

# Introduzione

**Problema.** Determina i lati di un rettangolo sapendo che il suo perimetro è 80 cm e l'area è 231 cmq.

Se di un rettangolo è noto il perimetro e l'area cosa fare per conoscere la lunghezza dei suoi lati (ci limitiamo al caso in cui questi siano espressi da numeri naturali in questo contesto)?

**Classe:** dalla prima media.

# La tavola pitagorica

Si consegna una tavola pitagorica per ragazzo o un gruppo di ragazzi: questi vengono invitati a scoprire “proprietà” della tavola

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

# La tavola pitagorica

Tra le varie proprietà scoperte, si sottolineerà quella relativa ai numeri della **diagonale**.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

# La tavola pitagorica

Successivamente si sottolineerà la presenza nella tavola di elementi “simmetrici”.

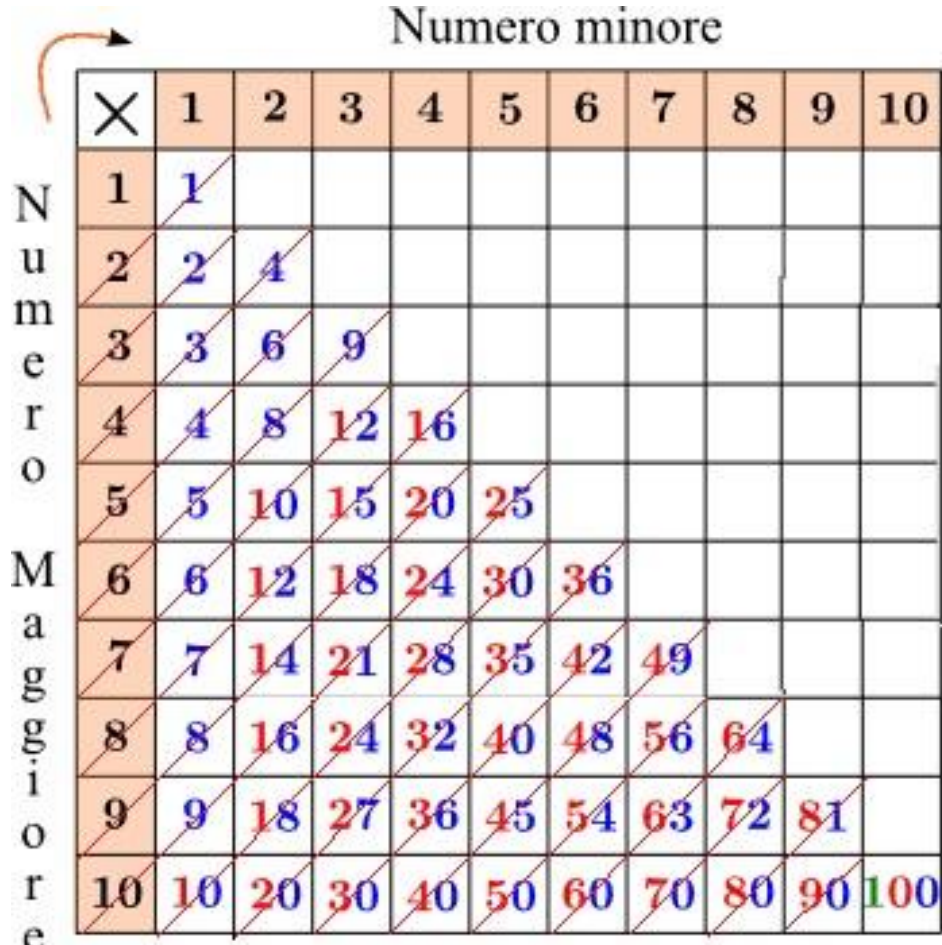
x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

# La tavola pitagorica

Tanto vale studiare  
una metà!

In ogni cella compare il  
prodotto riga per colonna;  
facciamo inserire anche le  
relative somme.

Numero minore



Numero maggiore	Numero minore	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1										
2	2	4									
3	3	6	9								
4	4	8	12	16							
5	5	10	15	20	25						
6	6	12	18	24	30	36					
7	7	14	21	28	35	42	49				
8	8	16	24	32	40	48	56	64			
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81		
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	

# Nuova tavola pitagorica: somma e prodotto

Si consegna la relativa tavola,  
chiedendo ai ragazzi di  
completarla (per ora fino alla  
cella 10 x 10)

12	s = p =	s = p =	s = p =	s = p =	s = p =	s = p =	s = p =	s = p =	s = p =	s = p =	s = p =	s = p =
11	s = p =	s = p =	s = p =	s = p =	s = p =	s = p =	s = p =	s = p =	s = p =	s = p =	s = p =	
10	s = p =	s = p =	s = p =	s = p =	s = p =	s = p =	s = p =	s = p =	s = p =	s = p =		
9	s = p =	s = p =	s = p =	s = p =	s = p =	s = p =	s = p =	s = p =	s = p =			
8	s = p =	s = p =	s = p =	s = p =	s = p =	s = p =	s = p =	s = p =				
7	s = p =	s = p =	s = p =	s = p =	s = p =	s = p =	s = p =					
6	s = p =	s = p =	s = p =	s = p =	s = p =	s = p =						
5	s = p =	s = p =	s = p =	s = p =	s = p =							
4	s = p =	s = p =	s = p =	s = p =								
3	s = p =	s = p =	s = p =									
2	s = p =	s = p =										
1	s = p =											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

Dopo essere stata completata, può essere fatta colorare per evidenziare altre proprietà sulle quali far riflettere.

10	s = 11 p = 10	s = 12 p = 20	s = 13 p = 30	s = 14 p = 40	s = 15 p = 50	s = 16 p = 60	s = 17 p = 70	s = 18 p = 80	s = 19 p = 90	s = 20 p = 100
9	s = 10 p = 9	s = 11 p = 18	s = 12 p = 27	s = 13 p = 36	s = 14 p = 45	s = 15 p = 54	s = 16 p = 63	s = 17 p = 72	s = 18 p = 81	
8	s = 9 p = 8	s = 10 p = 16	s = 11 p = 24	s = 12 p = 32	s = 13 p = 40	s = 14 p = 48	s = 15 p = 56	s = 16 p = 64		
7	s = 8 p = 7	s = 9 p = 14	s = 10 p = 21	s = 11 p = 28	s = 12 p = 35	s = 13 p = 42	s = 14 p = 49			
6	s = 7 p = 6	s = 8 p = 12	s = 9 p = 18	s = 10 p = 24	s = 11 p = 30	s = 12 p = 36				
5	s = 6 p = 5	s = 7 p = 10	s = 8 p = 15	s = 9 p = 20	s = 10 p = 25					
4	s = 5 p = 4	s = 6 p = 8	s = 7 p = 12	s = 8 p = 16						
3	s = 4 p = 3	s = 5 p = 6	s = 6 p = 9							
2	s = 3 p = 2	s = 4 p = 4								
1	s = 2 p = 1									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

# Ricerca delle strutture stabili

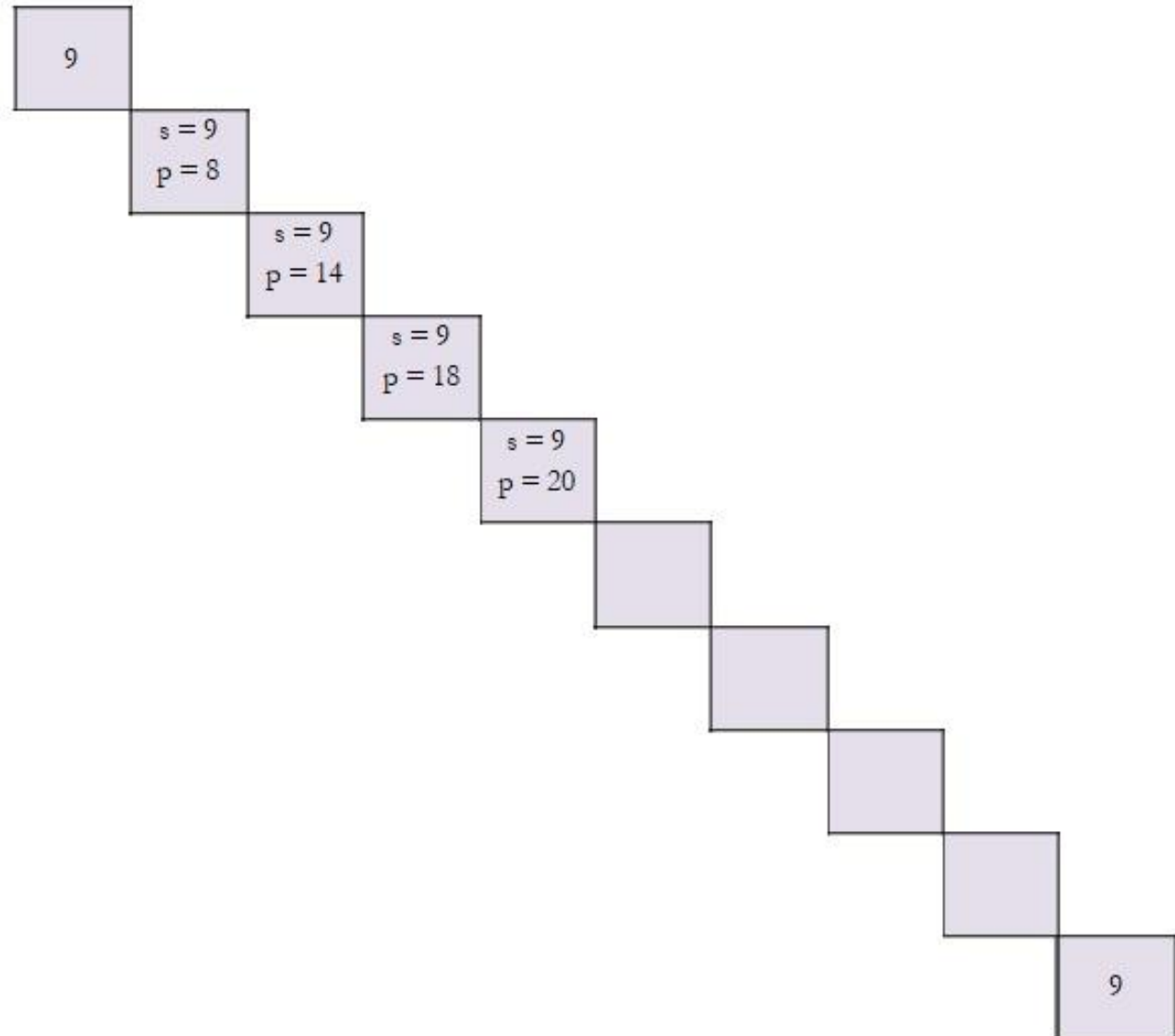
- 1) Ogni diagonale colorata (letta da sinistra a destra) inizia in una riga e termina in una colonna il cui numero coincide con la somma riportata in ciascuna cella;



# Ricerca delle strutture stabili

Esempio

$s = 9$



# Ricerca delle strutture stabili

2) Qualunque cella si consideri contenente una certa somma, apparterrà ad una specifica diagonale costituita da un numero finito di celle.

Questo vuol dire che esiste un numero **finito** di coppie di numeri naturali la cui somma sia uguale sempre ad  $s$ .

# Ricerca delle strutture stabili

3) ....e quindi un numero **finito** di coppie di numeri naturali il cui prodotto sia uguale a  $p$ .

# Esempio

**Se  $s = 10$  i possibili prodotti sono:**

**$a = 9; b = 1$  quindi  $ab = 9$**

**$a = 8; b = 2$  quindi  $ab = 16$**

**$a = 7; b = 3$  quindi  $ab = 21$**

**$a = 6; b = 4$  quindi  $ab = 24$**

**$a = 5; b = 5$  quindi  $ab =$**

**Se  $s = 11$  i possibili prodotti sono:**

**$a = 10; b = 1$  quindi  $ab = 10$**

**$a = 9; b = 2$  quindi  $ab = 18$**

**$a = 8; b = 3$  quindi  $ab = 24$**

**$a = 7; b = 4$  quindi  $ab = 28$**

**$a = 6; b = 5$  quindi  $ab = 30$**

Se la somma è  $s = 10$  ci sono 5 coppie di numeri la cui somma sia 10; così pure se la somma sia  $s = 11$ . Quindi, in entrambi i casi, si possono avere un massimo di 5 prodotti.

A questo punto ritornare alla tavola consegnata e far completare le celle vuote, per verificare se la congettura è ancora valida.

# Ricerca di strutture stabili

Quante sono queste coppie di numeri naturali  
la cui somma sia  $s$ ?

Si vuole arrivare a comprendere che se la  
somma tra due numeri sia  $s$  (pari o dispari), i  
possibili prodotti sono  $\text{int}(s/2)$ .

Come?

# Ricerca di strutture stabili

Partendo da due file uguali di pedine (10), spostando una pedina alla volta da una fila all'altra, si evidenziano il numero massimo di coppie possibili. Queste saranno sempre date in numero dalla metà di  $s$ , essendo il massimo del numero degli spostamenti possibili.



# Abbiamo trovato una struttura stabile

Formalmente, data una somma  $s$ , le possibile coppie di numeri  $a$  e  $b$  che sommate danno  $s$  sono:

$$a = 1 \qquad b = s-1$$

$$a = 2, \qquad b = s-2$$

.....

$$a = s/2, \qquad b = s/2$$

se  $s$  è pari

oppure

$$a = \text{int}(s/2) , b = \text{int}(s/2) + 1$$

se  $s$  è dispari

essendo  $\text{int}(s/2)$  la parte intera del quoziente tra  $s$  e 2.



La tavola, dunque, è utile per risolvere problemi del tipo:

Determina i lati di un rettangolo sapendo che il suo perimetro è 22 cm e l'area è 30 cmq.

Basta prendere nella tavola la riga corrispondente alla somma 11, cercare nella relativa diagonale che termina nella colonna 11, la cella corrispondente che abbia come prodotto 30.

Risalendo alla riga e alla colonna corrispondente troveremo 6 e 5 che sono i due numeri cercati.

Come usare la tavola per risolvere il problema iniziale?

**Problema.** Determina i lati di un rettangolo sapendo che il suo perimetro è 80 cm e l'area è 231cmq.

# Somma e prodotto

Problemi di questo tipo possono avvicinare gli studenti alla teoria dei numeri: si tratta di analizzare comunque un numero **finito** di casi.

Tuttavia al crescere della somma  $s$ , i casi da analizzare crescono sempre di più; pertanto si può far realizzare:

- 1) Grossa tavola da appendere fatta dalla classe (ogni gruppo partecipa per realizzarne una parte);
- 2) Tavola personale per ogni ragazzo appositamente realizzata;

# Somma e prodotto

3) Un foglio di calcolo implementato al computer.

La tecnologia infatti ci permette di svolgere un enorme quantitativo di calcoli anche difficili e a volte, a causa della loro ripetizione, noiosi. Questi sono due validi argomenti a sostegno dell'introduzione delle tecnologie informatiche nelle attività didattiche.

# Somma e prodotto

Tuttavia occorre conoscere dettagliatamente:

- 1) un linguaggio tecnico attraverso il quale “comunicare” con la macchina
- 2) le corrette istruzioni in modo tale che la macchina esegua esattamente cosa vogliamo.

# Somma e prodotto: foglio di calcolo

Siano  $a$  e  $b$  due numeri naturali,  $s$  è la loro somma  $p$  il loro prodotto.

Nella cella A2 verrà indicata (input) la somma  $s$  considerata;

Nella colonna B i valori del primo numero " $a$ " da 1 fino al numero corrispondente alla parte intera della metà di " $s$ ";

Nella colonna C si visualizzeranno tutti i numeri da " $s-1$ " fino a quando, all'aumentare di " $a$ ", si avrà " $s - a$ " maggiore della parte intera di " $s/2$ ";

Nella Colonna D comparirà il prodotto " $ab$ ".

	A	B	C	D
1	$s = a+b$	$a$	$b = s-a$	$p = ab$

# Somma e prodotto: foglio di calcolo

Seconda riga:

- cella A2 di input, digitare somma (nell'esempio 33);
- cella B2, si digita 1;
- cella C2 verrà digitato: `=SE(E(A$2-B2>= A$2/2 ;B2<>0);A$2-B2;0)`
  - il cui significato è il seguente: se il contenuto della cella A2 meno quello della cella B2 è maggiore o uguale a quello contenuto in A2 diviso 2 e contemporaneamente il contenuto di B2 è diverso da zero allora stampa il valore  $A2 - B2$ ; in caso contrario stampa 0;
- Cella D2 verrà digitato `=(B2*C2)`,  
che permetterà di visualizzare la moltiplicazione dei valori contenuti nella cella B2 e C2.

	A	B	C	D
1	s = a+b	a	b = s-a	p = ab
2	33	1	=SE(E(A\$2-B2>= A\$2/2 ;B2<>0);A\$2-B2;0)	=B2*C2



# Somma e prodotto: foglio di calcolo

Terza riga:

- cella B3 si digita `=SE(E(B2<INT(A$2/2);B2<>0);B2+1;0)`

Il cui significato è il seguente: se il valore contenuto nella cella B2 è minore della parte intera di quello di A2 diviso 2 e contemporaneamente diverso da zero, stampa il valore di B2 incrementato di 1, altrimenti stampa 0.

- cella C3, `=SE(E(A$2-B3>=A$2/2;B3<>0);A$2-B3;0)`

- Il cui significato è identico a quello della cella C2 visto prima;

- in D3 si digiterà `=(B3*C3)` che ha lo stesso significato visto prima.

	A	B	C	D
1	s = a+b	a	b = s-a	p = ab
2	33	1	=SE(E(A\$2-B2>=A\$2/2 ;B2<>0);A\$2-B2;0)	=B2*C2
3		=SE(E(B2<INT(A\$2/2);B2<>0);B2+1;0)	=SE(E(A\$2-B3>=A\$2/2;B3<>0);A\$2-B3;0)	=B3*C3

# Somma e prodotto: foglio di calcolo

Dalla quarta riga in poi:

Si copia l'intera terza riga, si selezionano un certo numero di righe sotto di questa, per poi incollare il suo contenuto. Si nota che i valori numerici relativi alle righe che compaiono nelle istruzioni appena digitati s'incrementano di 1 a meno che non sia stato digitato davanti ad essi il simbolo "\$" che blocca tale incremento.

Quarta riga in poi: da qui in avanti copio e incollo!!!

	A	B	C	D
1	s = a+b	a	b = s-a	p = ab
2	33	1	=SE(E(A\$2-B2>=A\$2/2 ;B2<>0);A\$2-B2;0)	=B2*C2
3		=SE(E(B2<INT(A\$2/2);B2<>0);B2+1;0)	=SE(E(A\$2-B3>=A\$2/2;B3<>0);A\$2-B3;0)	=B3*C3
4		=SE(E(B3<INT(A\$2/2);B3<>0);B3+1;0)	=SE(E(A\$2-B4>=A\$2/2;B4<>0);A\$2-B4;0)	=B4*C4
5		=SE(E(B4<INT(A\$2/2);B4<>0);B4+1;0)	=SE(E(A\$2-B5>=A\$2/2;B5<>0);A\$2-B5;0)	=B5*C5
6		=SE(E(B5<INT(A\$2/2);B5<>0);B5+1;0)	=SE(E(A\$2-B6>=A\$2/2;B6<>0);A\$2-B6;0)	=B6*C6
7		=SE(E(B6<INT(A\$2/2);B6<>0);B6+1;0)	=SE(E(A\$2-B7>=A\$2/2;B7<>0);A\$2-B7;0)	=B7*C7
8		=SE(E(B7<INT(A\$2/2);B7<>0);B7+1;0)	=SE(E(A\$2-B8>=A\$2/2;B8<>0);A\$2-B8;0)	=B8*C8
9		=SE(E(B8<INT(A\$2/2);B8<>0);B8+1;0)	=SE(E(A\$2-B9>=A\$2/2;B9<>0);A\$2-B9;0)	=B9*C9
10		=SE(E(B9<INT(A\$2/2);B9<>0);B9+1;0)	=SE(E(A\$2-B10>=A\$2/2;B10<>0);A\$2-B10;0)	=B10*C10
11		=SE(E(B10<INT(A\$2/2);B10<>0);B10+1;0)	=SE(E(A\$2-B11>=A\$2/2;B11<>0);A\$2-B11;0)	=B11*C11
12		=SE(E(B11<INT(A\$2/2);B11<>0);B11+1;0)	=SE(E(A\$2-B12>=A\$2/2;B12<>0);A\$2-B12;0)	=B12*C12
13		=SE(E(B12<INT(A\$2/2);B12<>0);B12+1;0)	=SE(E(A\$2-B13>=A\$2/2;B13<>0);A\$2-B13;0)	=B13*C13
14		=SE(E(B13<INT(A\$2/2);B13<>0);B13+1;0)	=SE(E(A\$2-B14>=A\$2/2;B14<>0);A\$2-B14;0)	=B14*C14
15		=SE(E(B14<INT(A\$2/2);B14<>0);B14+1;0)	=SE(E(A\$2-B15>=A\$2/2;B15<>0);A\$2-B15;0)	=B15*C15
16		=SE(E(B15<INT(A\$2/2);B15<>0);B15+1;0)	=SE(E(A\$2-B16>=A\$2/2;B16<>0);A\$2-B16;0)	=B16*C16
17		=SE(E(B16<INT(A\$2/2);B16<>0);B16+1;0)	=SE(E(A\$2-B17>=A\$2/2;B17<>0);A\$2-B17;0)	=B17*C17

	A	B	C	D
1	s = a+b	a	b = s-a	p = ab
2	33	1	32	32
3		2	31	62
4		3	30	90
5		4	29	116
6		5	28	140
7		6	27	162
8		7	26	182
9		8	25	200
10		9	24	216
11		10	23	230
12		11	22	242
13		12	21	252
14		13	20	260
15		14	19	266
16		15	18	270
17		16	17	272

# Somma e prodotto: foglio di calcolo

Digitando un valore nella cella A2, immediatamente si ottengono tutte le soluzioni intere (positive) del problema dato.

# Problema iniziale

**Problema.** Determina i lati di un rettangolo sapendo che il suo perimetro è 80 cm e l'area è 231cmq.

Si inserisce nella cella A2 il valore 40 e.....

# Problema iniziale

...per avere immediatamente  
che i valori cercati sono 3 e 77 .

Pertanto la base e l'altezza del  
rettangolo sono 3 cm e 77 cm (o  
viceversa naturalmente).

	A	B	C	D
1	$s = a+b$	$a$	$b = s-a$	$p = ab$
2	40	1	39	39
3		2	38	76
4		3	37	111
5		4	36	144
6		5	35	175
7		6	34	204
8		7	33	231
9		8	32	256
10		9	31	279
11		10	30	300
12		11	29	319
13		12	28	336
14		13	27	351
15		14	26	364
16		15	25	375
17		16	24	384
18		17	23	391
19		18	22	396
20		19	21	399
21		20	20	400
22		0	0	0