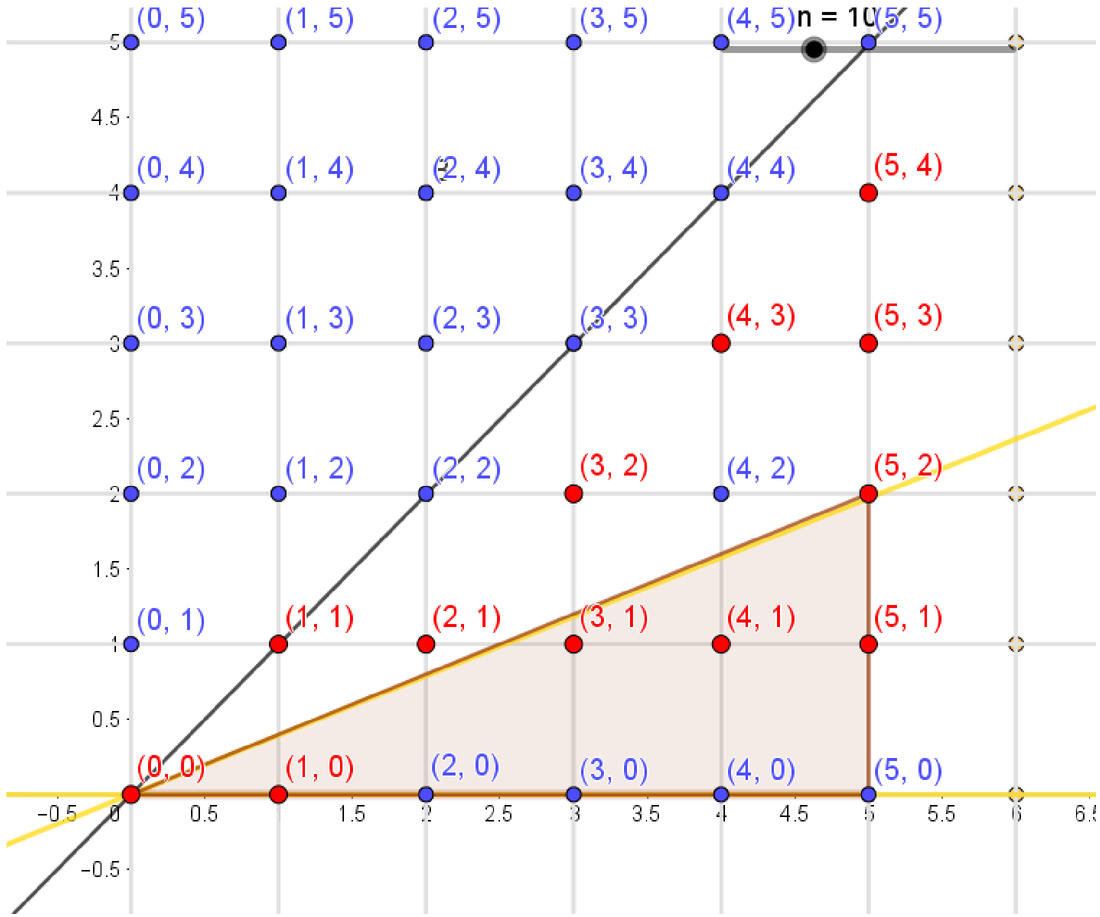
| A | i | p |
|---|---|---|
| 5/2 | 0 | 7 |
| 1/2 | 0 | 3 |
| 3 | 0 | 8 |
| | | |




Reticolo raggio e frazioni

# Le frazioni di Farey e le aree
## qualche congettura

| A | i | p |
|---|---|---|
| 5/2 | 0 | 7 |
| 1/2 | 0 | 3 |
| 3 | 0 | 8 |
| 5 | 2 | 8 |

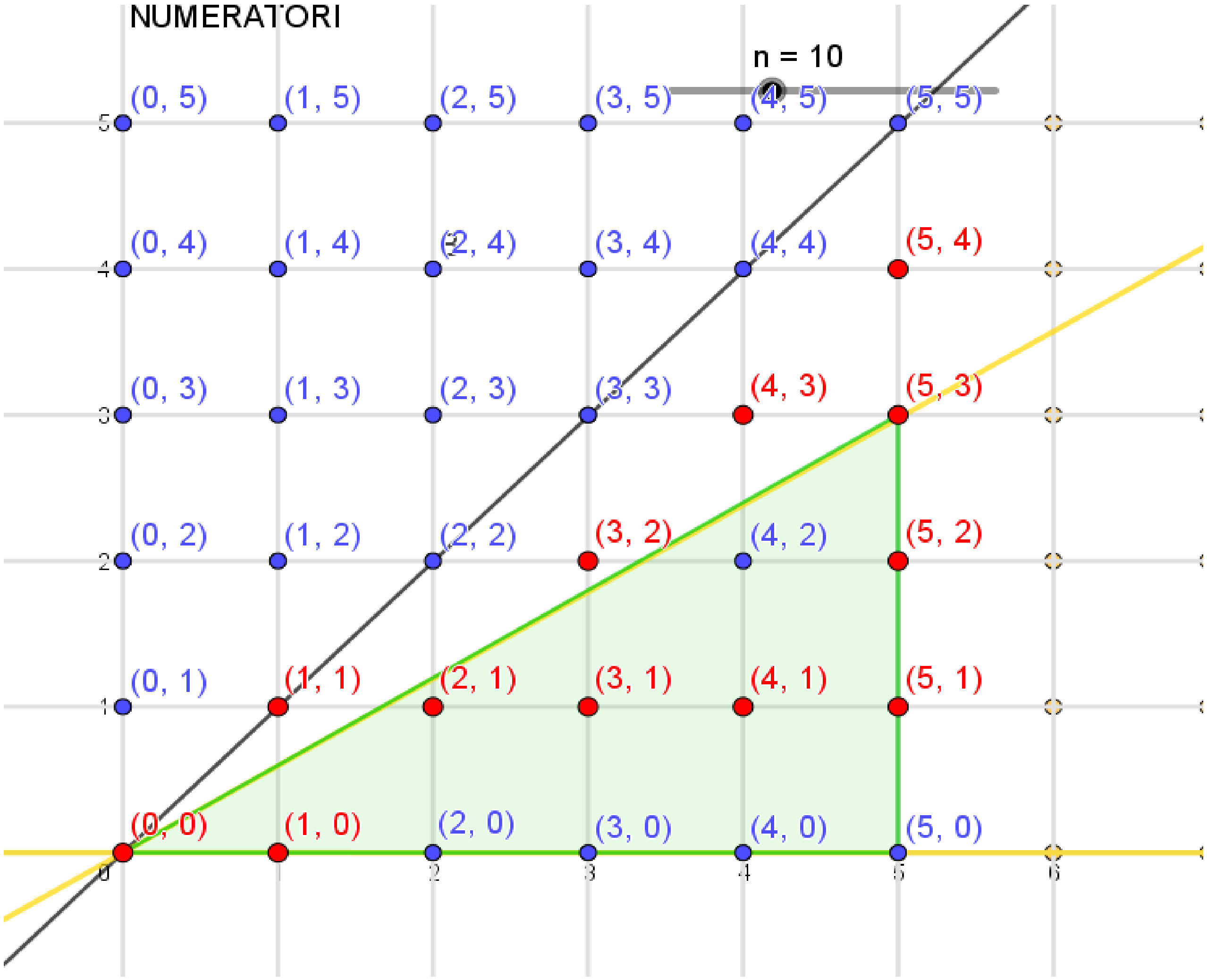



Reticolo raggio e frazioni

# Le frazioni di Farey e le aree

## qualche congettura

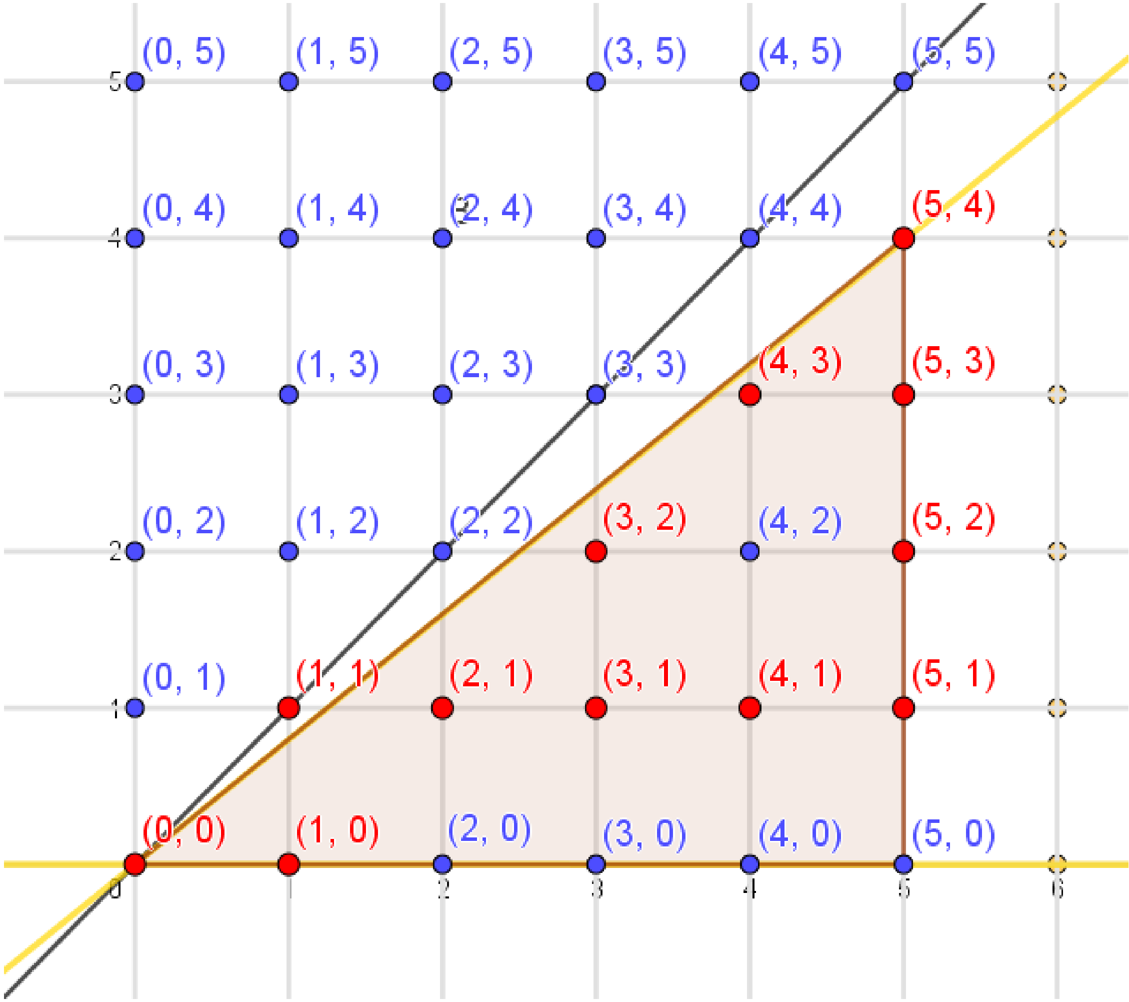
| A | i | p |
|---|---|---|
| 5/2 | 0 | 7 |
| 1/2 | 0 | 3 |
| 5 | 2 | 8 |
| 3 | 0 | 8 |
| 15/2 | 4 | 9 |



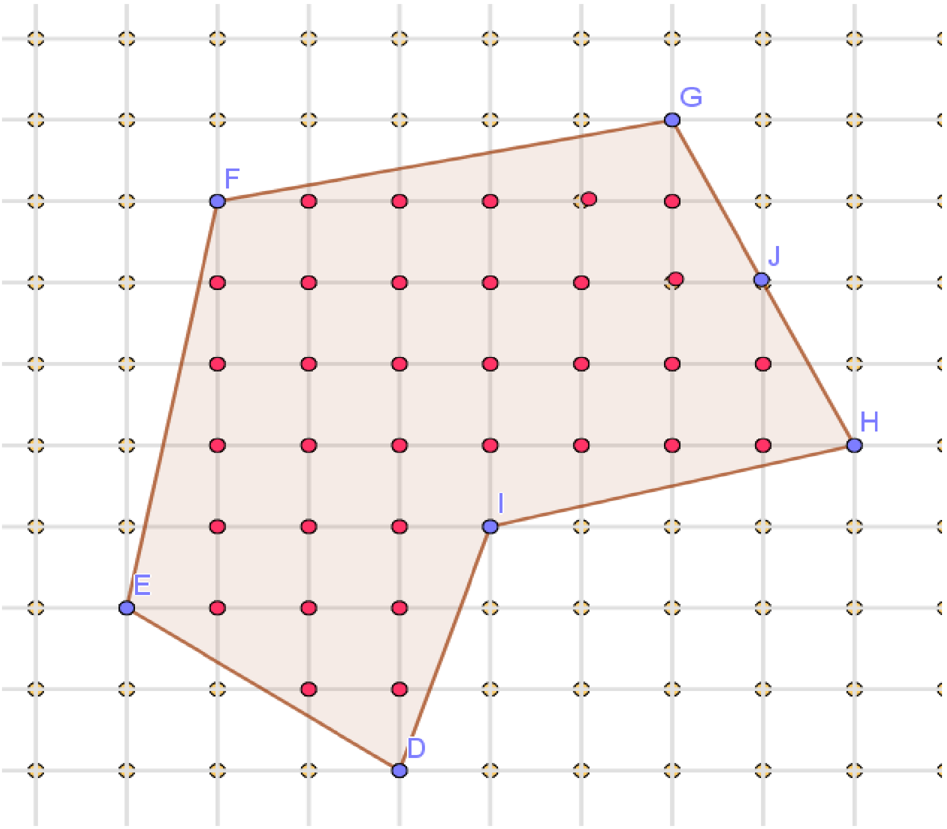
# Le frazioni di Farey e le aree

## qualche congettura

| A | i | p |
|---|---|---|
| 5/2 | 0 | 7 |
| 1/2 | 0 | 3 |
| 5 | 2 | 8 |
| 15/2 | 4 | 9 |
| 10 | 6 | 10 |



# Calcolo dell'area di un poligono semplice
## con i vertici sui punti di un reticolo

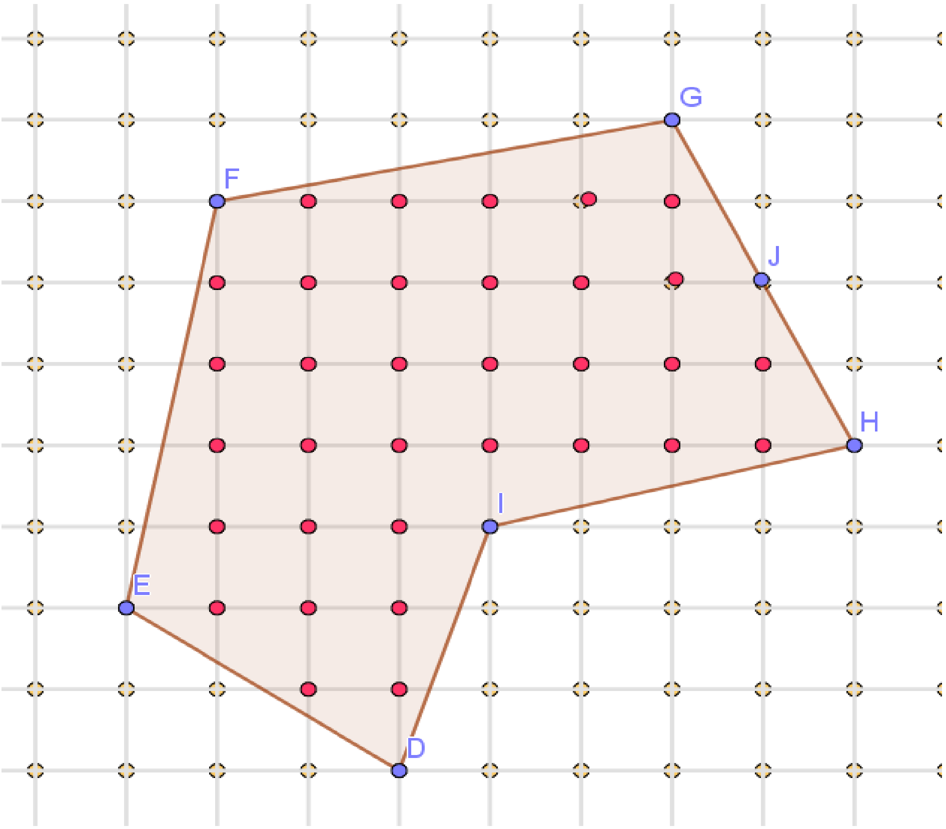



Una questione di puntini..... ovvero il Teorema di Pick

# Calcolo dell'area di un poligono semplice

## con i vertici sui punti di un reticolo

| A | i | p |
|---|---|---|
| 5/2 | 0 | 7 |
| 1/2 | 0 | 3 |
| 5 | 2 | 8 |
| 15/2 | 4 | 9 |
| 10 | 6 | 10 |
| **???** | **33** | **7** |




Il Teorema di Pick:

$$A(P) = i + \frac{p}{2} - 1$$

# Calcolo dell'area di un poligono semplice
## con i vertici sui punti di un reticolo

$$A(P)=i+\frac{p}{2}-1$$

Dimostrazione:

1) la formula di Pick è additiva
2) la formula di Pick vale per i triangoli

$\downarrow$

Dato che ogni poligono si può triangolarizzare la formula calcola l'area di qualsiasi poligono semplice.

# Calcolo dell'area di un poligono semplice
## con i vertici sui punti di un reticolo

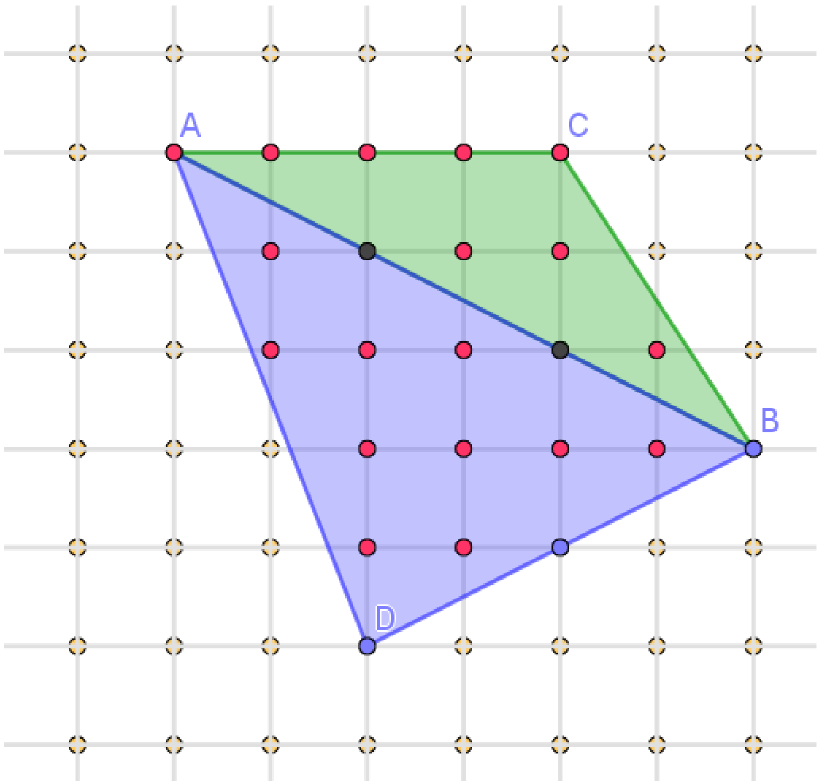
Dimostrazione:

$$A(P)=i+\frac{p}{2}-1$$

1) la formula di Pick è additiva

$$A(T_1)=i_1+\frac{p_1}{2}-1$$

$$A(T_2)=i_2+\frac{p_2}{2}-1$$




$c:$ Punti in comune sul bordo che scompare unendo i due triangoli

$$i_P=i_1+i_2+c-2$$

$$p_P=p_1+p_2-2c+2$$

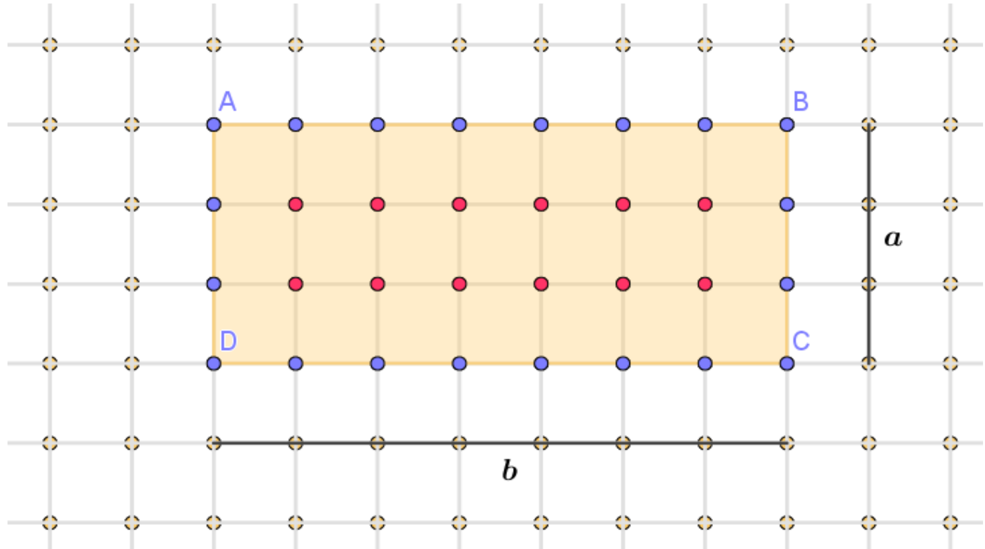
$$A(P)=i_p+\frac{p_P}{2}-1=(i_1+i_2+c-2)+\frac{p_1+p_2-2c+2}{2}-1=[i_1+\frac{p_1}{2}-1]+[i_2+\frac{p_2}{2}-1]=A(T_2)+A(T_1)$$

# Calcolo dell'area di un poligono semplice
## con i vertici sui punti di un reticolo

Dimostrazione:

$$A(P) = i + \frac{p}{2} - 1$$

2a) la formula di Pick vale per i rettangoli




$$i = (a-1)(b-1)$$

$$p = 2(a+1) + 2(b-1)$$

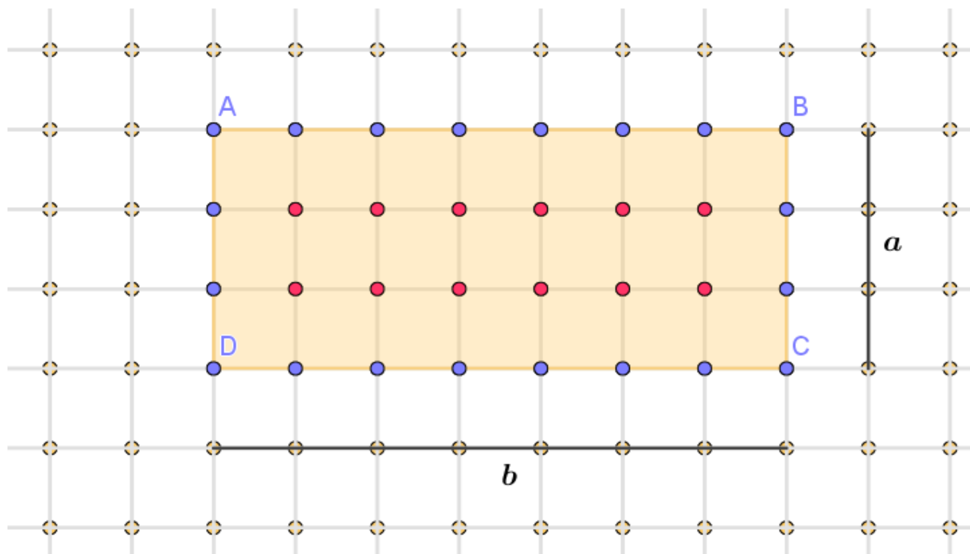
$$\longrightarrow \quad A = a\,b$$

# Calcolo dell'area di un poligono semplice
## con i vertici sui punti di un reticolo

Dimostrazione:

$$A(P) = i + \frac{p}{2} - 1$$

2a) la formula di Pick vale per i rettangoli




$$i = (a-1)(b-1) = ab - a - b + 1$$

$$p = 2(a+1) + 2(b-1) = 2a + 2b$$

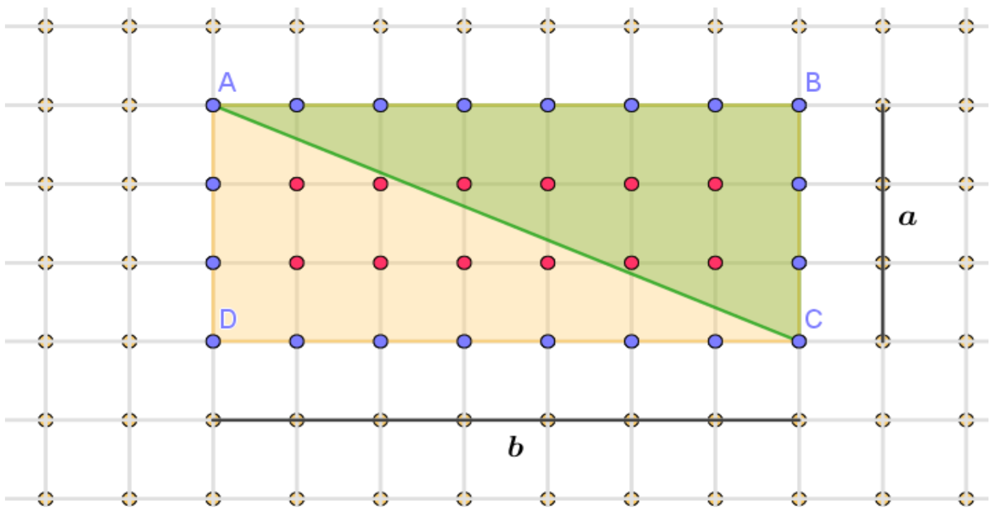
$$A(P) = (ab - a - b + 1) + \frac{2a+2b}{2} - 1 = ab$$

# Calcolo dell'area di un poligono semplice
## con i vertici sui punti di un reticolo

Dimostrazione:

$$A(P) = i + \frac{p}{2} - 1$$

2b) divido il rettangolo in due triangoli rettangoli.
CASO 1 sulla diagonale non ci sono punti del reticolo




$$i_T = i_R/2 = \frac{1}{2}(a-1)(b-1)$$
$$p_T = a + 1 + b$$

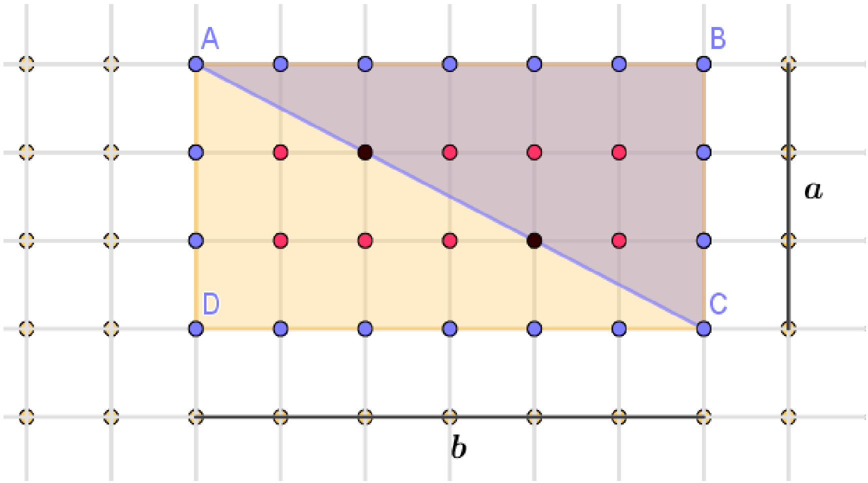
$$\longrightarrow \quad A = \frac{a\,b}{2}$$

# Calcolo dell'area di un poligono semplice
## con i vertici sui punti di un reticolo

Dimostrazione:

$$A(P) = i + \frac{p}{2} - 1$$

2b) divido il rettangolo in due triangoli rettangoli.
CASO 2 sulla diagonale ci sono punti del reticolo



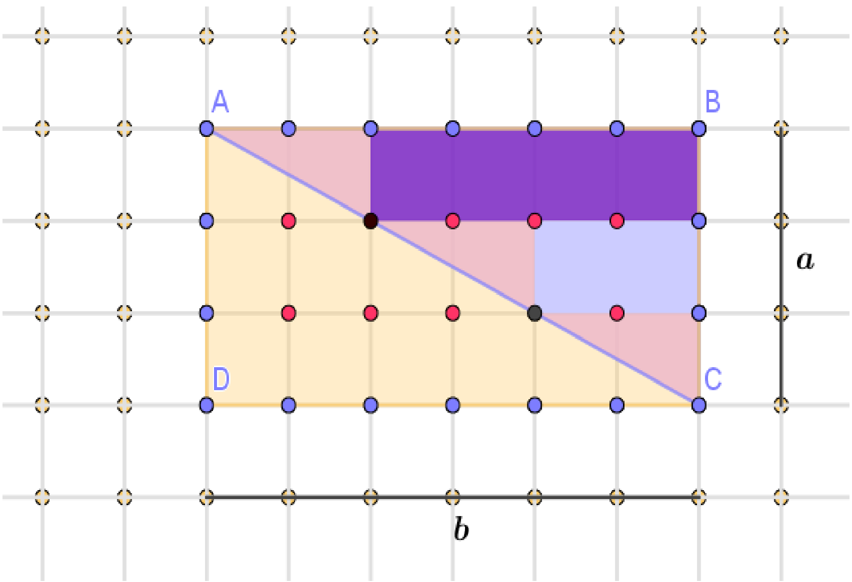

Ciò significa che posso decomporre il triangolo in triangoli rettangoli più piccoli che non hanno punti sulla loro ipotenusa e in rettangoli.
Abbiamo già osservato che la formula funziona per i triangoli rettangoli che non hanno punti del reticolo sull'ipotenusa, per i rettangoli e che è additiva.

# Calcolo dell'area di un poligono semplice
## con i vertici sui punti di un reticolo

Dimostrazione:

$$A(P) = i + \frac{p}{2} - 1$$

2b) divido il rettangolo in due triangoli rettangoli.
CASO 2 sulla diagonale ci sono punti del reticolo



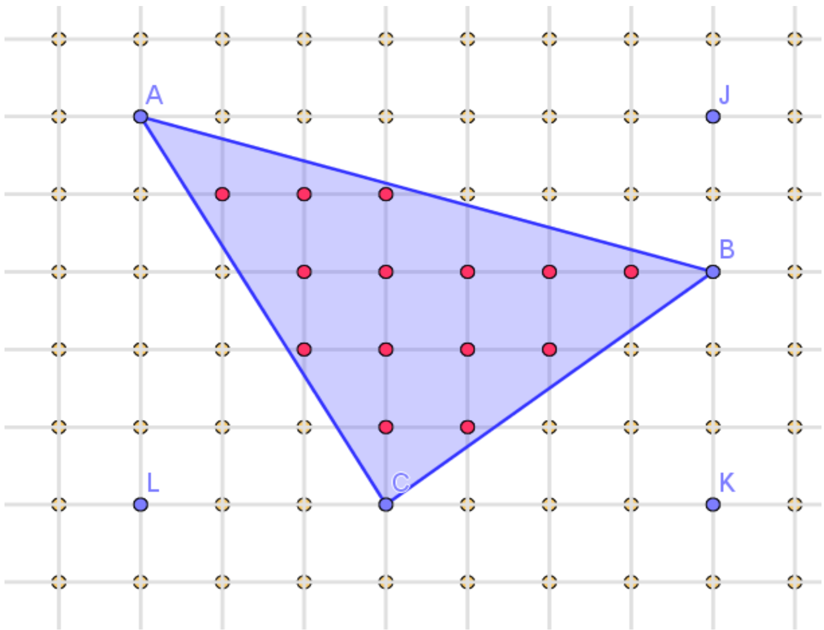

Ciò significa che posso decomporre il triangolo in
triangoli rettangoli più piccoli che non hanno punti sulla loro ipotenusa
e in rettangoli.
Abbiamo già osservato che la formula funziona per i triangoli rettangoli
che non hanno punti del reticolo sull'ipotenusa, per i rettangoli e che non è
additiva.

# Calcolo dell'area di un poligono semplice
## con i vertici sui punti di un reticolo

Dimostrazione:

$$A(P) = i + \frac{p}{2} - 1$$

2c) il triangolo di cui devo calcolare l'area non è rettangolo
Oppure non ha i cateti paralleli agli assi del reticolo.



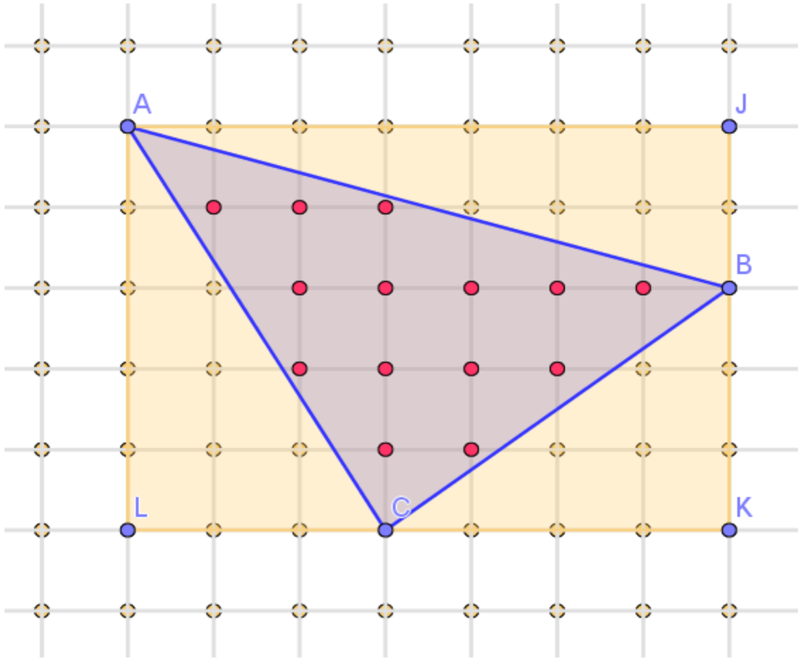

Anche in questo caso posso decomporre il triangolo in triangoli rettangoli e ritornare ai casi già analizzati.

# Calcolo dell'area di un poligono semplice
## con i vertici sui punti di un reticolo

Dimostrazione:

$$A(P) = i + \frac{p}{2} - 1$$

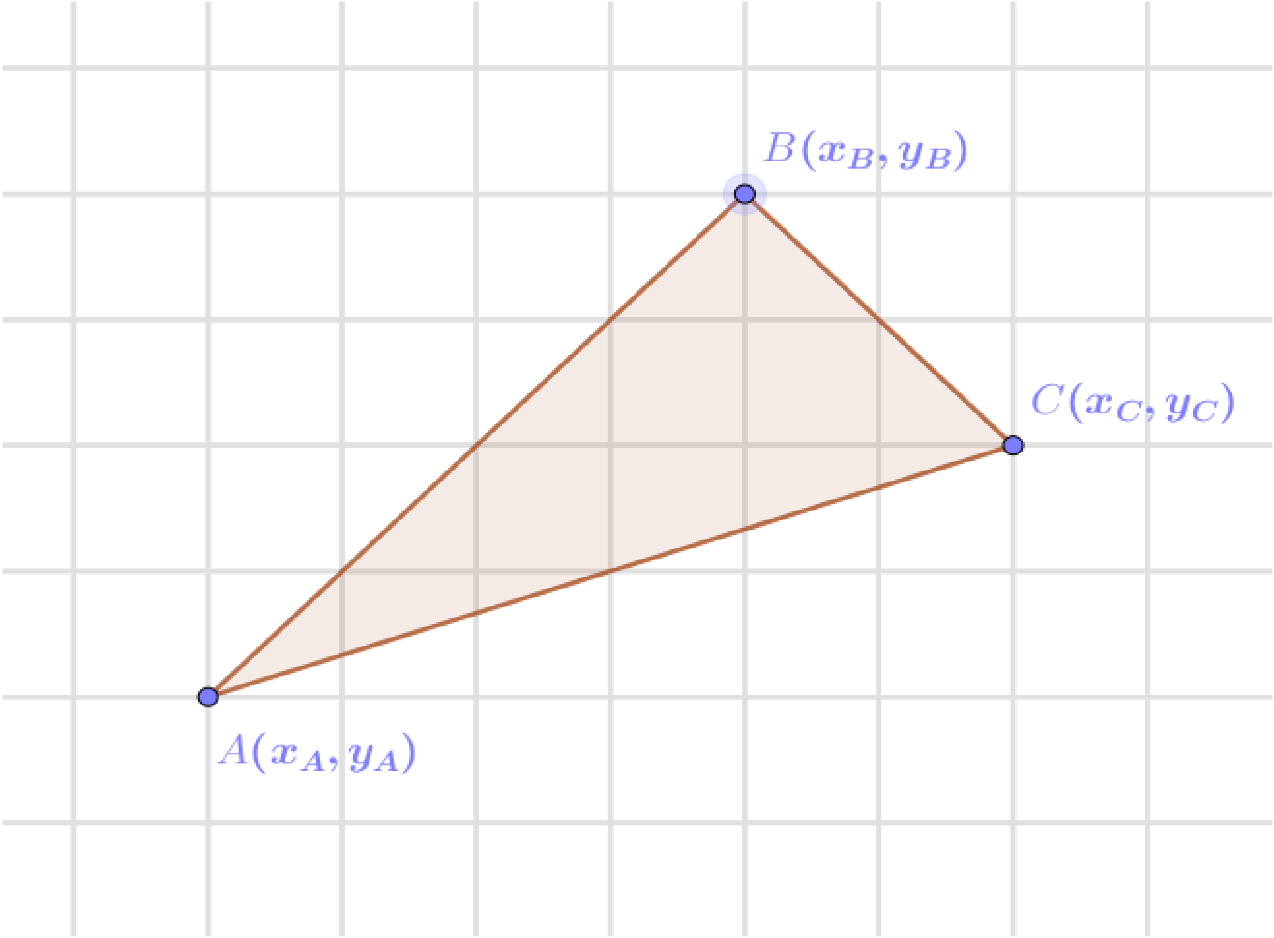
2c) il triangolo di cui devo calcolare l'area non è rettangolo
Oppure non ha i cateti paralleli agli assi del reticolo.



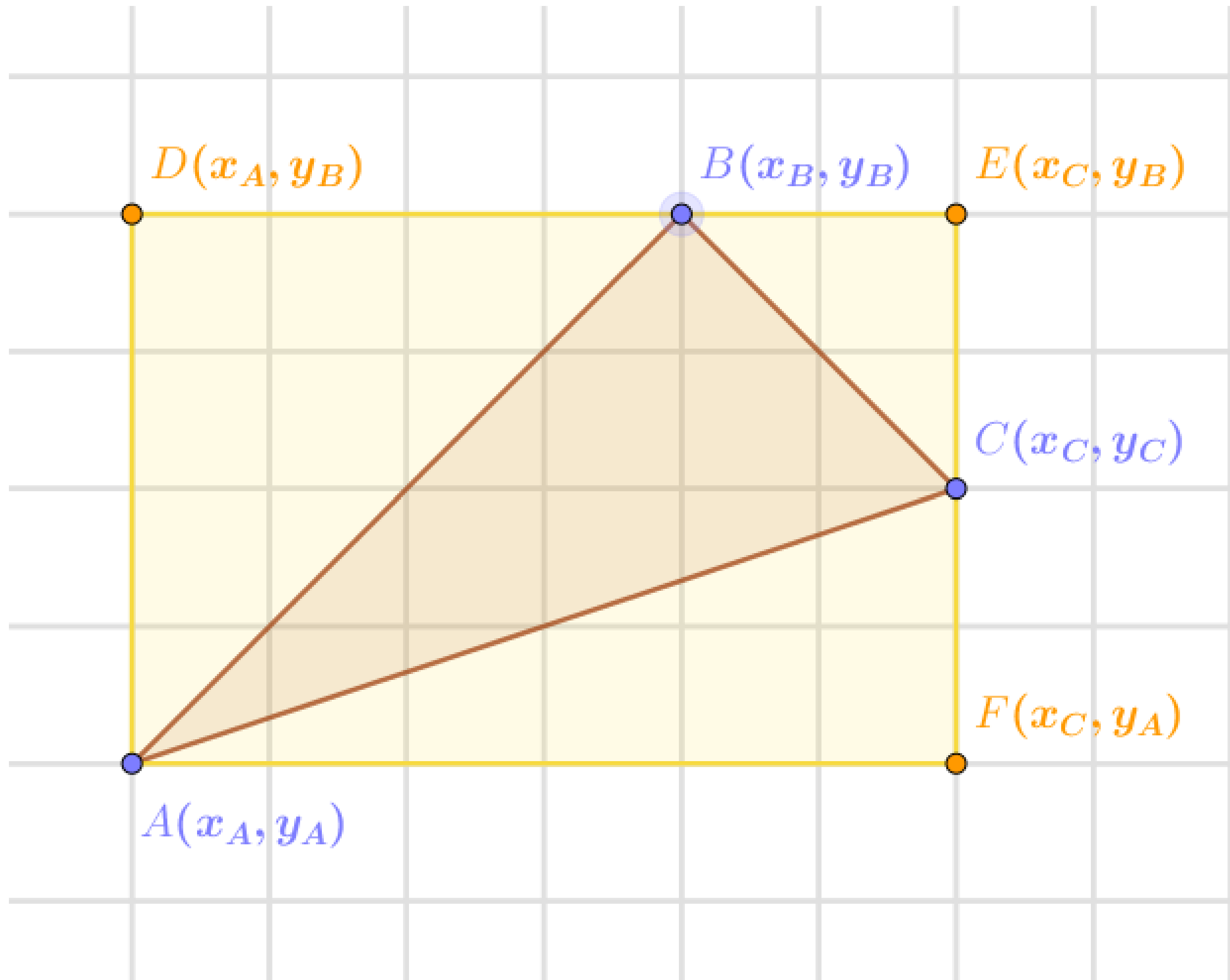

Anche in questo caso posso decomporre il triangolo in triangoli rettangoli e ritornare ai casi già analizzati.

# Calcolo dell'area del triangolo

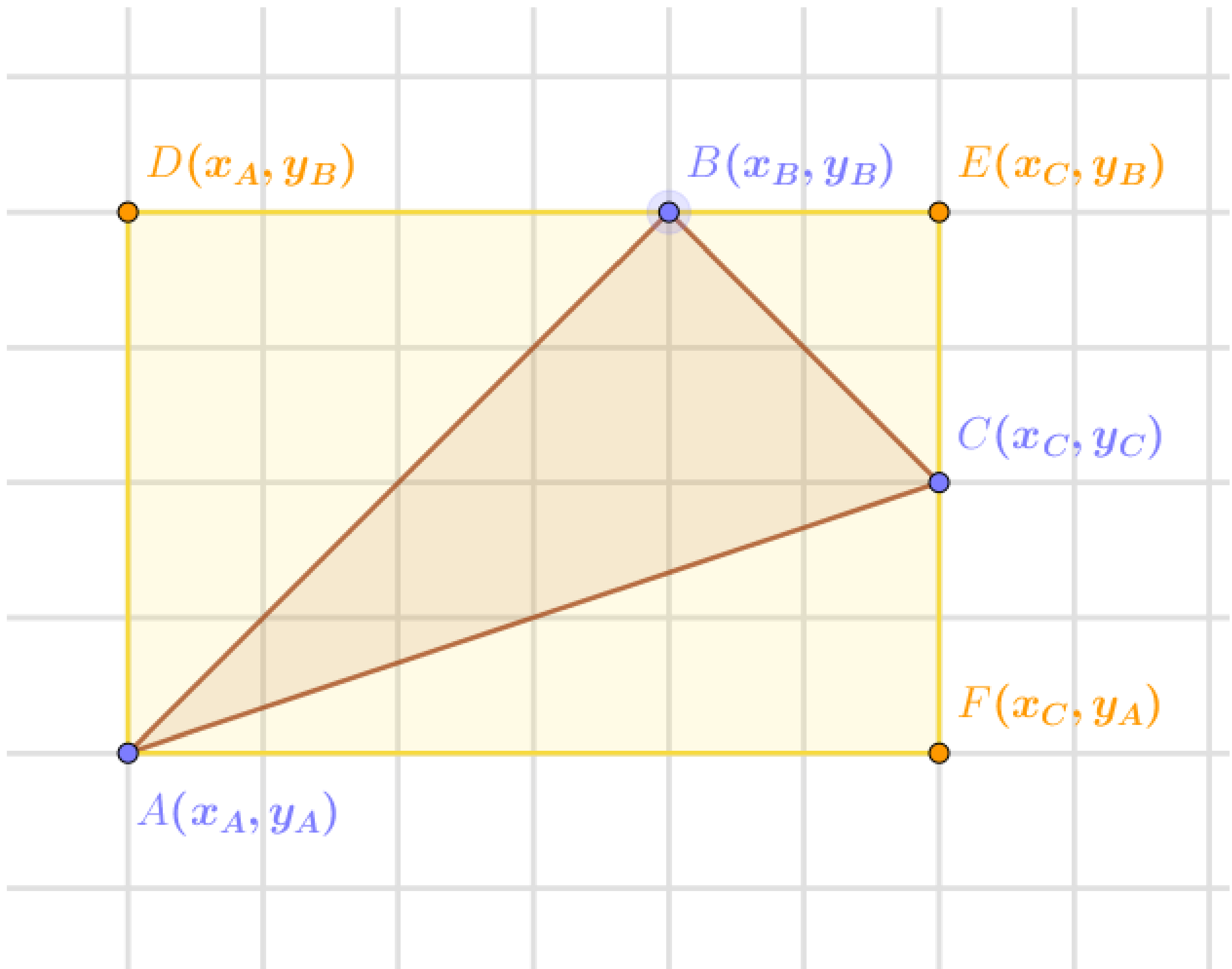
## tramite le coordinate dei vertici



# Calcolo dell'area del triangolo
## tramite le coordinate dei vertici



# Calcolo dell'area del triangolo
## tramite le coordinate dei vertici



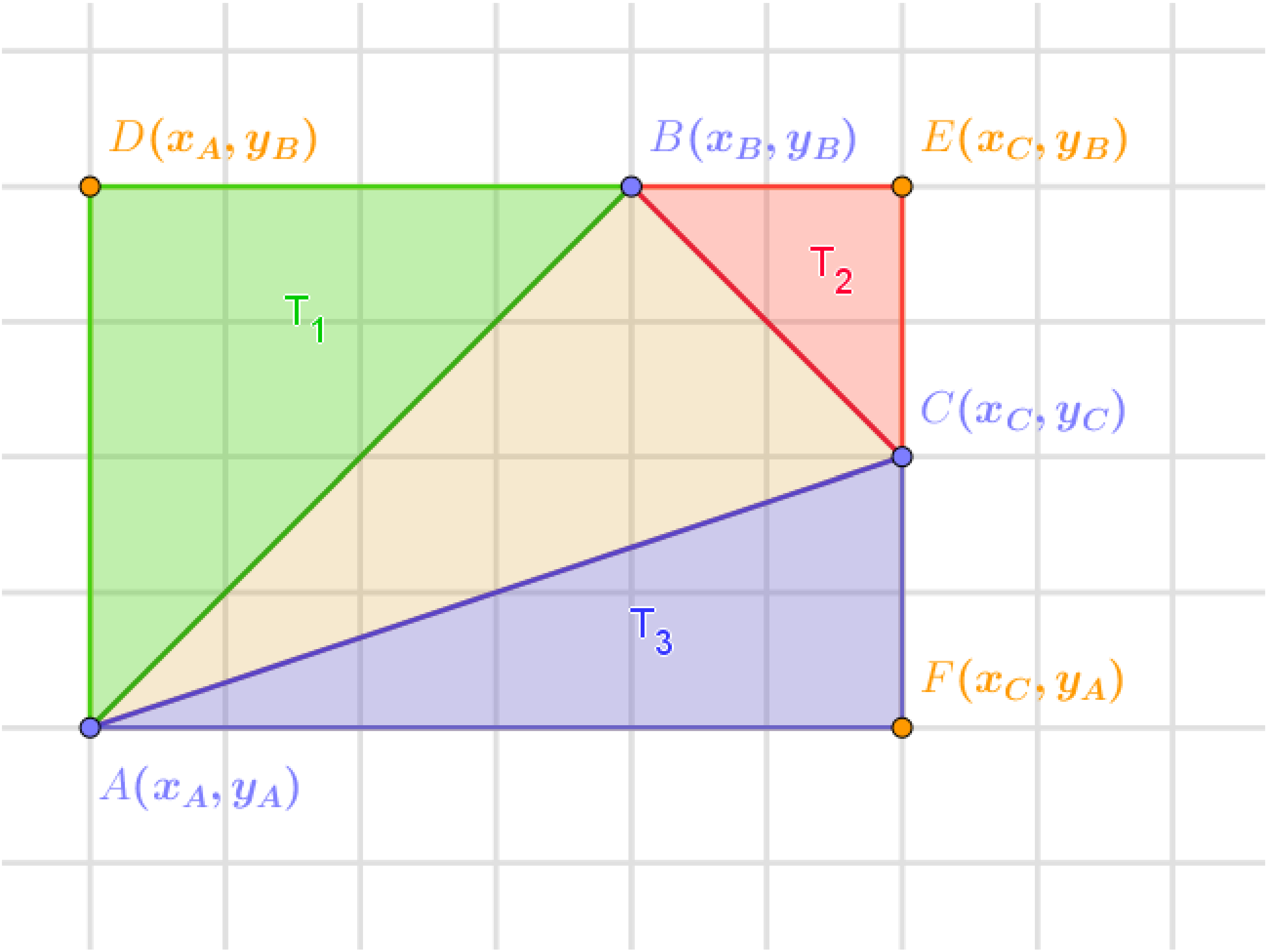

$$A_{ADEF} = (x_c - x_A)(y_B - y_A)$$

# Calcolo dell'area del triangolo
## tramite le coordinate dei vertici

$$A_{T_1} = \frac{1}{2}(x_B - x_A)(y_B - y_A)$$

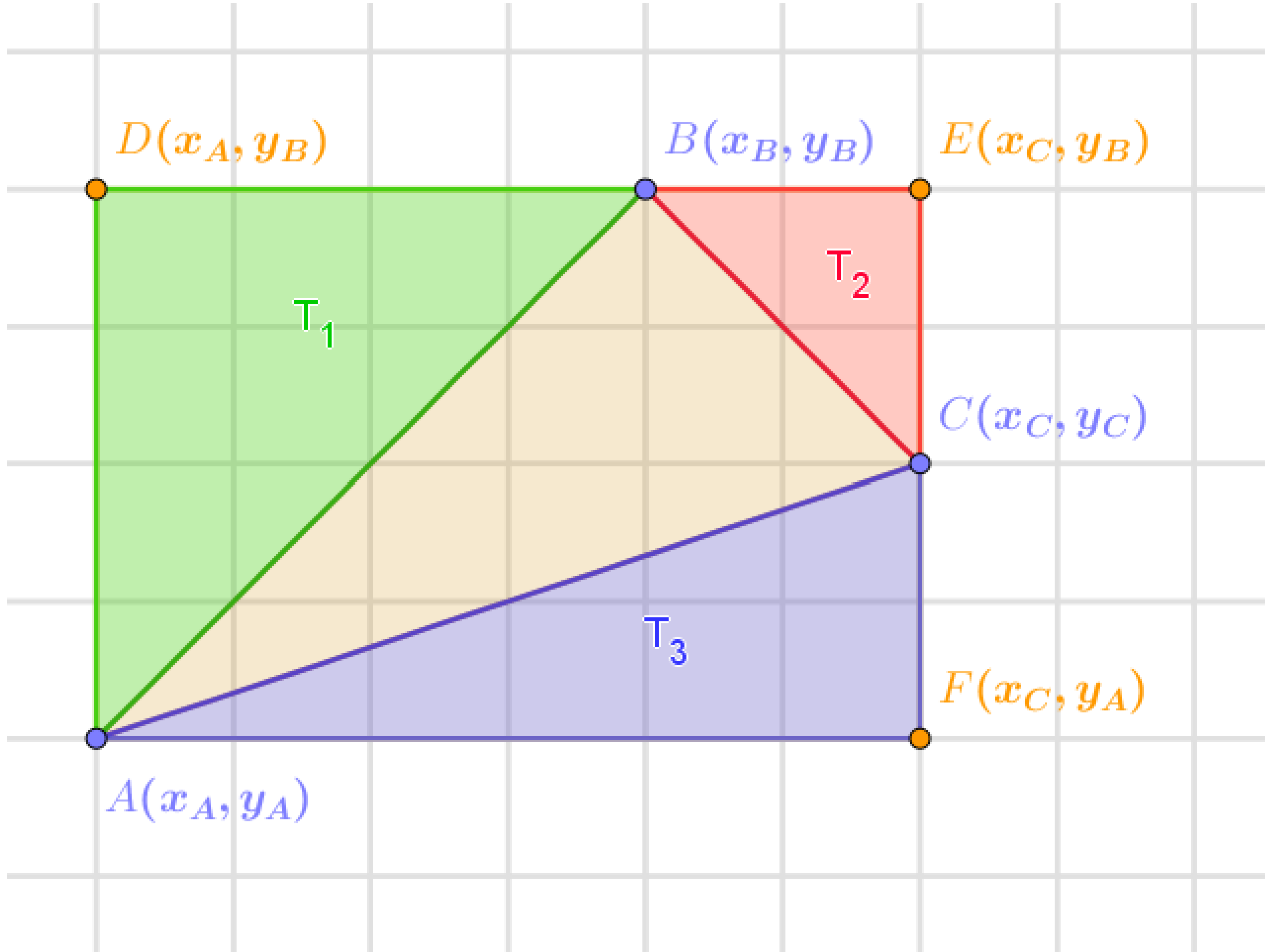
$$A_{T_2} = \frac{1}{2}(x_C - x_B)(y_B - y_C)$$

$$A_{T_3} = \frac{1}{2}(x_C - x_A)(y_C - y_A)$$




$$A_{ADEF} = (x_c - x_A)(y_B - y_A)$$

# Calcolo dell'area del triangolo
## tramite le coordinate dei vertici




$$Area_{T_1} = \frac{1}{2}(x_B - x_A)(y_B - y_A)$$

$$Area_{T_2} = \frac{1}{2}(x_C - x_B)(y_B - y_C)$$

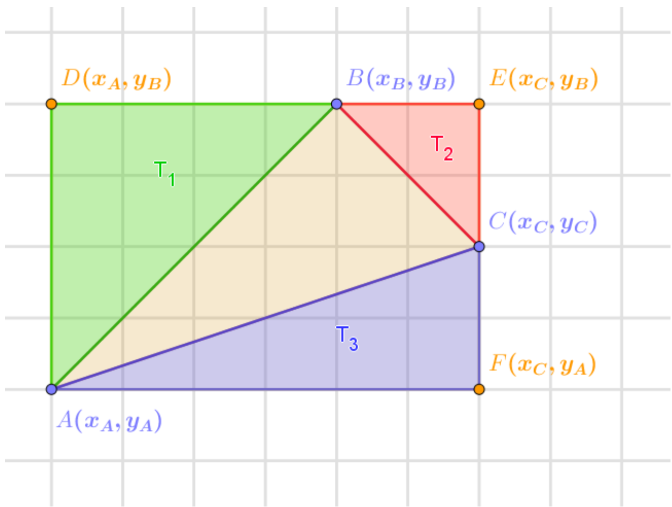
$$Area_{T_3} = \frac{1}{2}(x_C - x_A)(y_C - y_A)$$

$$Area_{ADEF} = (x_c - x_A)(y_B - y_A)$$

$$A_{triangolo} = A_{ADEF} - A_{T_1} - A_{T_2} - A_{T_3}$$

# Calcolo dell'area del triangolo
## tramite le coordinate dei vertici

$$A_{triangolo} = A_{ADEF} - A_{T_1} - A_{T_2} - A_{T_3}$$




$$A_{T_1} = \frac{1}{2}(x_B - x_A)(y_B - y_A)$$

$$A_{T_2} = \frac{1}{2}(x_C - x_B)(y_B - y_C)$$

$$A_{T_3} = \frac{1}{2}(x_C - x_A)(y_C - y_A)$$

$$A_{ADEF} = (x_c - x_A)(y_B - y_A)$$

$$A_{triangolo} = (x_c - x_A)(y_B - y_A) - \frac{1}{2}\left[(x_B - x_A)(y_B - y_A) + (x_C - x_B)(y_B - y_C) + (x_C - x_A)(y_C - y_A)\right]$$

# Calcolo dell'area del triangolo
## tramite le coordinate dei vertici

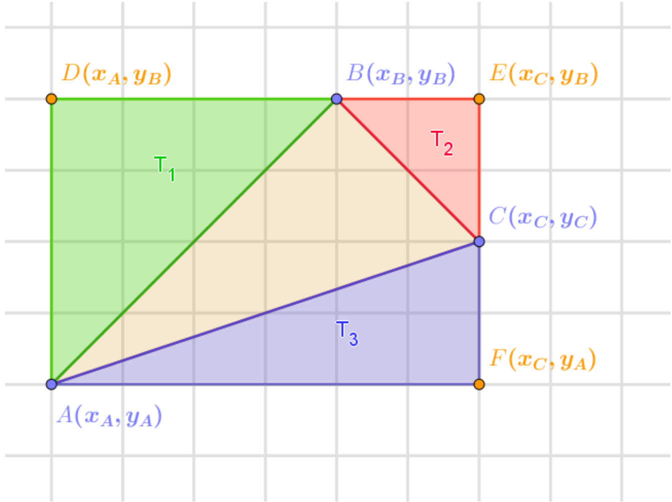
Se il vertice A fosse nell'origine:

$$A_{T_1}=\frac{1}{2}x_B y_B$$

$$A_{T_2}=\frac{1}{2}(x_C-x_B)(y_B-y_C)$$

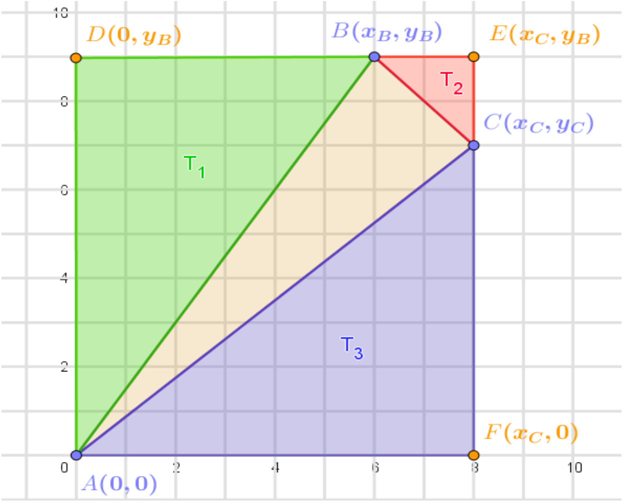
$$A_{T_3}=\frac{1}{2}x_C y_C$$

$$A_{ADEF}=x_C y_B$$




$$A_{triangolo}=x_C y_B-\frac{1}{2}[x_B y_B+(x_C-x_B)(y_B-y_C)+x_C y_C]=\frac{1}{2}[x_C y_B-x_B y_C]$$

# Calcolo dell'area del triangolo
## tramite le coordinate dei vertici



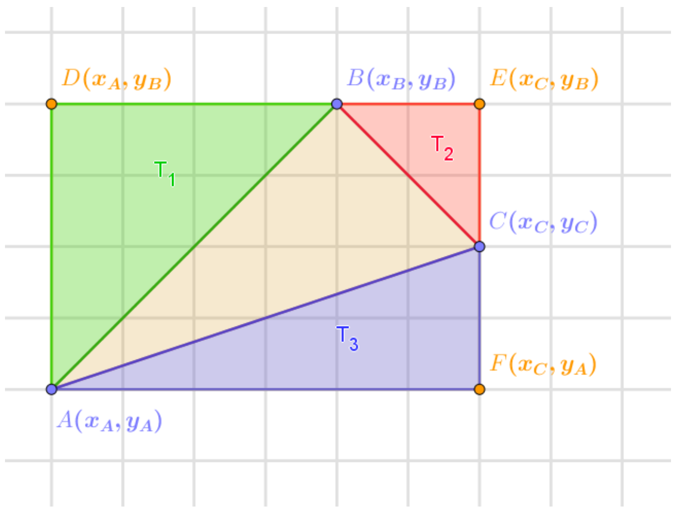

Se il vertice A fosse nell'origine:

$$A_{triangolo} = \frac{1}{2}\left[x_C\, y_B - x_B\, y_C\right]$$

altrimenti basta “aggiungere” alle coordinate
Dei vertici B e C le coordinate di A

$$A_{triangolo} = \frac{1}{2}\left[(x_C + x_A)(y_B + y_A) - (x_B + x_A)(y_C + y_A)\right]$$

# Calcolo dell'area del triangolo
## tramite le coordinate dei vertici




Se il vertice A fosse nell'origine:

$$A_{T_1} = \frac{1}{2} x_B y_B$$

$$A_{T_2} = \frac{1}{2} (x_C - x_B)(y_B - y_C)$$

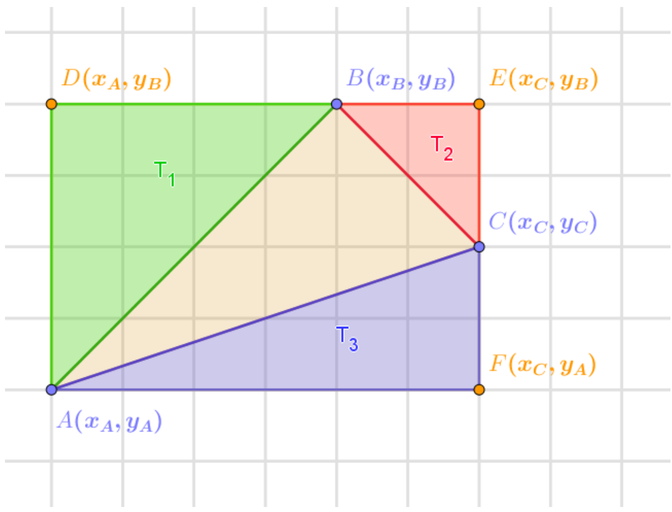
$$A_{T_3} = \frac{1}{2} x_C y_C$$

$$A_{ADEF} = x_C y_B$$

$$A_{triangolo} = x_C y_B - \frac{1}{2}\left[x_B y_B + (x_C - x_B)(y_B - y_C) + x_C y_C\right] = \frac{1}{2}\left[x_C y_B - x_B y_C\right]$$

# Calcolo dell'area del triangolo
## tramite le coordinate dei vertici

Se il vertice A fosse nell'origine:




$$A_{T_1} = \frac{1}{2} x_B y_B$$

$$A_{T_2} = \frac{1}{2} (x_C - x_B)(y_B - y_C)$$

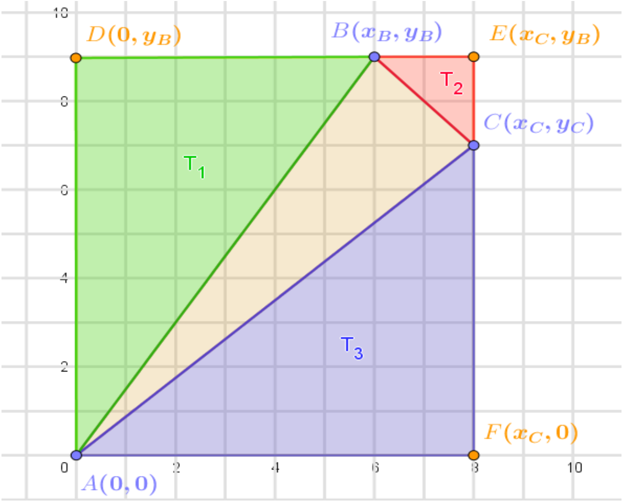
$$A_{T_3} = \frac{1}{2} x_C y_C$$

$$A_{ADEF} = x_C y_B$$

$$A_{triangolo} = x_C y_B - \frac{1}{2} [x_B y_B + (x_C - x_B)(y_B - y_C) + x_C y_C] = \frac{1}{2} [x_C y_B - x_B y_C]$$

$$A_{triangolo} = (x_c - x_A)(y_B - y_A) - \frac{1}{2} [(x_B - x_A)(y_B - y_A) + (x_C - x_B)(y_B - y_C) + (x_C - x_A)(y_C - y_A)]$$

# Calcolo dell'area del triangolo
## tramite le coordinate dei vertici

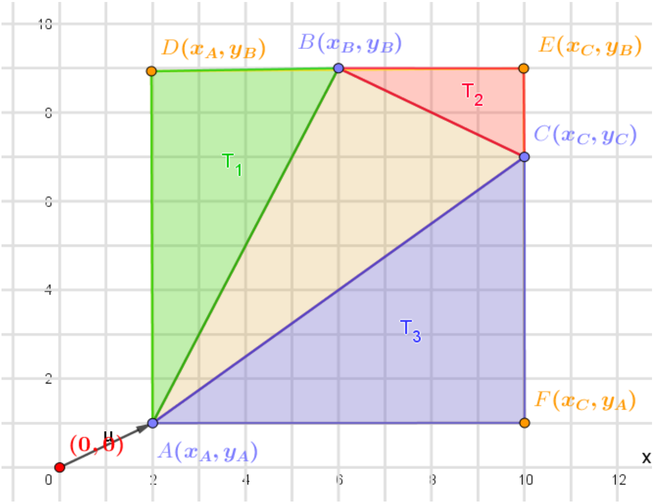



Se il vertice A fosse nell'origine:

$$A_{triangolo} = \frac{1}{2}\left| x_C\, y_B - x_B\, y_C \right|$$

altrimenti basta “aggiungere” alle coordinate
Dei vertici B e C le coordinate di A

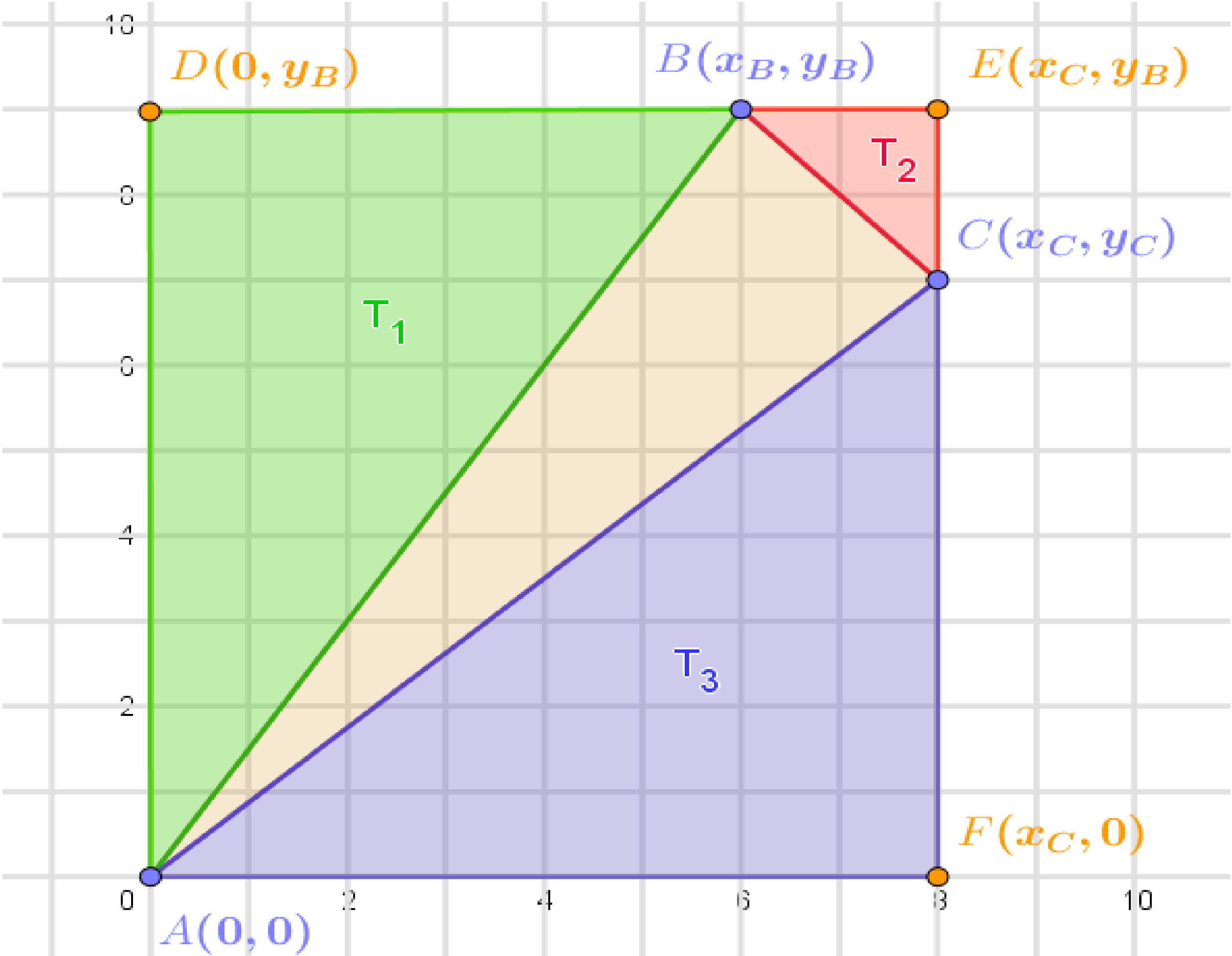
$$A_{triangolo} = \frac{1}{2}\left|(x_C + x_A)(y_B + y_A) - (x_B + x_A)(y_C + y_A)\right|$$




Attenzione: l'area è un numero positivo o nullo!

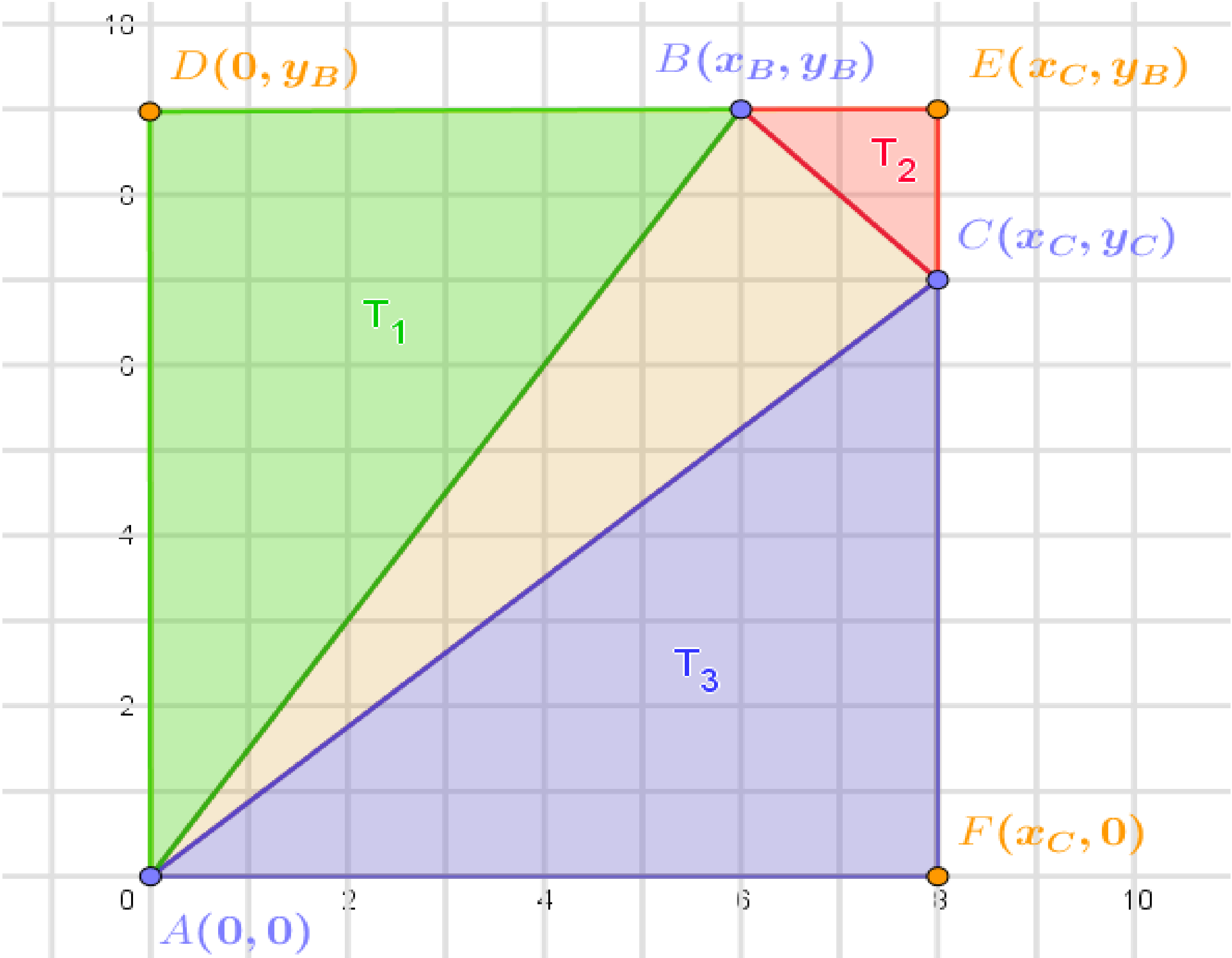
# Calcolo dell'area del triangolo
## tramite le coordinate dei vertici

$$A_{triangolo} = \frac{1}{2} \left| x_C\, y_B - x_B\, y_C \right|$$

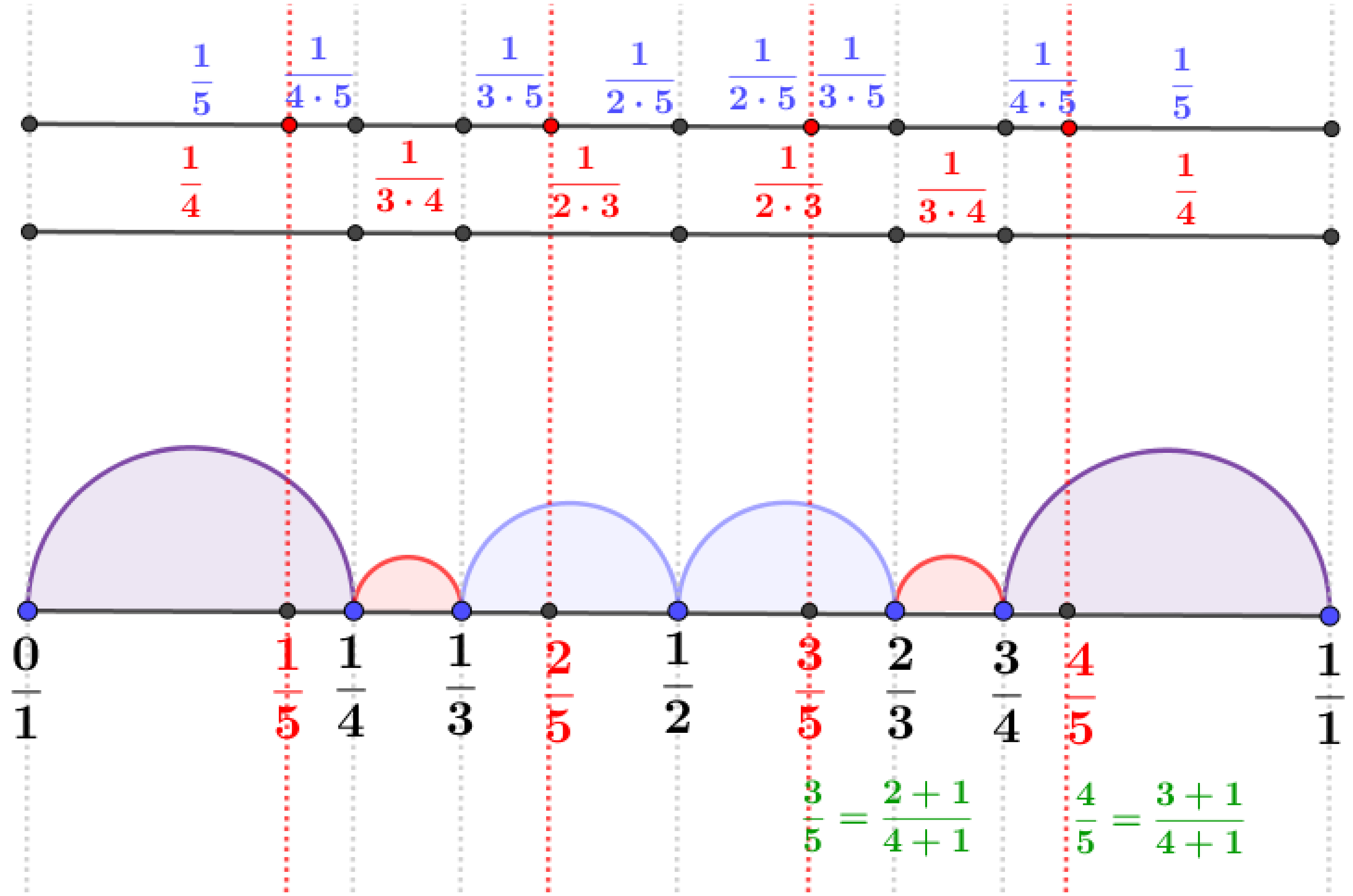


# Calcolo dell'area del triangolo
## tramite le coordinate dei vertici

$$A_{triangolo}=\frac{1}{2}\left|x_C\, y_B-x_B\, y_C\right|$$

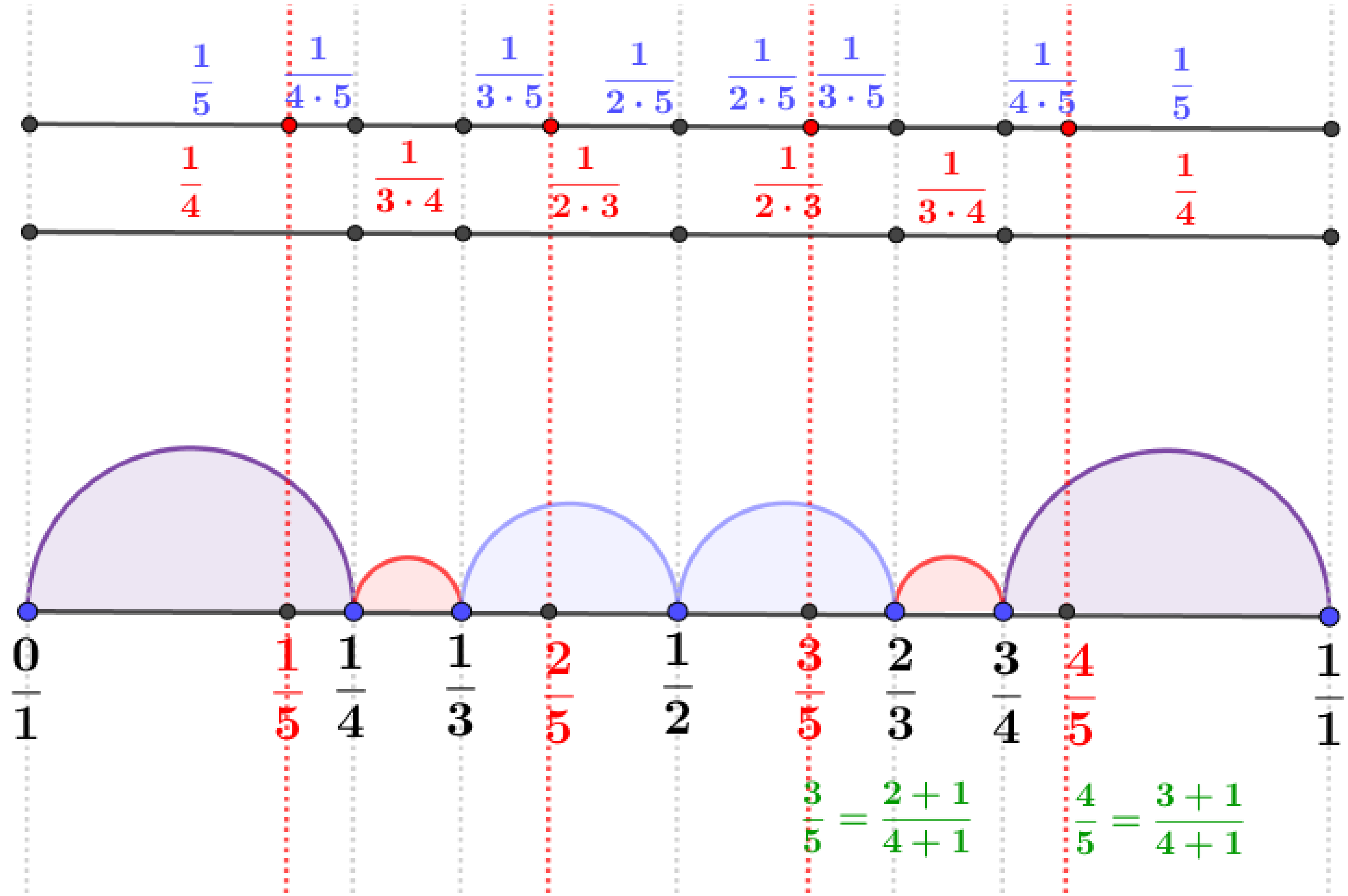


# Frazioni di Farey
## ordinate sulla retta orientata



# Frazioni di Farey

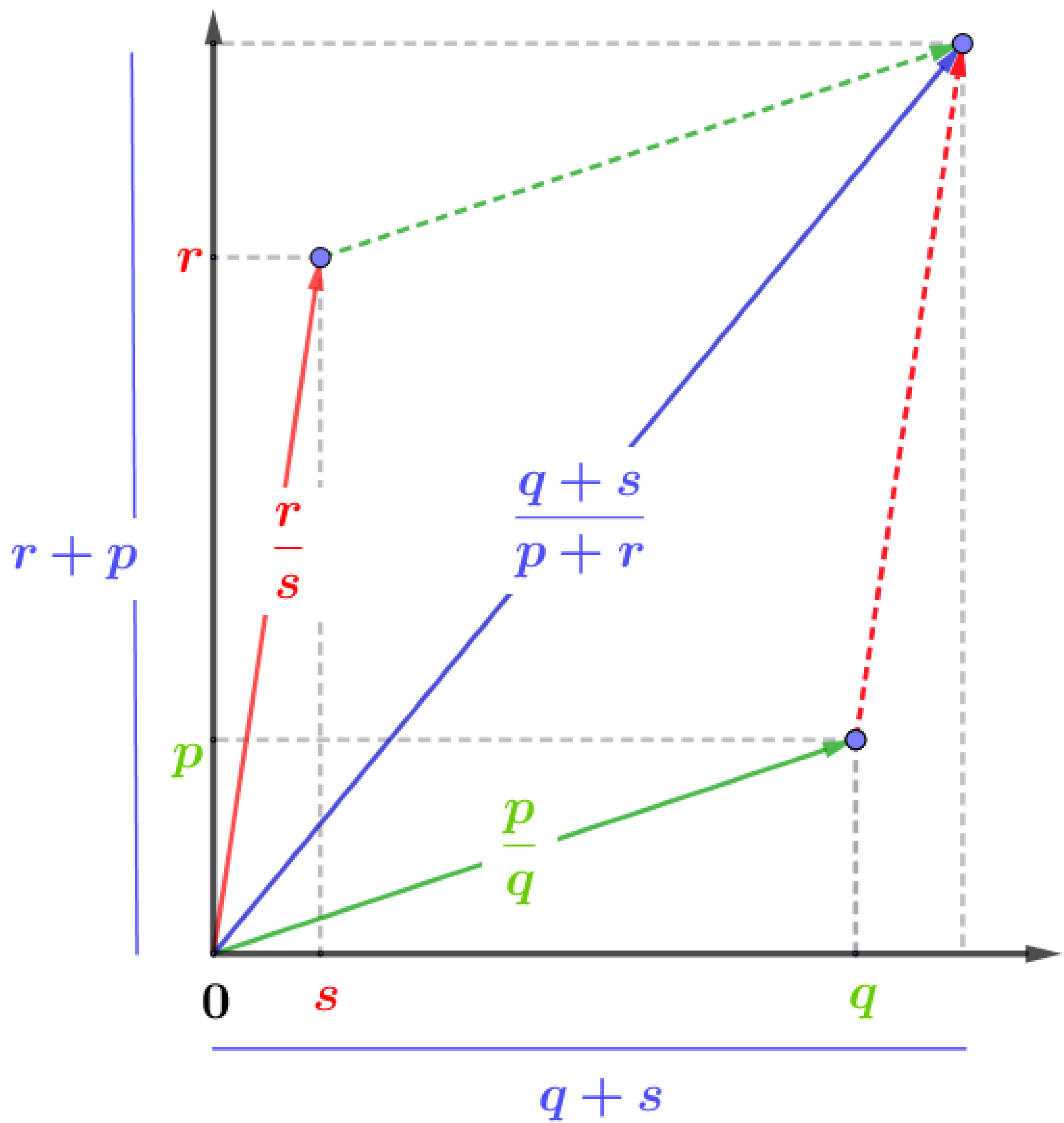
## ordinate sulla retta orientata




$$\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{ad-bc}{bd}=\frac{1}{bd}$$

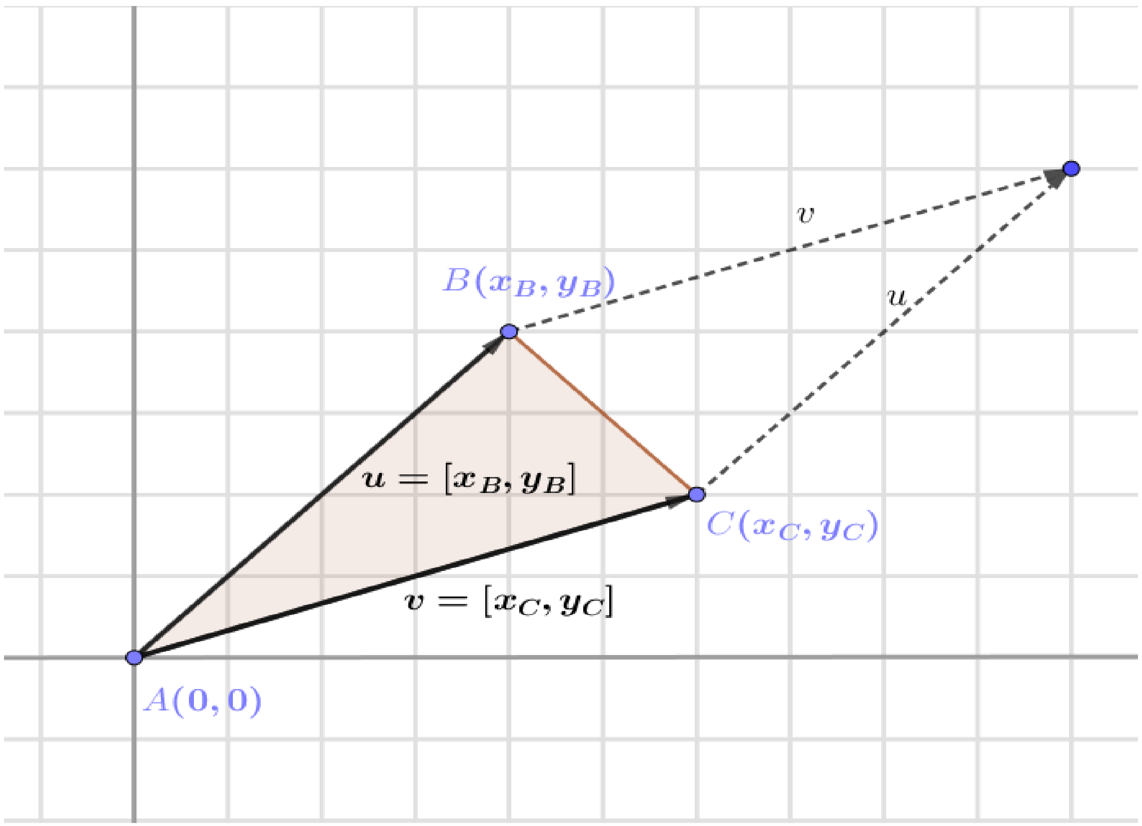
# Operazione di mediante

## e la somma di vettori




$$\frac{p}{q} \oplus \frac{r}{s} = \frac{p+r}{q+s}$$

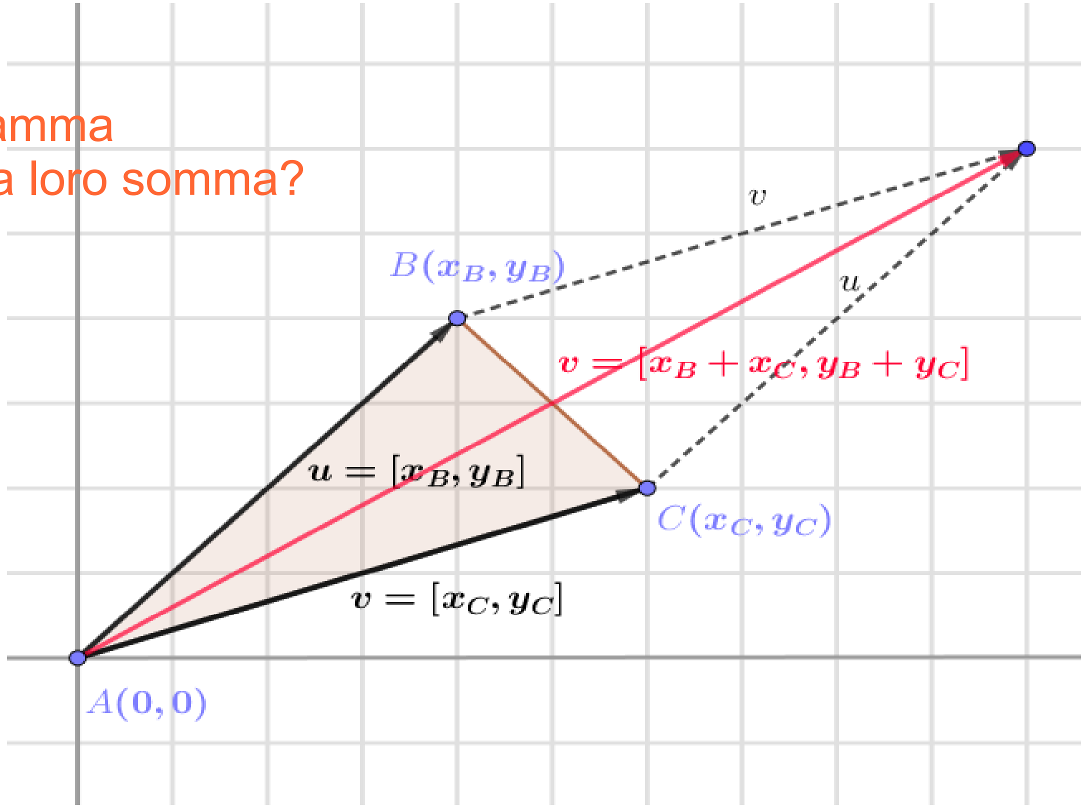
# Calcolo dell'area del parallelogramma
## formato da due vettori




$$A_{triangolo} = \frac{1}{2}\left|x_C\, y_B - x_B\, y_C\right| \quad \rightarrow \quad A_{parall} = \left|x_C\, y_B - x_B\, y_C\right|$$

# Calcolo dell'area del parallelogramma
## formato da due vettori

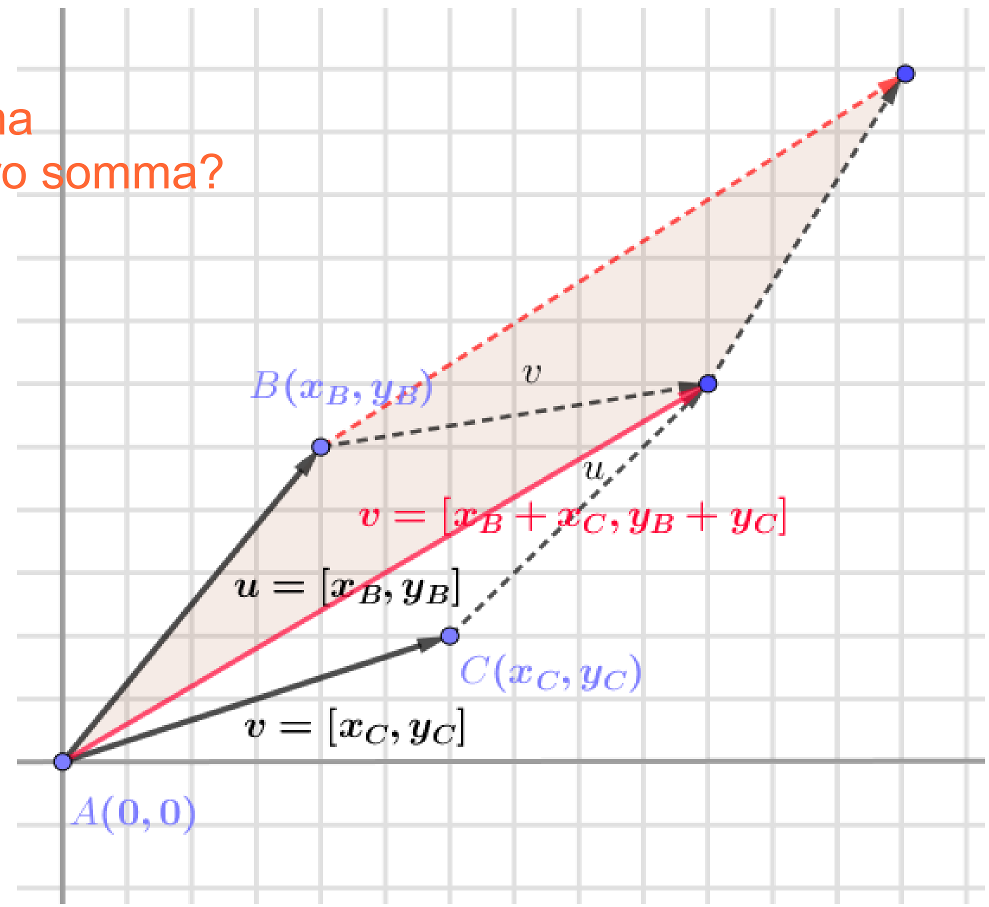
Quanto misura l'area del parallelogramma
formato da uno dei due vettori e dalla loro somma?




$$A_{triangolo} = \frac{1}{2}\left|x_C\, y_B - x_B\, y_C\right| \quad \rightarrow \quad A_{parall} = \left|x_C\, y_B - x_B\, y_C\right|$$

# Calcolo dell'area del parallelogramma
## formato da due vettori

Quanto misura l'area del parallelogramma
formato da uno dei due vettori e dalla loro somma?



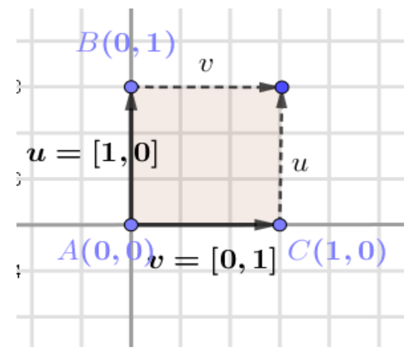

$$A_{triangolo} = \frac{1}{2}\left|x_C\, y_B - x_B\, y_C\right| = \frac{1}{2}\left|(x_B + x_C)\, y_B - x_B\,(y_B + y_C)\right| = \rightarrow A_{parall} = \left|x_C\, y_B - x_B\, y_C\right|$$

L'area di questo nuovo parallelogramma non è diversa !!

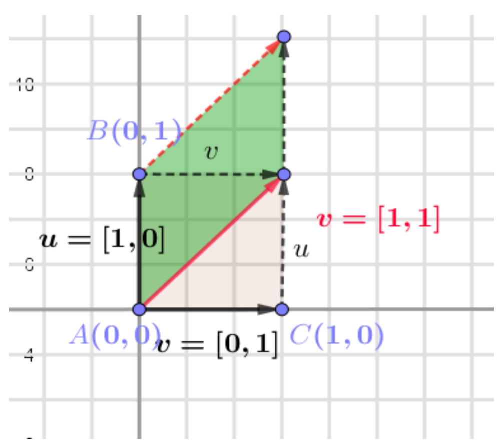
# Calcolo dell'area del parallelogramma
## formato da due vettori

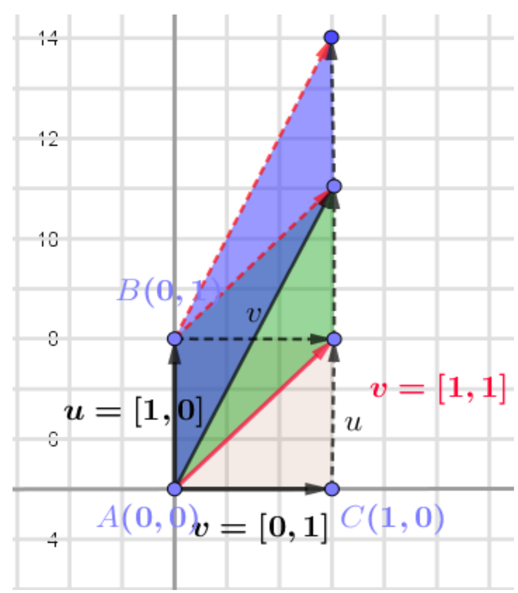
Partiamo dai due versori u(1,0) e v(0,1).
Formano un quadrato di area 1.

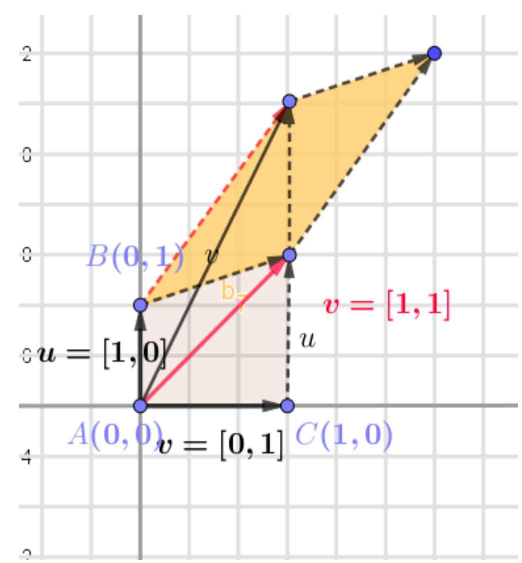
$$A_{parall} = 1$$




Iniziamo poi a fare le somme dei vettori
e a costruire nuovi parallelogrammi.

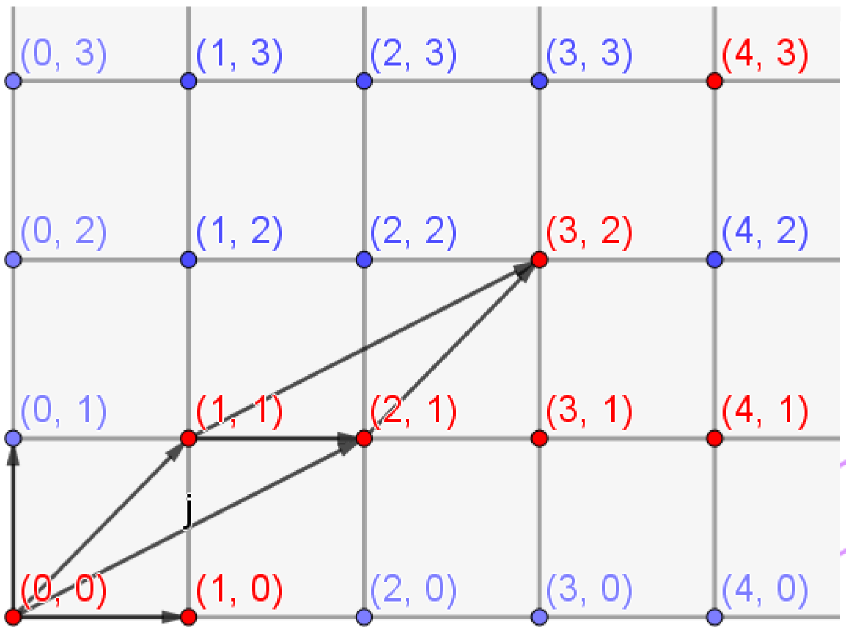


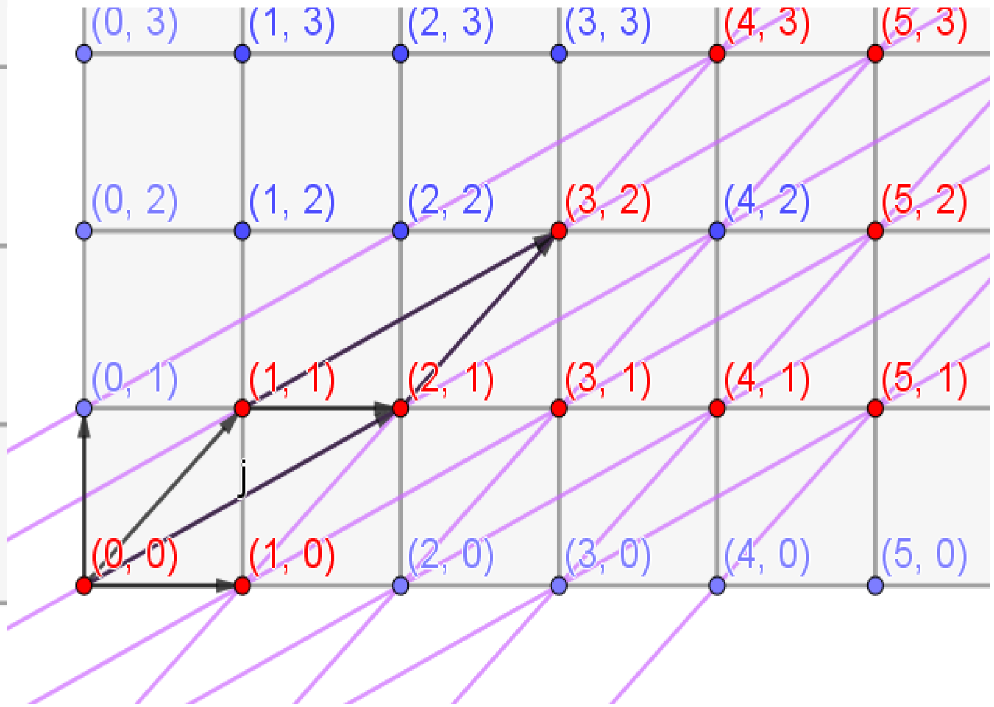




Hanno tutti la stessa area.

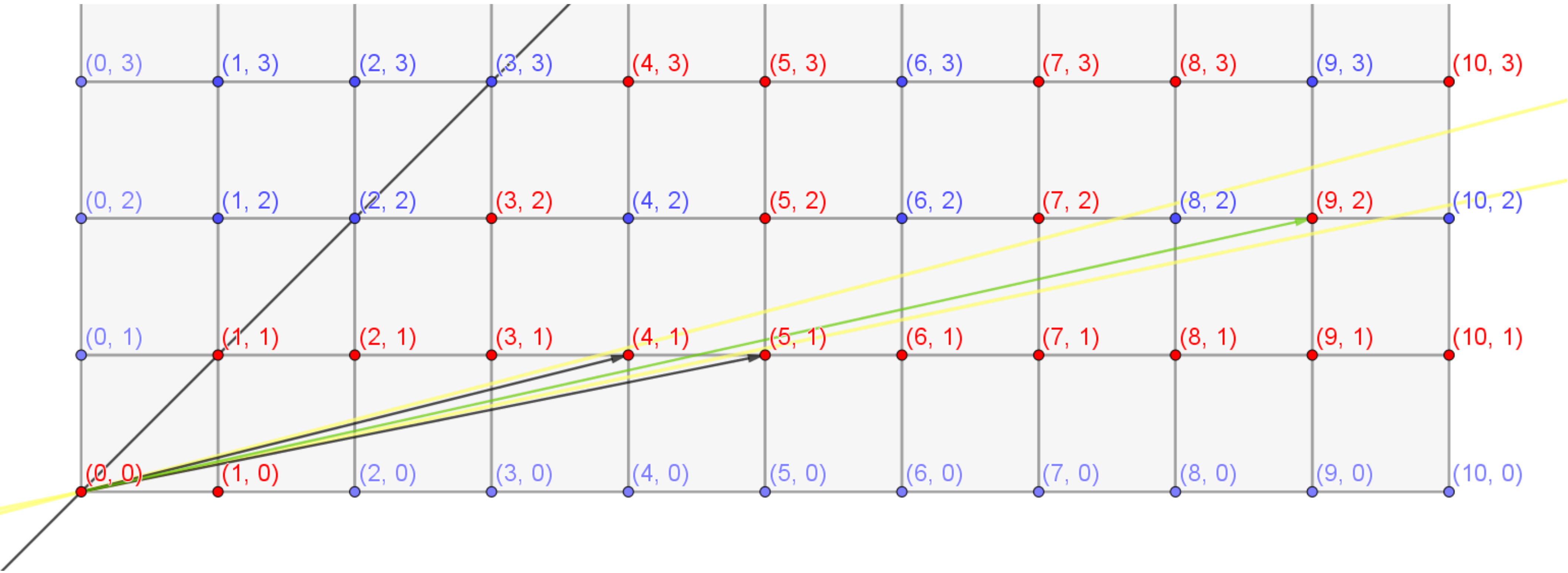
# Calcolo dell'area del parallelogramma
## formato da due vettori



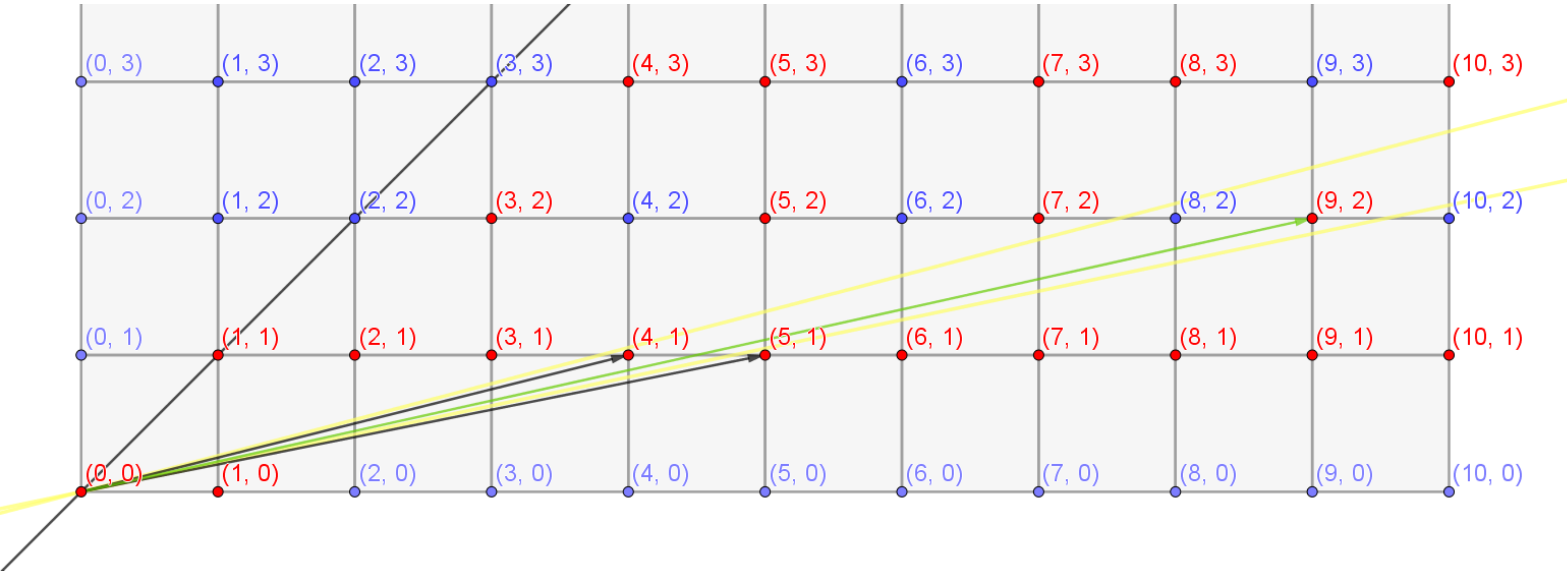

$$\frac{1}{1}-\frac{1}{2}=\frac{1\times 2-1\times 1}{1\times 2}=\frac{Area}{1\times 2}=\frac{1}{1\times 2}$$

# Calcolo dell'area del parallelogramma
## formato da due vettori



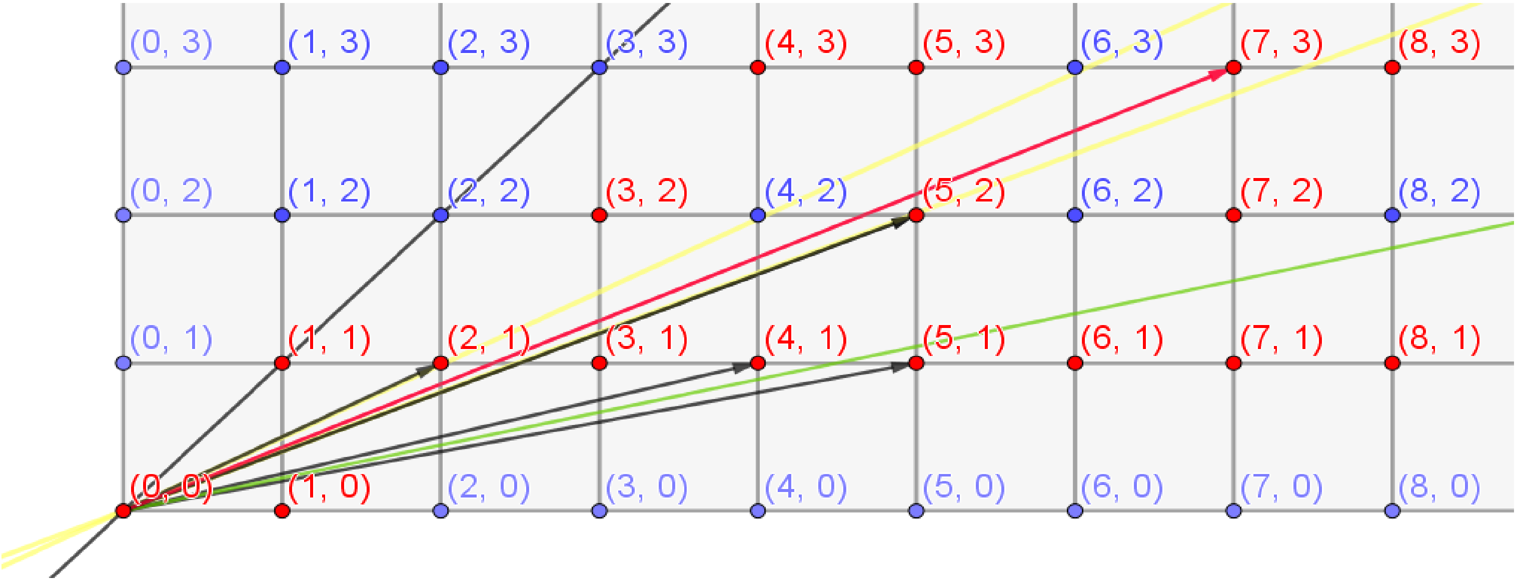

$$\frac{1}{4}-\frac{1}{5}=\frac{5\times 1-4\times 1}{4\times 5}=\frac{Area}{4\times 5}=\frac{1}{4\times 5}$$

# Calcolo dell'area del parallelogramma
## formato da due vettori



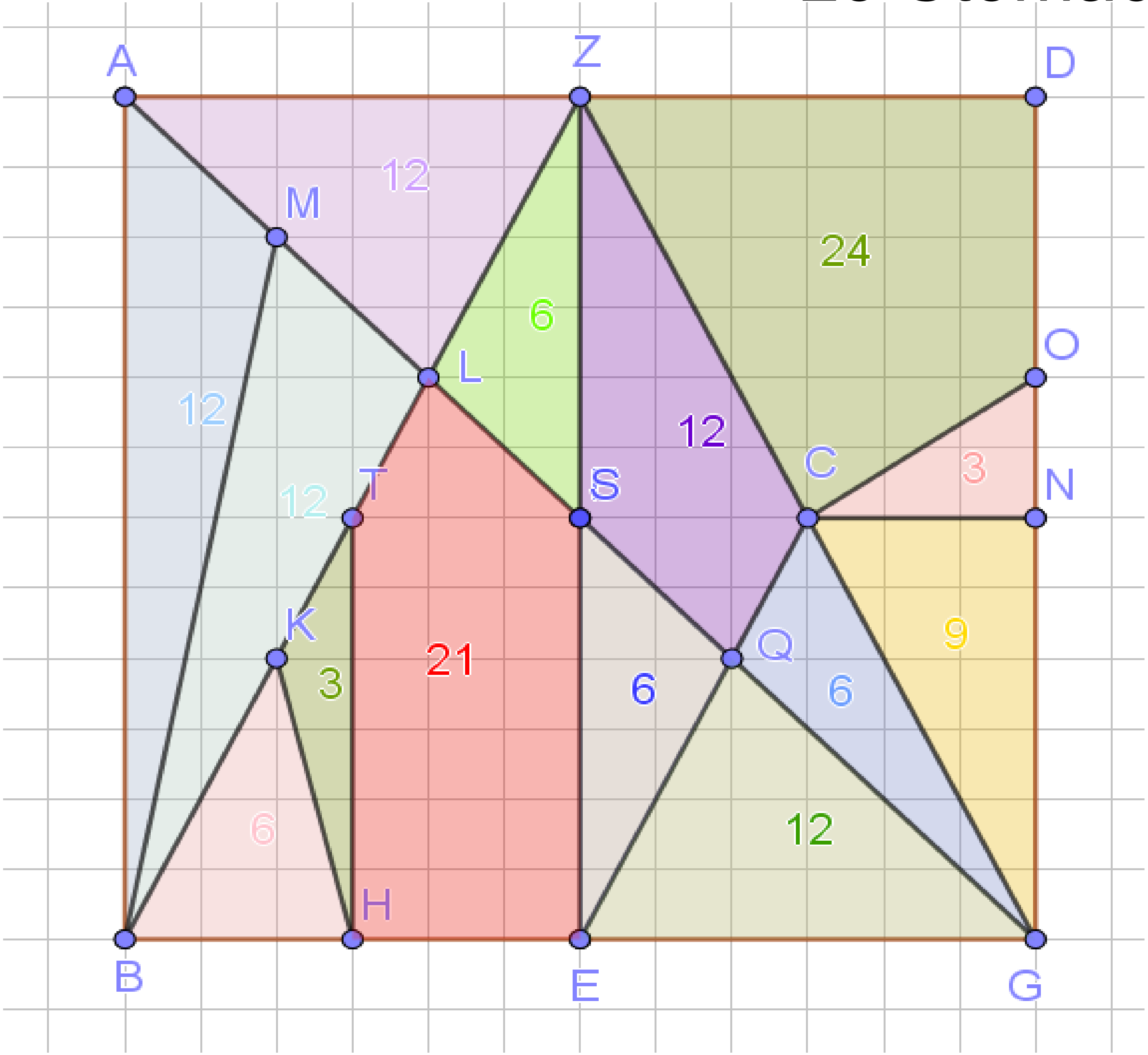

$$\frac{1}{4}-\frac{1}{5}=\frac{5\times 1-4\times 1}{4\times 5}=\frac{Area}{4\times 5}=\frac{1}{4\times 5}$$

# Calcolo dell'area del parallelogramma
## formato da due vettori

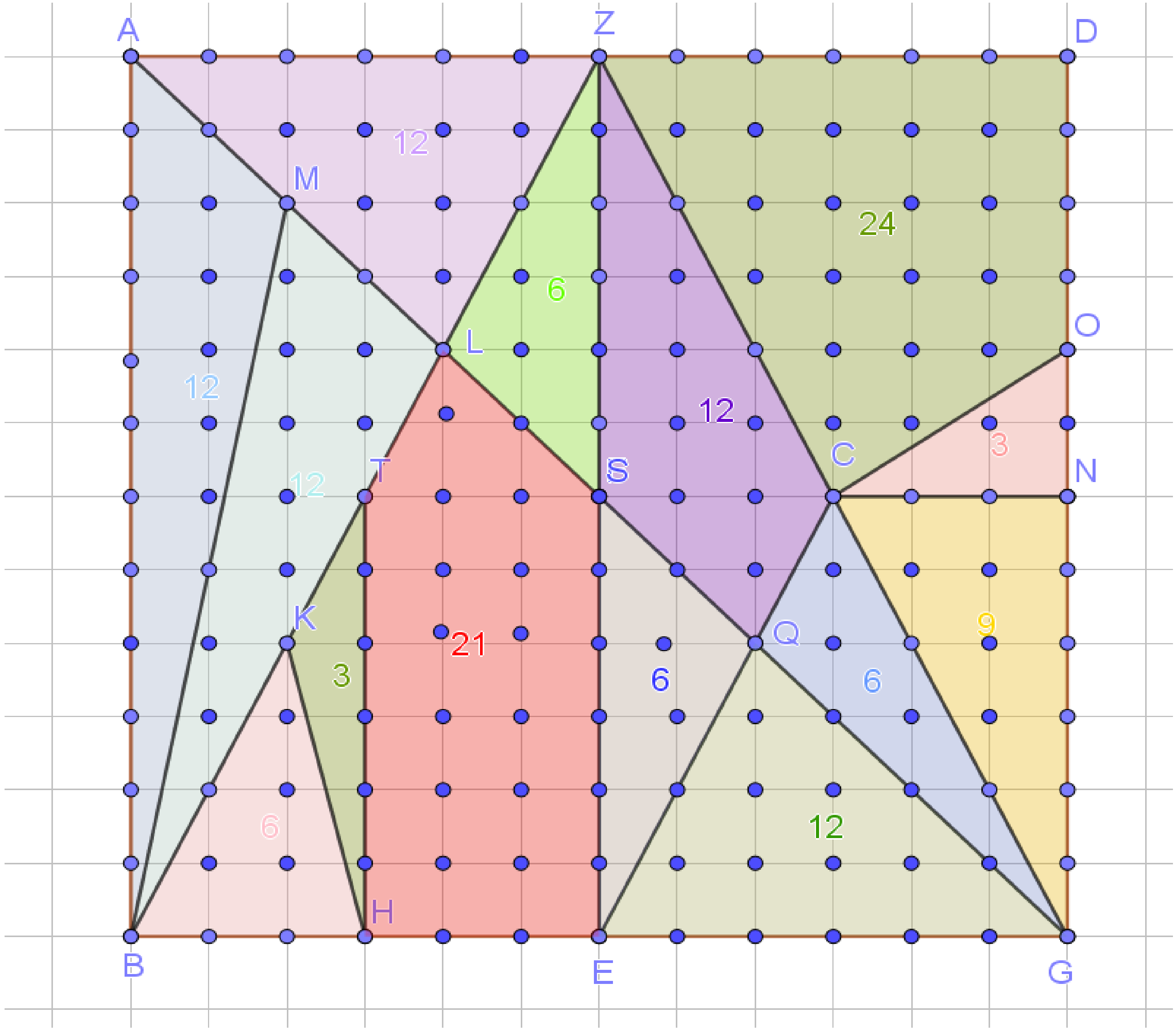



$$\frac{1}{2}-\frac{2}{5}=\frac{1\times 5-2\times 2}{2\times 5}=\frac{Area}{2\times 5}=\frac{1}{2\times 5}$$

# Lo Stomachion



# Lo Stomachion



# Numeri
## Problemi lineari a soluzione intera

$$5x - 8y = 1$$

$$ax - by = 1$$

$$MCD(a, b) = MCD(5,8) = 1$$

$$(x_0, y_0) = (?, ?)$$

# Numeri
## Problemi lineari a soluzione intera

$$5x - 8y = 1$$

$$(x_0, y_0) = (5, 3)$$

$$5 \cdot 5 - 8 \cdot 3 = 1$$

# Numeri

## Problemi lineari a soluzione intera

$$5x - 8y = 1$$

$$ax - by = 1$$

$$ax + kab - kab - by = 1$$

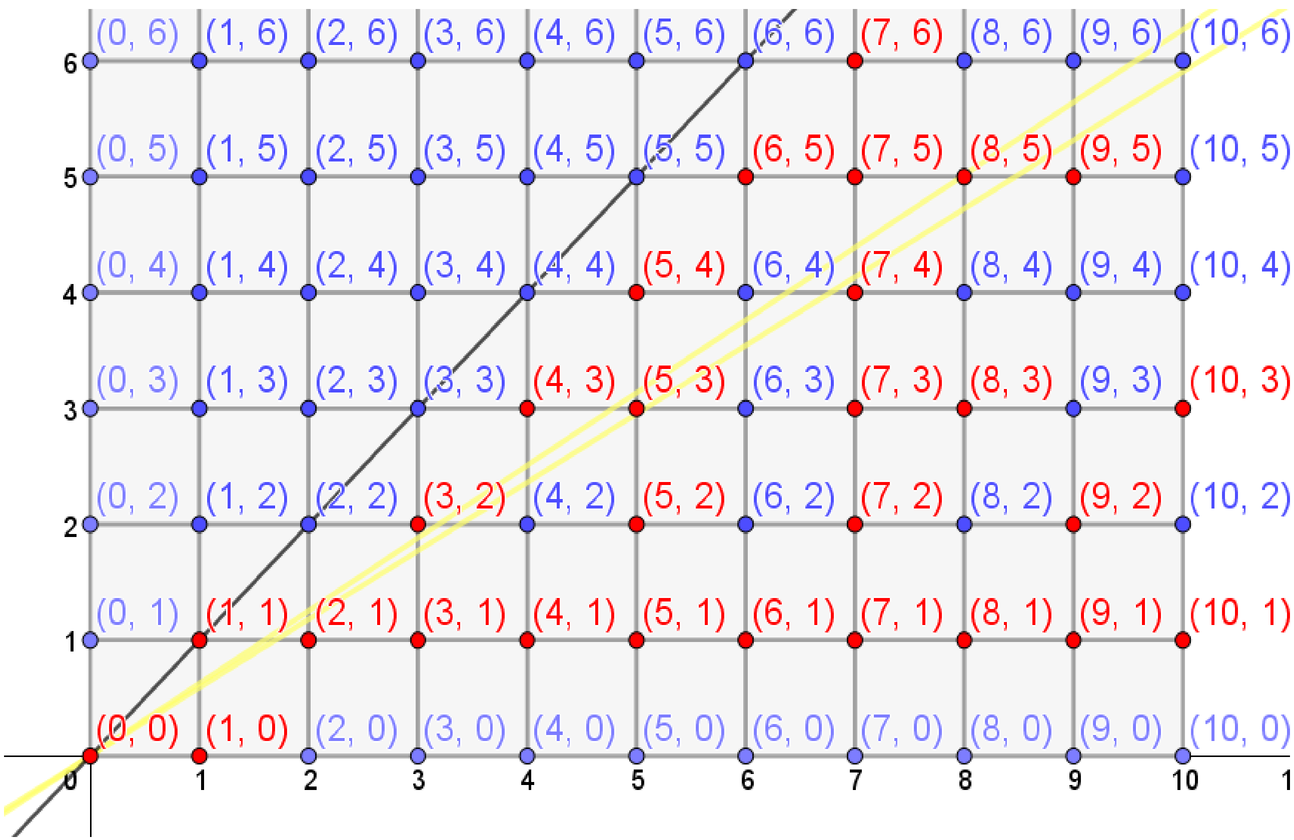
$$a(x + kb) - b(y + ka) = 1$$

$$(x_k, y_k) = (5 + 8k, 3 + 5k)$$

# Numeri

## Problemi a soluzione intera

$$5\,x-8\,y=1$$

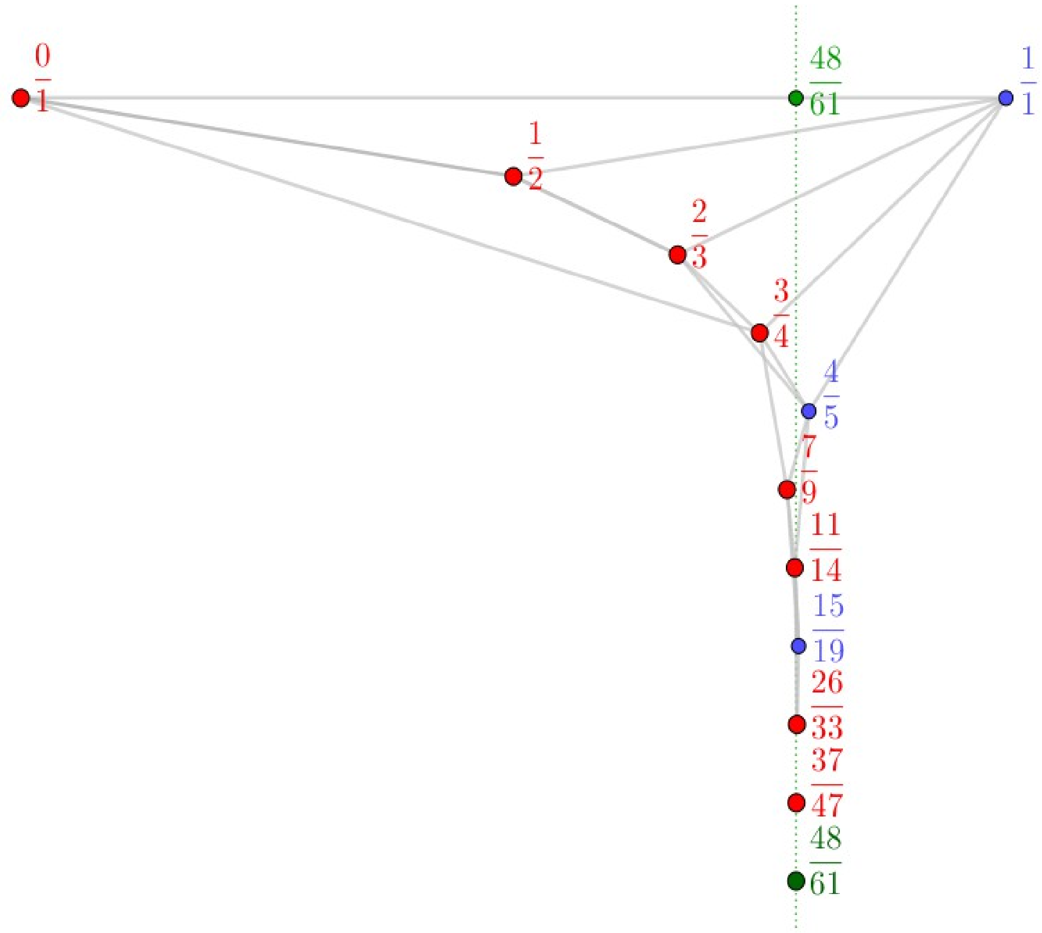



$$5\cdot 5-8\cdot 3=1$$

$$(x_{0,}\,y_0)=(5,3)$$

$$\frac{5}{8}-\frac{3}{5}=\frac{5\times 5-8\times 5}{8\times 3}=\frac{1}{24}$$

# Numeri
## i medianti per approssimare 48/61

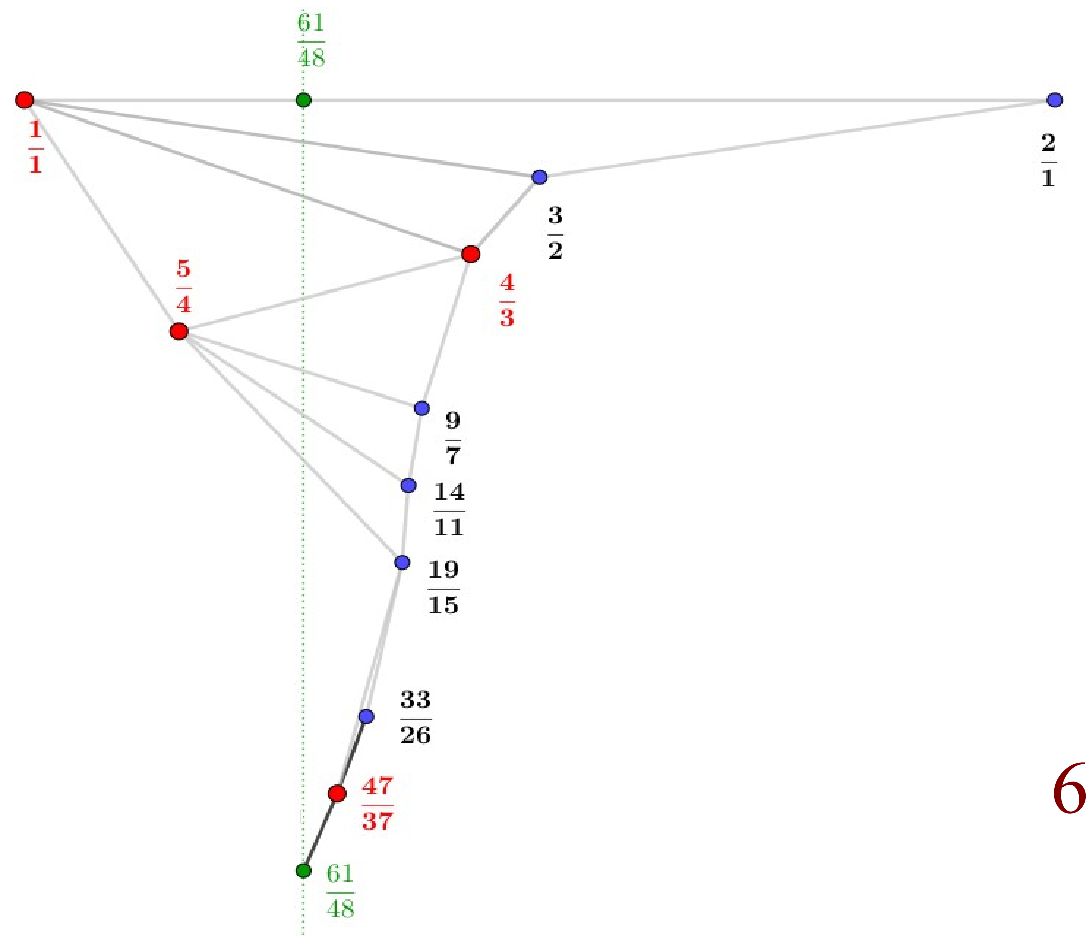



$$61\,x - 48\,y = 1$$

I numeri in rosso approssimano per difetto, quelli in blu per eccesso

# Numeri

## i medianti per approssimare 61/48




$$61\,x-48\,y=1$$

I numeri in rosso sono i convergenti della frazione continua