

“ III Scuola d'Autunno di Matematica e Scienze ”
S. Martino al Cimino
La simmetria con le mani e con i piedi



Luca Dragone (luca.dragone71@gmail.com)
I.C. Alessandro Magno
26 / 10 / 2018

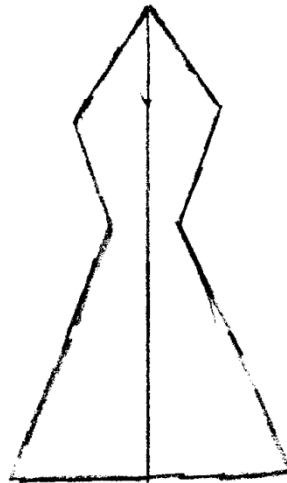
Simmetria: “questa sconosciuta”

Analisi delle preconoscenze

Lavoro individuale:

- Disegna qualcosa che secondo te è “simmetrico”.
- Spiega a parole tue perché ciò che hai disegnato è “simmetrico”.

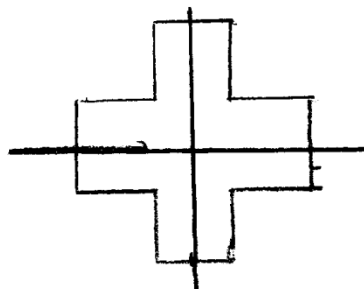
Analisi delle preconoscenze



UNA FIGURA CHE TAGLIATA A METÀ LE DUE
PARTI SI SOVRAPPONGONO PERFETTAMENTE.

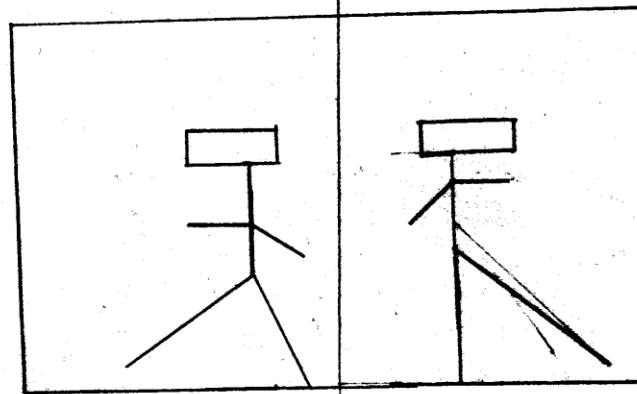
Sembra che → simmetrico = “non varia se lo rifletto”
Inoltre → spesso l’asse è “verticale”

Analisi delle preconoscenze



Una figura simm. e un figura che può essere
divisa in 2 parti uguali

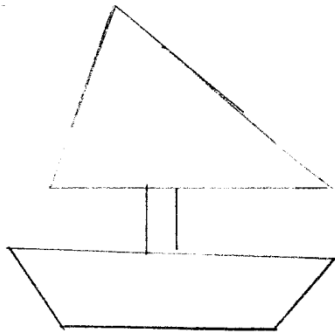
L'alunno: "Ho messo due assi di simmetria, uno verticale ed uno orizzontale, anche se quest'ultimo non lo dovevo mettere, o almeno non tutti e due insieme".



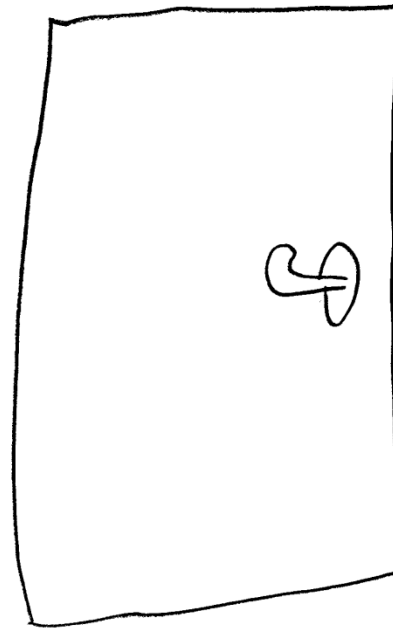
È SIMMETRICO PERCHÉ È UGUALE MA AL
CONTRARIO

Simmetria:
particolare isometria (riflessione) o caratteristica di una figura?

Analisi delle preconoscenze

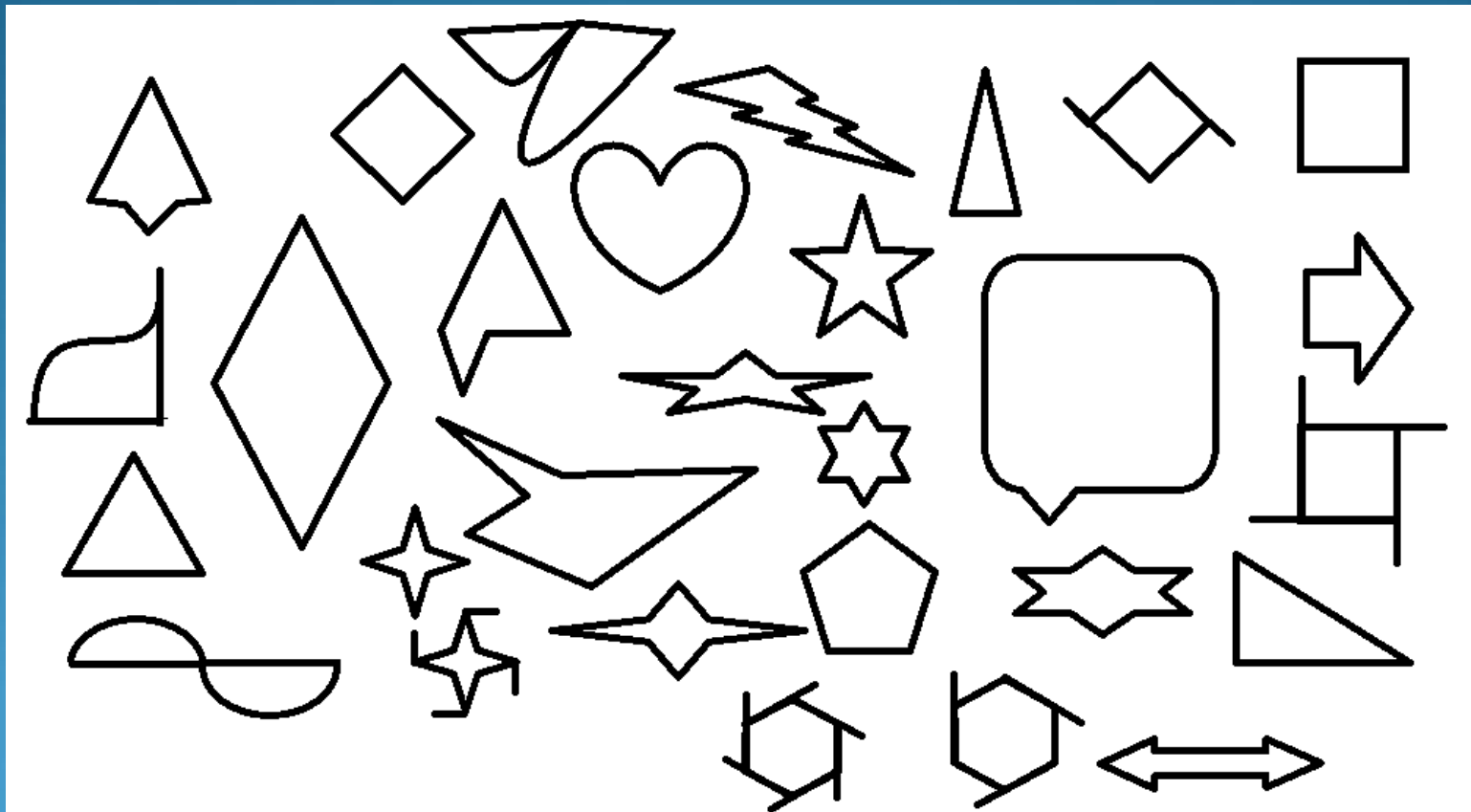


QUESTO OGGETTO È SIMMETRICO
PERCHÈ È COMPOSTO SOLO DA LINEE
DRITTE, E NON TONDE



È SIMMETRICO PERCHÈ HA 4 LATI
ED È SIMMETRICO

Analisi delle preconoscenze



Simmetrico, sì o no?

Analisi delle preconoscenze

Lavoro in piccoli gruppi - Figura assegnata

- E' simmetrica perché?
- Non è simmetrica perché?

Analisi delle preconoscenze

Figura



Non è simmetrico perché...
SE LA FIGURA VIENE DIVISA A METÀ LE 2 PARTI
NON SONO UGUALI.

Figura



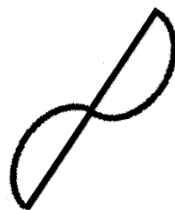
Questa figura non è simmetrica perché
tracciando l'asse di simmetria non viene a specchio.

Si conferma che per gli alunni “simmetrico” significa “uguale a se stesso dopo riflessione”.

Non considerano altre isometrie se non la riflessione.

Figura

Questa figura non è simmetrica perché
tracciando l'asse di simmetria non viene a spe

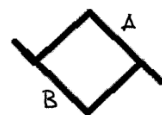


FIGURA

È SIMMETRICO PERCHÉ

②

② I lati A-B SONO UGUALI.



NON È SIMMETRICO PER

Analisi delle preconoscenze

Figura



Questa figura è simmetrica perché, tracciando l'asse di simmetria, viene a specchio.

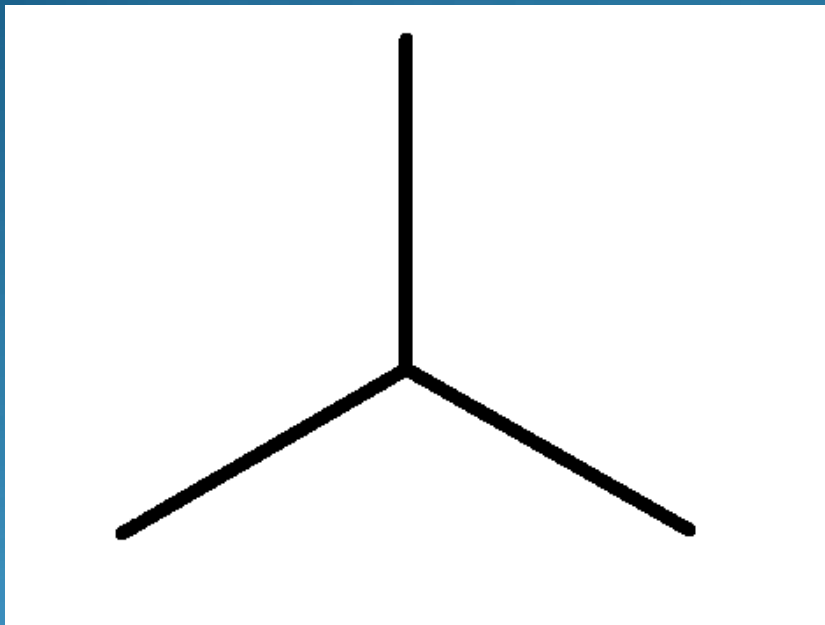
Anche per i fregi si conferma che per gli alunni “simmetrico” significa “uguale a se stesso dopo riflessione”.

Notare che il fregio è stato posizionato “verticalmente”.

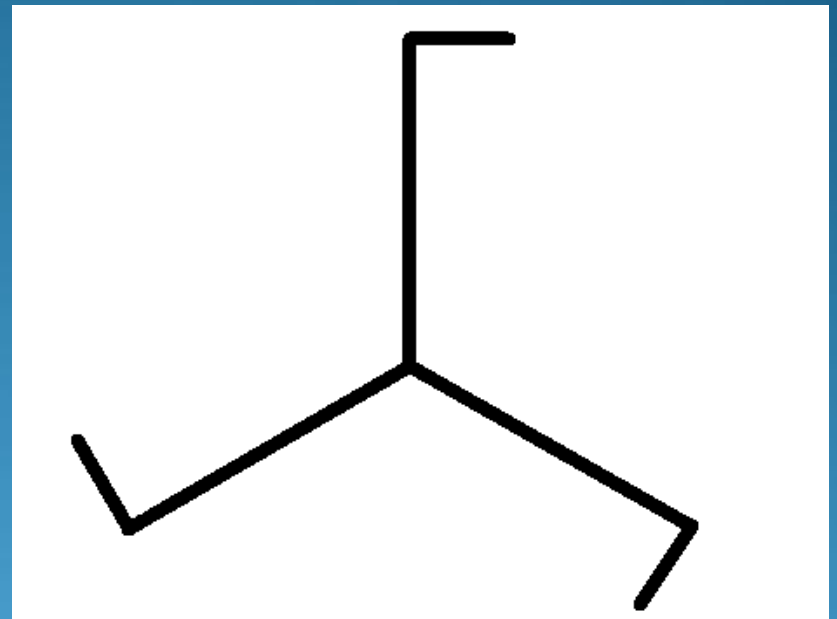
Teorema di Leonardo

Un gruppo finito di isometrie nel piano è un gruppo ciclico C_n o un gruppo diedrale D_n .

Gruppi finiti 2D



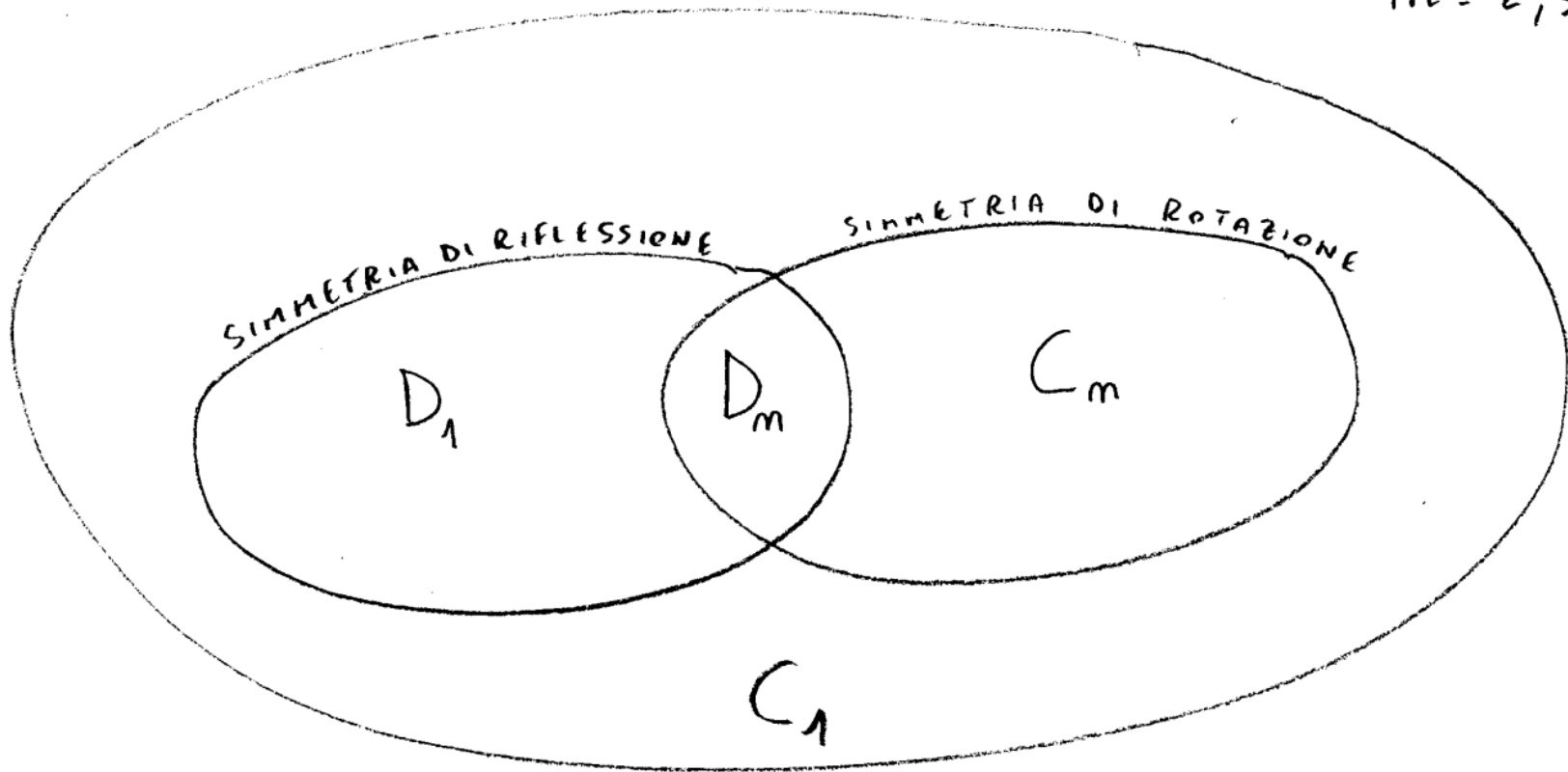
D_3 gruppo diedrale



C_3 gruppo ciclico

ROSONI

$$m = 2, 3, 4, \dots$$



Simmetria delle lettere



Simmetria delle lettere

Lavoro in piccoli gruppi

- Determinare la simmetria delle lettere in legno.
- Compilare le schede.

Lavoro a gruppo unico

- Collocare le lettere nel diagramma di Venn.
- Discussione finale.

LETTERA



RIFLESSIONE

È simmetrica perché se
traccio l'asse di simmetria
e sovrappongo le 2 parti è
uguale

ROTAZIONE

Non è simmetrica

Lettera

N 0°

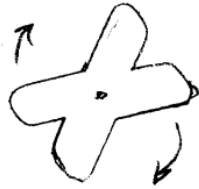
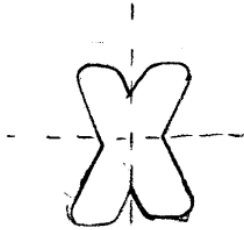
N 0°

N 180°

Riflessione
Non è simmetrica

Rotazione
 \neq Simmetrica

LETTERA



RIFLESSIONE

E' SIMMETRICA 2 ASSI

ROTAZIONE

E' SIMMETRICA DI 180°

LETTERA

G

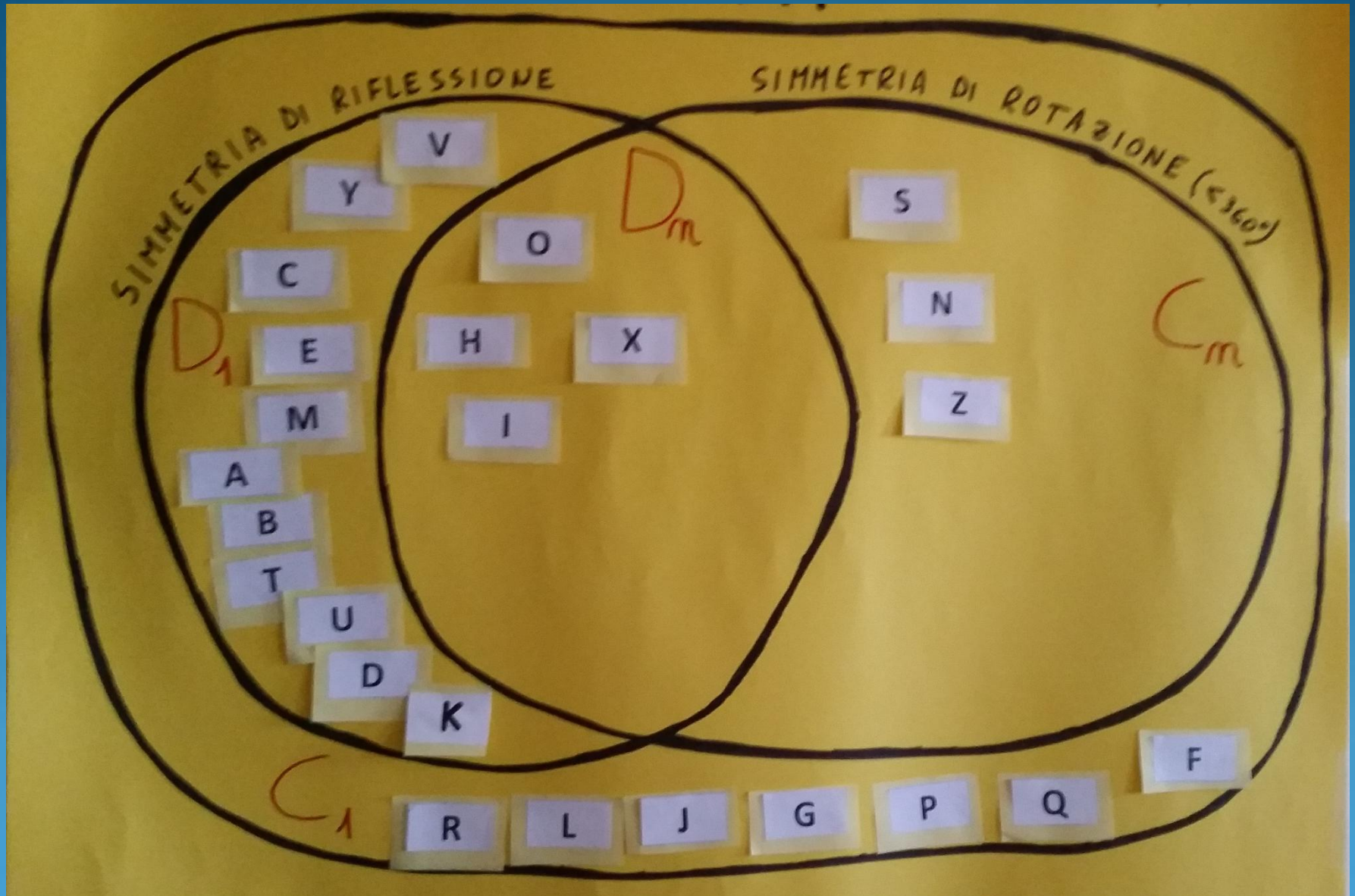
RIFLESSIONE

NON È SIMMETRICA PERCHÉ SE SI
DIVIDE O ORIZZONTALMENTE O VERTICALMENTE
NON È UGUALE

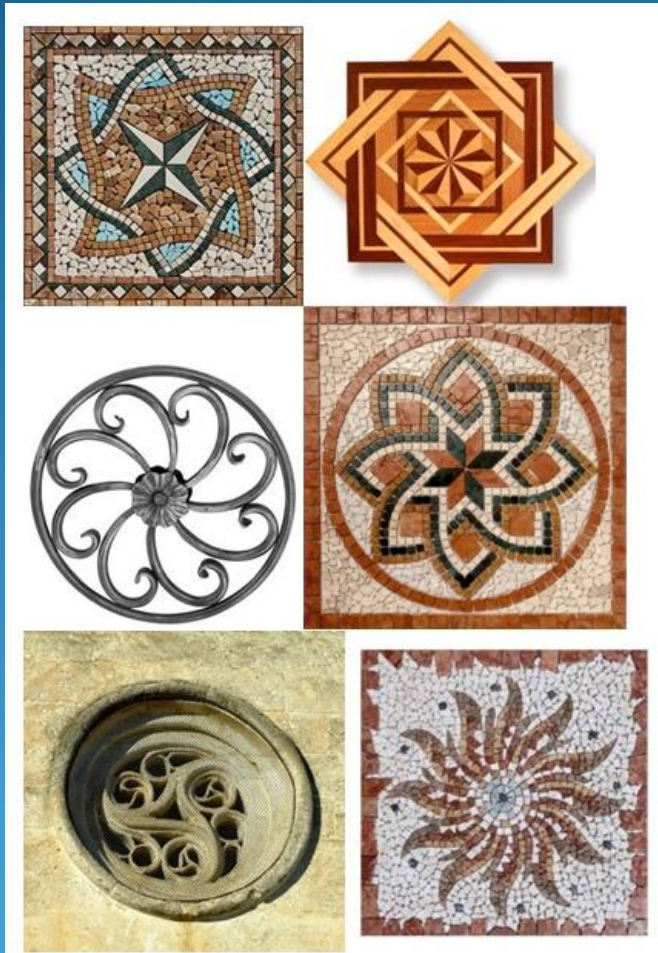
ROTAZIONE

NON È SIMMETRICA PERCHÉ SE LA SI
GIRA NON È UGUALE

Simmetria delle lettere



Simmetria dei rosoni



Simmetria dei rosoni

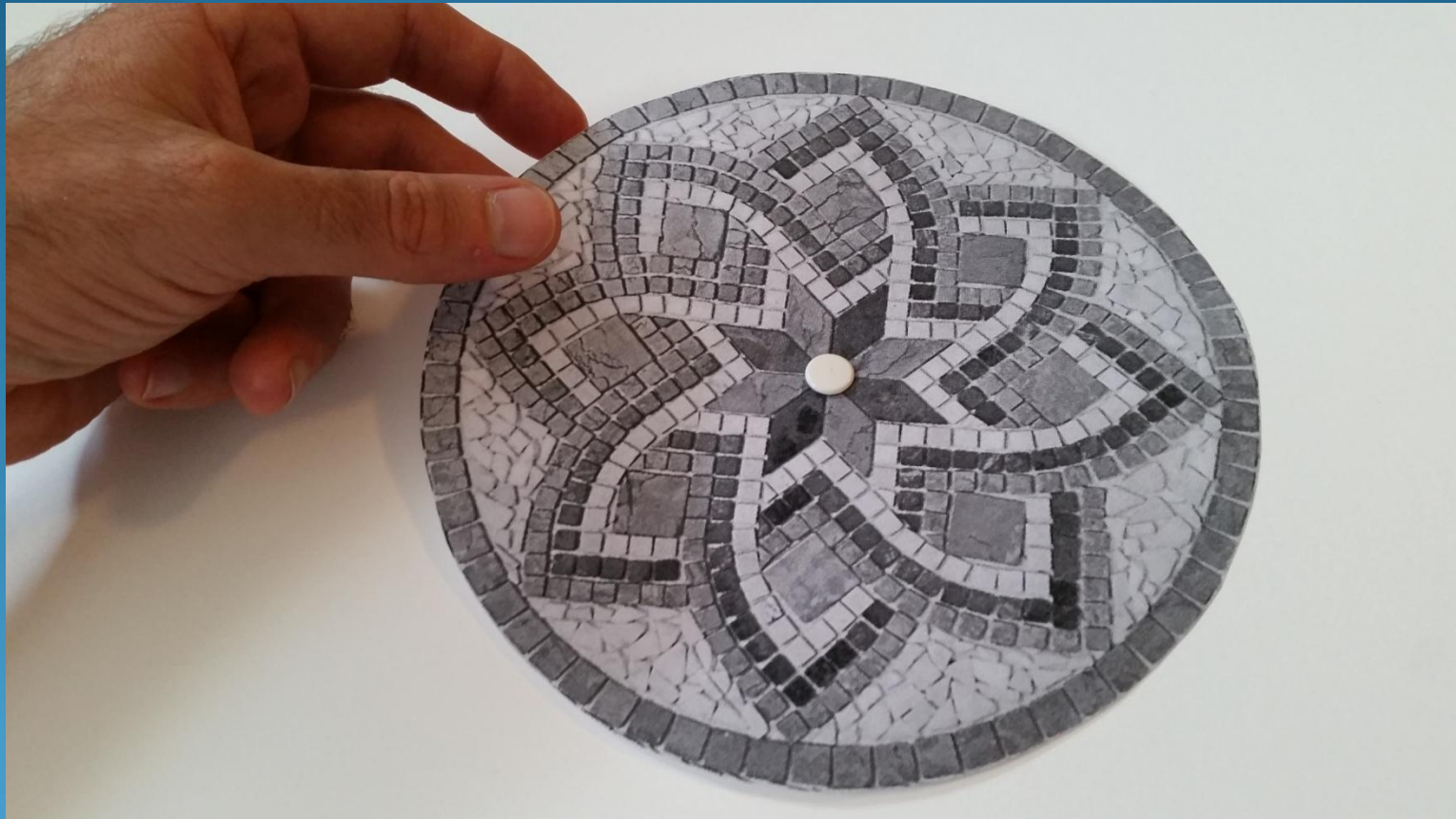
Lavori in piccoli gruppi

- Sperimentare la simmetria.
- Disegnare la simmetria.
- Compilare le schede.
- Un lavoro fatto “con le nostre mani”.

Lavori a gruppo unico

- Collocare le lettere nel diagramma di Venn.
- Discussione finale.

Sperimentare la simmetria dei rosoni



Sperimentare la simmetria dei rosoni



Sperimentare la simmetria dei rosoni



Sperimentare la simmetria dei rosoni



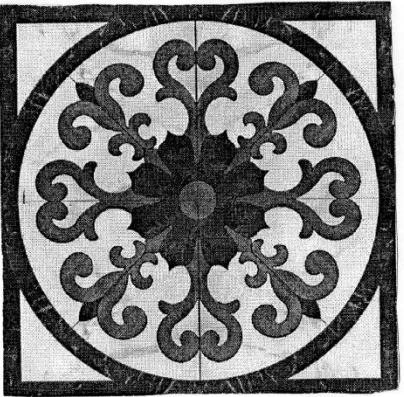
Disegnare la simmetria dei rosoni



Disegnare la simmetria dei rosoni



Simmetria dei rosoni

<p>D_4</p>	<p>SIMMETRIA di RIFLESSIONE</p> <p><input checked="" type="radio"/> SI / <input type="radio"/> NO</p>
	<p>SIMMETRIA di ROTAZIONE</p> <p><input checked="" type="radio"/> SI / <input type="radio"/> NO</p>
	<p>GRADI DI ROTAZIONE</p> <p>90°</p>

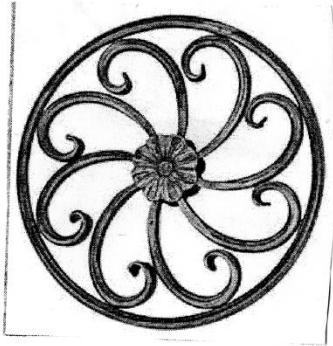
Simmetria dei rosoni

Rosone

D_8

Simmetria di riflessione

Sì / NO



Simmetria di rotazione

Sì / No

Gradi di
Rotazione

45°

Simmetria dei rosoni

Figura

Di



Simmetria
di riflessione

Si

Simmetria di
rotazione

NO

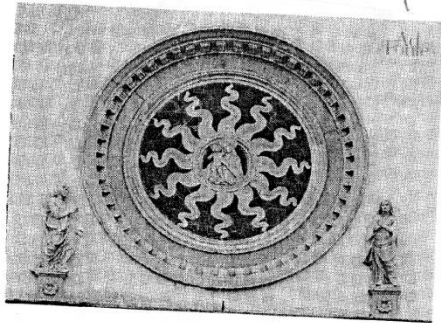
Gradi di rotazione

No

022907
ini x6290
0x01k0u6

Simmetria dei rosoni

ROSONE



SIMMETRIA DI RIFLESSIONE

SI/NO

SIMMETRIA DI ROTAZIONE

SI/NO

GRADO DI ROTAZIONE

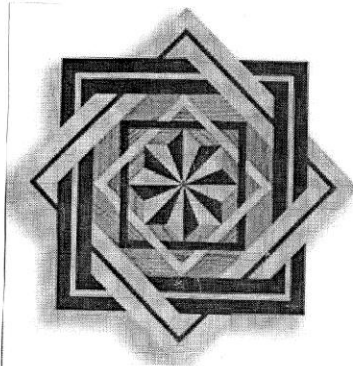
360° NON SI PUO' RUOTARE PER COLLA
DELLA FIGURA AL CENTRO

Simmetria dei rosoni

Gruppo

C_4

Immagine



E' simmetrico per riflessione?

Sì

☐

No



Se sì, disegna gli assi di riflessione.

E' simmetrico per rotazione? ($< 360^\circ$)

Sì



No

☐

Se sì, indica l'angolo di rotazione in gradi:

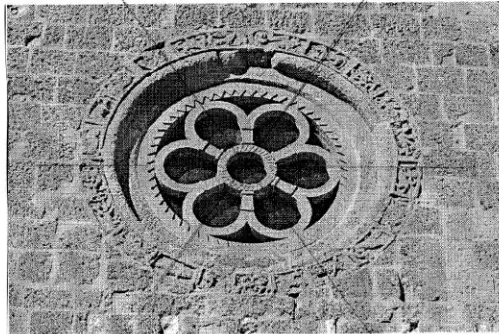
..... 90°

Simmetria dei rosoni

Gruppo

D_6

Immagine



E' simmetrico per riflessione?

Sì



No



Se sì, disegna gli assi di riflessione.

E' simmetrico per rotazione? ($< 360^\circ$)

Sì



No



Se sì, indica l'angolo di rotazione in gradi:

60°

ROSONI

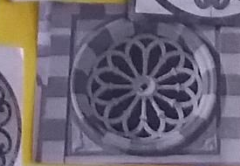
$$n = 2, 3, \dots$$

SIMMETRIA DI RIFLESSIONE

SIMMETRIA DI ROTAZIONE ($< 360^\circ$)

$$D_m$$
 C_m D_1

C₁



Rosoni fatti “a mano”

Lavoro in piccoli gruppi:

- Ad ogni gruppo (di lavoro) si assegna un gruppo (di simmetria) es. C_4 , C_6 , C_8 , D_4 , D_6 ; D_8 (meglio evitare i dispari, perché sono più difficili da disegnare).
- Su un foglio grande (almeno A2) si chiede di disegnare rosoni della simmetria assegnata usando le mani (ricoperte da guanti monouso) intrise di colore .

Lavoro a gruppo unico:

- Ogni gruppo illustra agli altri il suo “manufatto”.
- Discussione finale.

Simmetria dei fregi



Simmetria dei fregi

Lavoro in piccoli gruppi:








- Sette gruppi: ogni gruppo (di lavoro) un gruppo (di simmetria).
- Costruire la simmetria.
- Compilare le schede.
- Un lavoro fatto “con i piedi”.

Lavoro a gruppo unico:

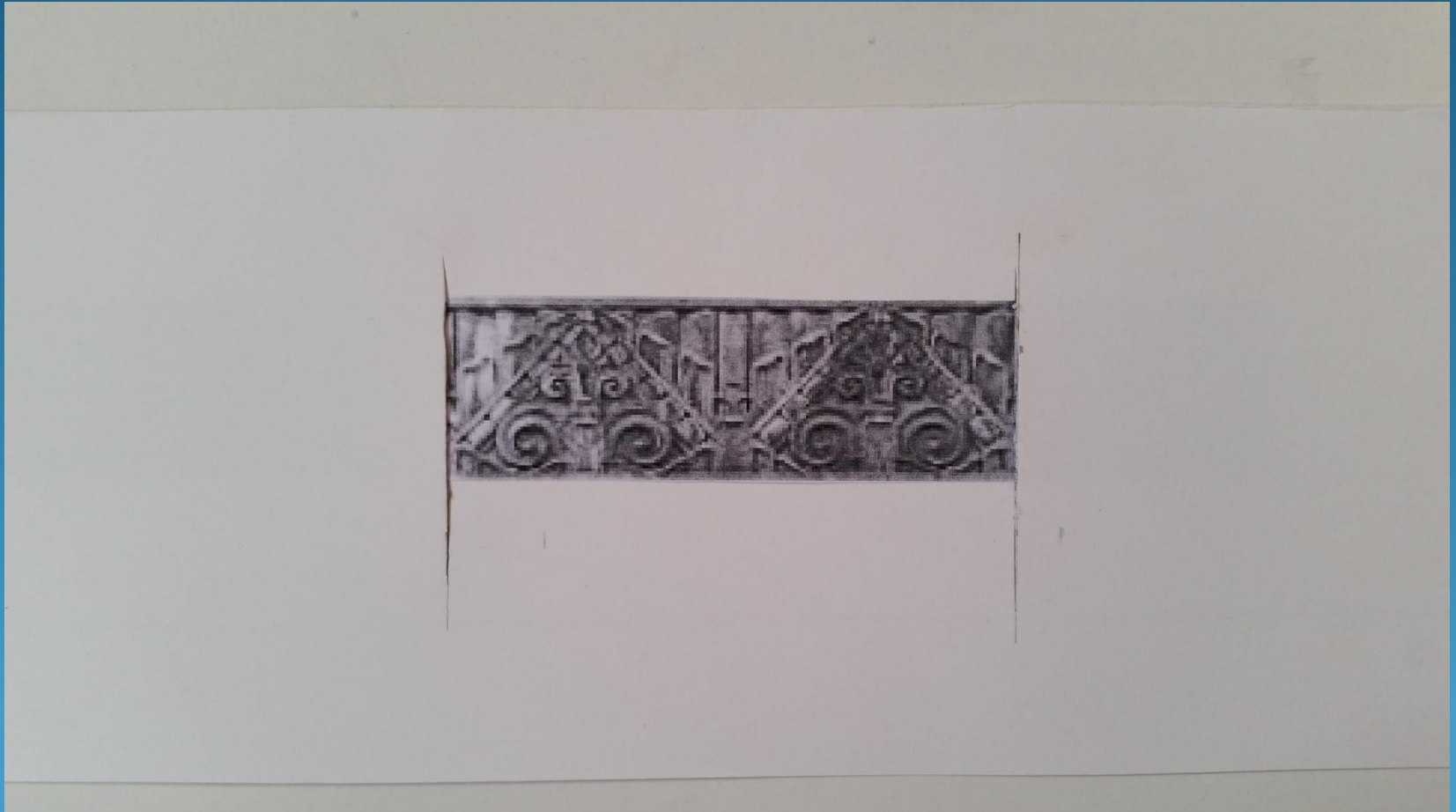
- Ed ora saltiamoci sopra!
- Discussione finale.

Teorema (Chasles, 1837)

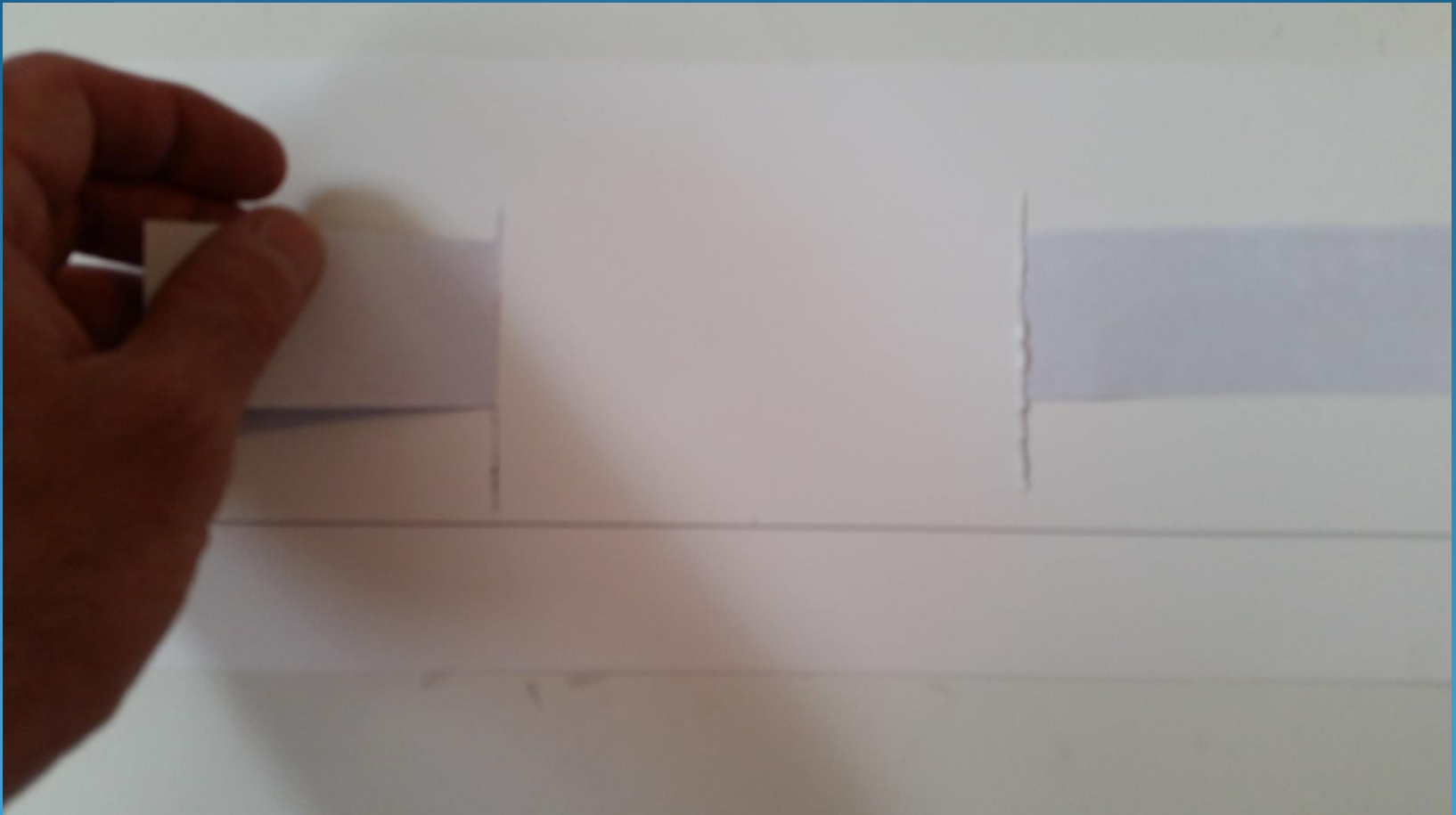
Ogni simmetria del piano è una traslazione, una rotazione, una riflessione o una glissoriflessione. Le traslazioni e le rotazioni non alterano la orientazione delle figure (sono *pari*, o *destrosc*), le riflessioni e le glissoriflessioni sono isometrie *dispari*, o *sinistrese*. Solo le riflessioni e le rotazioni hanno punti fissi.

p111 (hop)	solo traslazione	
p1a1 (step)	traslazione e glissoriflessione	
p1m1 (jump)	traslazione, riflessione rispetto ad un asse orizzontale, e glissoriflessione	
pm11 (sidle)	traslazione e riflessione rispetto ad un asse verticale	
p112 (dizzy hop)	traslazione e rotazione di 180°	
pma2 (dizzy sidle)	traslazione, rotazione 180°, riflessione con asse verticale, glissoriflessione	
pmm2 (dizzy jump)	traslazione, rotazione 180°, riflessione con asse orizzontale, riflessione con asse verticale, glissoriflessione	

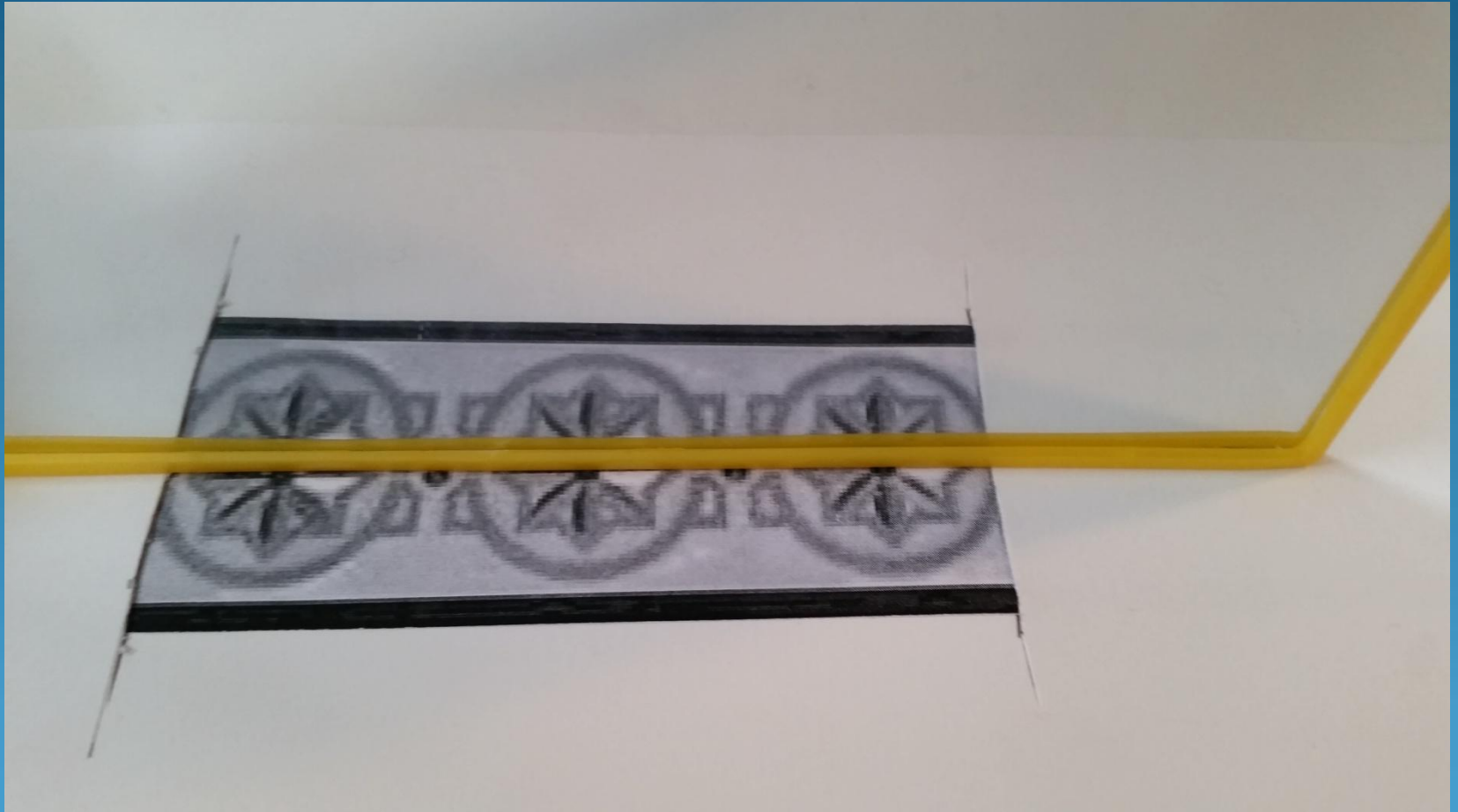
Sperimentare la simmetria dei fregi



Sperimentare la simmetria dei rosoni



Sperimentare la simmetria dei rosoni



Gruppo

$Pmm2$

Simbolo

Immagine

P

E' simmetrico per traslazione? Sì ☒ No ☐

m

E' simmetrico per riflessione rispetto ad assi trasversali (perpendicolari alla direzione di sviluppo all'infinito)?

Sì



No



m

E' simmetrico per riflessione rispetto ad un asse longitudinale (asse nella direzione di sviluppo all'infinito)?

Sì



No



2

E' simmetrico per rotazione? ($=180^\circ$)

Sì



No



2

E' simmetrico per glissoriflessione?

Sì



No



Rappresentazioni a confronto

Fregi



Pmm 2 DIZZY JUMP

SIMMETRIA

TRASLAZIONE

(SI) NO

RIFLESSIONE ORIZZONTALE

(SI) NO

RIFLESSIONE VERTICALE

(SI) NO

ROTAZIONE

(SI) NO

GLISSORIFLESSIONE

(SI) NO

Gruppo

$Pm11$

Simbolo

Immagine

P

E' simmetrico per traslazione? Sì ☒ No ☐

m

E' simmetrico per riflessione rispetto ad assi trasversali (perpendicolari alla direzione di sviluppo all'infinito)?

Sì



No



1

E' simmetrico per riflessione rispetto ad un asse longitudinale (asse nella direzione di sviluppo all'infinito)?

Sì



No



1

E' simmetrico per rotazione? ($=180^\circ$)

Sì



No



$/$

E' simmetrico per glissoriflessione?

Sì



No



Rappresentazioni a confronto

FREGI



pm 11 (sidle)

TRASLAZIONE

(SI)/NO

RIFLESSIONE ORIZZONTALE SI/(NO)

RIFLESSIONE VERTICALE (SI)/NO

ROTAZIONE SI/(NO)

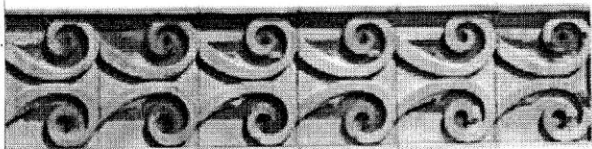
GLISSORIFLESSIONE SI/(NO)

Gruppo

$P1m1$

Simbolo

Immagine



P

E' simmetrico per traslazione? Sì ☒ No ☐

1

E' simmetrico per riflessione rispetto ad assi trasversali (perpendicolari alla direzione di sviluppo all'infinito)?

Sì ☐

No ☒

m

E' simmetrico per riflessione rispetto ad un asse longitudinale (asse nella direzione di sviluppo all'infinito)?

Sì ☒

No ☐

1

E' simmetrico per rotazione? ($=180^\circ$)

Sì ☐

No ☒

2

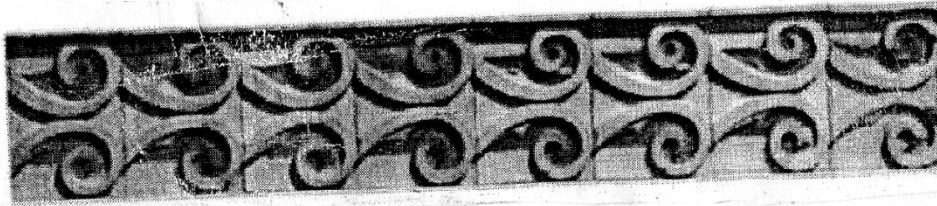
E' simmetrico per glissoriflessione?

Sì ☒

No ☐

Rappresentazioni a confronto

FREGIO



p1 m1
Jump

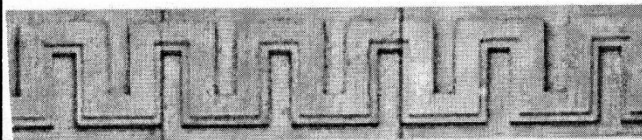
RIFLESSIONE ORIZZONTALE: SI
RIFLESSIONE VERTICALE: NO
ROTAZIONE: NO
GLISSORIFLESSIONE: SI

Gruppo

$Pm\bar{g}2$

Simbolo

Immagine



P

E' simmetrico per traslazione? Sì ☒ No ☐

m

E' simmetrico per riflessione rispetto ad assi trasversali (perpendicolari alla direzione di sviluppo all'infinito)?

Sì ☒ No ☐

$/$

E' simmetrico per riflessione rispetto ad un asse longitudinale (asse nella direzione di sviluppo all'infinito)?

Sì ☐ No ☒

2

E' simmetrico per rotazione? ($=180^\circ$)

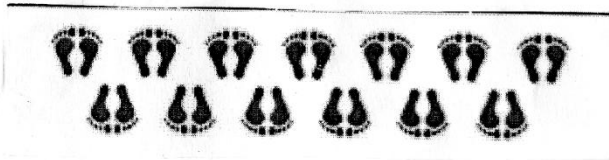
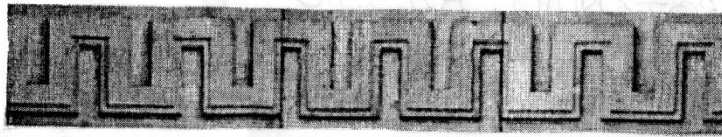
Sì ☒ No ☐

\bar{g}

E' simmetrico per glissoriflessione?

Sì ☒ No ☐

Rappresentazioni a confronto



pmaz dizzy sidle

Riflessione orizzontale:
si ☒ no

Riflessione verticale
☒ si no

Rotazione: ☒ si no

glissoriflessione:

☒ si ☒ no

Gruppo

P1g1

Simbolo

Immagine



P

E' simmetrico per traslazione? Sì ☒ No ☐

1

E' simmetrico per riflessione rispetto ad assi trasversali (perpendicolari alla direzione di sviluppo all'infinito)?

Sì ☐

No ☒

/

E' simmetrico per riflessione rispetto ad un asse longitudinale (asse nella direzione di sviluppo all'infinito)?

Sì ☐

No ☒

1

E' simmetrico per rotazione? (=180°)

Sì ☐

No ☒

g

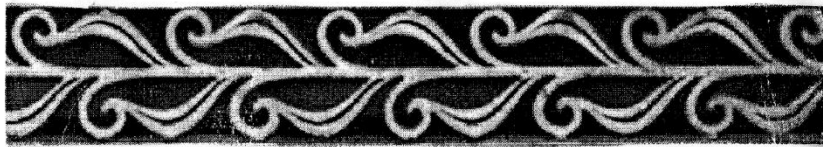
E' simmetrico per glissoriflessione?

Sì ☒

No ☐

Rappresentazioni a confronto

Fregio



$P \perp A_1$



Step

TRASLAZIONE
TRASLAZIONE SI
RIFLESSIONE ORIZZONTALE NO
RIFLESSIONE VERTICALE NO
ROTAZIONE ~~SI~~ NO
GLISSORIFLESSIONE ~~NO~~ SI

Gruppo

P112

Simbolo

Immagine

P

E' simmetrico per traslazione?

Sì



No



1

E' simmetrico per riflessione rispetto ad assi trasversali (perpendicolari alla direzione di sviluppo all'infinito)?

Sì



No



1

E' simmetrico per riflessione rispetto ad un asse longitudinale (asse nella direzione di sviluppo all'infinito)?

Sì



No



2

E' simmetrico per rotazione? ($=180^\circ$)

Sì



No



/

E' simmetrico per glissoriflessione?

Sì

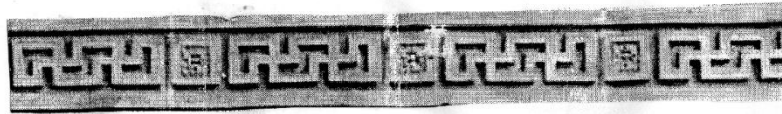


No



Rappresentazioni a confronto

Fregi



Dizzy hop

traslazione

SI

Riflessione Orizzontale

NO

Riflessione Verticale

NO

Rotazione

SI

Glissoriflessione

NO

Siglo = p112

Gruppo

P111

Simbolo

Immagine



P

E' simmetrico per traslazione? Sì ☒ No ☐

1

E' simmetrico per riflessione rispetto ad assi trasversali (perpendicolari alla direzione di sviluppo all'infinito)?

Sì ☐ No ☒

1

E' simmetrico per riflessione rispetto ad un asse longitudinale (asse nella direzione di sviluppo all'infinito)?

Sì ☐ No ☒

1

E' simmetrico per rotazione? ($=180^\circ$)

Sì ☐ No ☒

/

E' simmetrico per glissoriflessione?

Sì ☐ No ☒

Rappresentazioni a confronto



P121 - MOP

TRASLAZIONE ☒ SI

RIFLESSIONE ORIZZONTALE SI - ☒ NO

RIFLESSIONE VERTICALE SI - ☒ NO

ROTAZIONE ☒ SI - ☒ NO

QUI SORIFLESSIONE ☒ SI - ☒ NO

☒ SI - ☒ NO

Simmetria dei fregi ... con i piedi



Simmetria dei fregi ... con i piedi



Ed ora ... saltiamoci sopra!



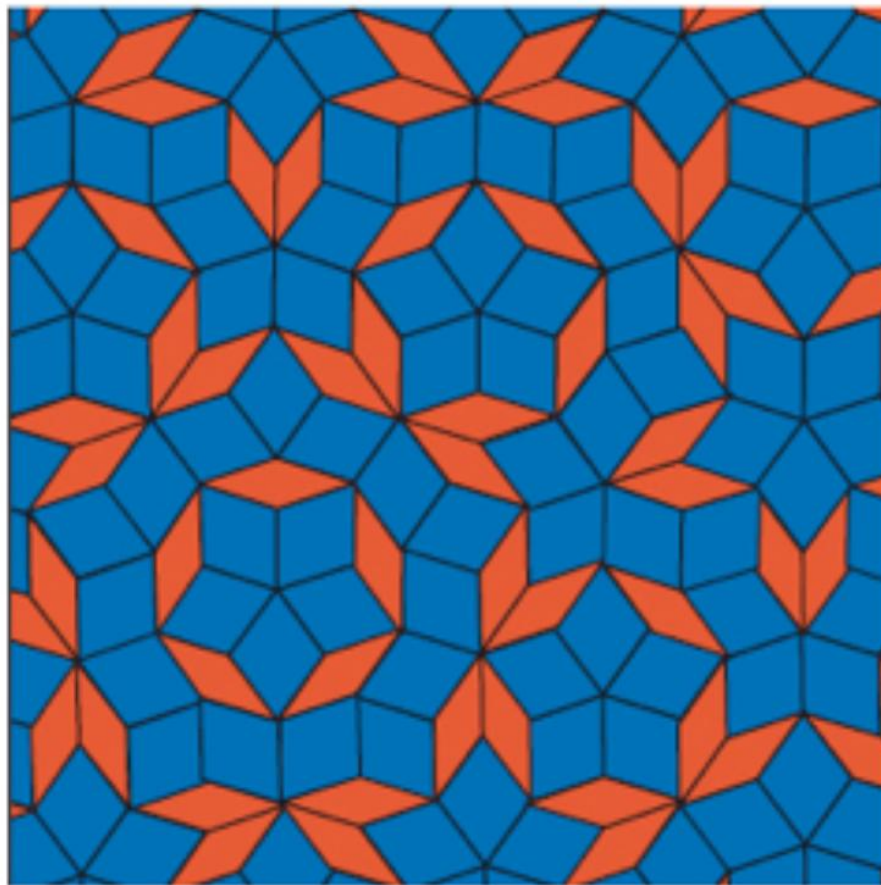
Ed ora ... saltiamoci sopra!





Ulteriori sviluppi

Tassellature



Ringraziamenti

Un ringraziamento speciale ad Andrea Bruno (Università di Roma Tre) per aver diretto e coordinato i lavori del gruppo "Simmetrie" del Corso "Con la Mente e con le Mani" presso L'Accademia Nazionale dei Lincei negli anni scolastici 2015/2016 e 2016/2017

E a voi per l'attenzione !

Le fonti

Bibliografia:

- P. Bellingeri, M.Dedò, S. Di Sieno, C.Turrini, *Il ritmo delle forme*, Mimesis, 2001
- H.Weyl, *La simmetria*, Feltrinelli, 1962
- R. Betti, E. Marchetti, L. R. Costa, *Simmetria. Una scoperta matematica*, Polipress, 2012
- I Stewart, *L'eleganza della verità*, Einaudi 2008,
- M. Du Sautoy, *Il disordine perfetto, L'avventura di un matematico nei segreti della simmetria*. BUR 2010
- J. Navarro, *Dall'altra parte dello specchio*, RBA, 2010
- Ida Sacchetti, *Caleidoscopio*, Tecnodid, 1993
- Armstrong M.A., *Groups and Symmetry*, Springer, 1988
- Caglioti G., *Simmetrie infrante, nella scienza e nell'arte*, Clup, Milano 1983
- Dedò M., *Forme. Simmetria e topologia*, Zanichelli, Bologna 1999
- Jablan S.V, *Teory of Symmetry and Ornaments*, Beograd Mat. Institut n. 17, 1995
- Lockwood E.H., Macmillan, R.H., *Geometric Symmetry*, Cambridge University Press, 1978

Le fonti

Sitografia:

<http://matematica.unibocconi.it/articoli/simmetria-e-matematica-1>

<http://www.biblio.unimib.it/upload/pag/1134/sl/slidesded.pdf>

<http://crf.uniroma2.it/piano-lauree-scientifiche/laboratori-di-matematica/2010-2011/gruppi>

<http://www.matematita.it>

<http://www.linceieistruzione.it/>

<http://www.uniroma3.it/>