Introduzione: il metodo che fa uso delle tabelle o di un foglio di calcolo è inutile se si ha a che fare con un sistema che ammetta soluzioni non intere. Qui di seguito viene presentata una proposta didattica che rimedia a questo problema.

Prerequisiti: area dei poligoni, conoscenza dei radicali quadratici ed estrazione di radice quadrata.

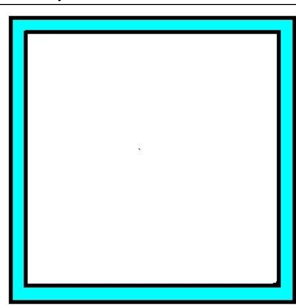
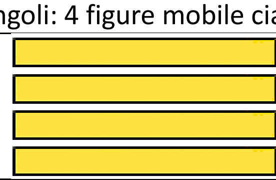
Classe: seconda parte della seconda media oppure terza media.

In questo contesto le grandezze in gioco non saranno più necessariamente intere anche se continueranno ad essere considerate positive.

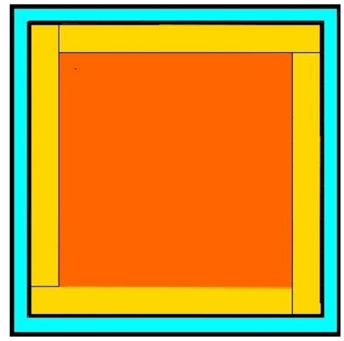
Si consideri allora il problema con le seguenti notazioni più familiari agli studenti:

$$\begin{cases} b + h = s \\ bh = p \end{cases}$$

Per risolvere il problema si consegna il seguente materiale.

Cornice quadrata : base di area Q	Quadrato : figura mobile di area q
	
Quattro rettangoli: 4 figure mobile ciascuna di area R	
	

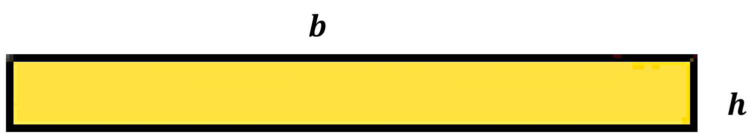
Domanda: inserisci le figure mobili all'interno della base in modo tale che entrino perfettamente senza lasciare spazi liberi e senza sovrapposizioni ($Q = q + 4R$).

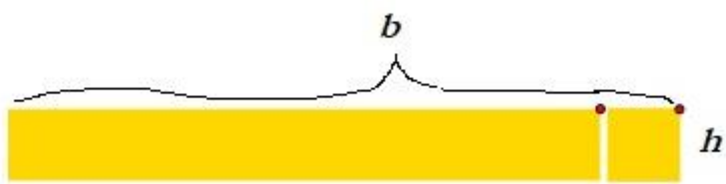


Si troverà una sola disposizione che risolve il problema dato.
Si chiederà subito dopo di determinare le relazioni sussistenti le figure date.

Ad esempio: è chiaro che la differenza tra la base del rettangolo giallo e il lato del quadrato arancio è pari all'altezza del rettangolo stesso? Oppure che la differenza tra il lato del quadrato della base e la base del rettangolo giallo è sempre dato dalla sua altezza?

Ecco che la consegna di un nuovo materiale possa essere di aiuto per tutti: si sostituisce il rettangolo giallo di base b ed altezza h con un nuovo rettangolo di dimensioni $b - h$ ed h ed un quadrato di lato h.

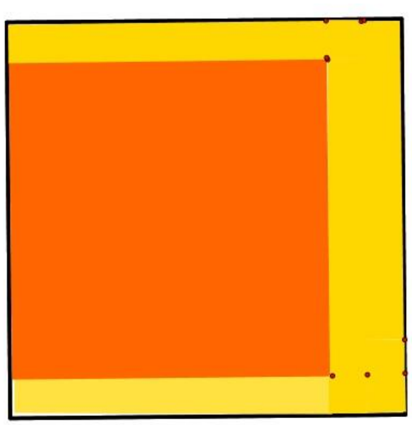


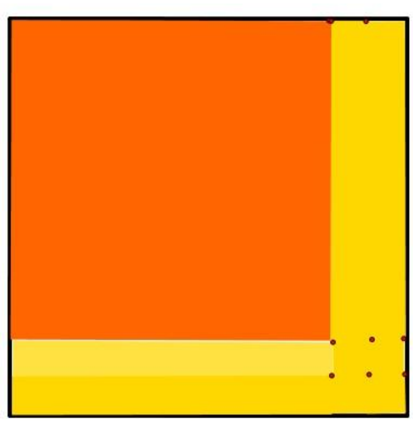


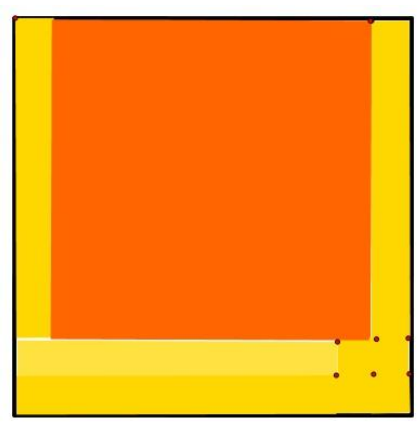
Si ripropone la precedente questione:

Domanda: inserisci le figure mobili all'interno della base in modo tale che entrino perfettamente senza lasciare spazi liberi e senza sovrapposizioni.

Sarà evidente che, con il nuovo materiale, il numero delle soluzioni corrette crescerà notevolmente.







Inoltre risulterà a questo punto altresì evidente che la base avrà lato $b + h$, il quadrato arancione lato $b - h$, i quattro rettangoli gialli base $b - h$ e altezza h e i 4 quadrati gialli lato h.

In ogni caso detto sarà sempre vero che

$$Q = q + 4R$$

oppure che

$$q = Q - 4R$$

cioè $$(b-h)^2 = (b+h)^2 - 4bh.$$

A questo punto il problema dato inizialmente

$$\begin{cases} b + h = s \\ bh = p \end{cases}$$

si trasforma in

$$\begin{cases} b + h = s \\ b - h = \sqrt{s^2 - 4p} \end{cases}$$

Cioè ci si è ricondotti ad un problema della ricerca di due numeri data la loro somma e la loro differenza. Naturalmente $s^2 - 4p \geq 0$ il ce vuol dire nel caso in cui s e p rappresentino rispettivamente il semiperimetro e l'area di un rettangolo che

$$\begin{cases} s \geq 2\sqrt{p} \\ p \geq 0 \end{cases}.$$

Esercizio. Trova i lati di un rettangolo sapendo che il suo perimetro è 40 e l'area è 96. (Riferimento al testo babilonese).

Pertanto

$$\begin{cases} b + h = 20 \\ bh = 96 \end{cases}.$$

$(b-h)^2 = (b+h)^2 - 4bh = 400 - 384 = 16$

allora $b - h = 4$

e quindi il problema iniziale è divenuto

$$\begin{cases} b + h = 20 \\ b - h = 4 \end{cases}$$

cioè $b = 12$ e $h = 8$.

Con tale metodo si risolvono esercizi con b e h qualsiasi.

Esercizio

$$\begin{cases} b + h = s = \dfrac{7}{4} \\ bh = p = \dfrac{3}{8} \end{cases}$$

si calcola $(b + h)^2 = \frac{49}{16}$, $4bh = \frac{3}{2}$ e quindi

$$(b - h)^2 = \frac{49}{16} - \frac{3}{2} = \frac{25}{16}$$

pertanto $b - h = \frac{5}{4}$. A questo punto il problema iniziale è divenuto

$$\begin{cases} b + h = \dfrac{7}{4} \\ b - h = \dfrac{5}{4} \end{cases}$$

problema che in attività precedenti, sempre facendo uso di opportuni strumenti, si è imparato a risolvere.