DE GLI ELEMENTI DI EVCLIDE

LIBRO PRIMO

CON I COMMENTARII DI FEDERICO COMMANDINO DA VRBINO.

DIFFINITIONI.

I.

IL PVNTO, è quello che non ha parte, ò uero che non ha grandezza alcuna.

IL COMMANDINO.

Euclide per la negatione delle parti ci ha dimostrato qual sia il punto, che è principio di tutta la materia proposta, percioche essendo che li principij siano differenti da quelle cose, delle quali essi sono principij, & essendo che le loro negationi dimostrino in vn certo modo la natura di quelli, non senza cagione hanno ritrouato l'orationi negatiue cõuenire ad essi principij, il che afferma Proclo con l'autorità di Parmenide. I Pythagorici per vna certa proportione, & translatione diffinirono il punto essere l'vnità che ha positione; percioche il punto ha positione, & l'vnità non l'ha. Aristotele nel quarto libro della sua diuina philosophia dice, che quello che è vno, ò vero di forma, ò vero di quantità è indiuisibile, quello dunque che secondo la quantità, come quantità, non si può diuidere, quello dico che in tutto è tale, & senza positione si chiama vnità; ma quello che in tutto è tale, & ha la positione dicesi punto: & quello che in vn sol modo si può diuidere, superficie: quello poi che da tutte le parti si può diuidere, & che ha le tre dimensioni è chiamato corpo.

Il punto secondo i Pithagorici è lunità che ha positione.

II.

La linea è vna lunghezza senza larghezza.

IL COMMANDINO.

Doppo il punto la linea tiene il secondo luogo, perche si come il punto è della linea, così la linea è principio della superficie, della quale si dirà qui sotto. il punto dunque si come principio di tutte le grandezze per la negatione sola, ma la linea parte per l'affirmatione, parte per la negatione ci è stata dimostrata, quando disse, che è vna lunghezza senza larghezza. Altri altramente hanno diffinita la linea, percioche alcuni dissero, ch'ella era flusso del punto; alcuni, fra quali fù Aristotele, dissero che era vna grandezza, che in vn sol modo si può diuidere; ciò è secondo la lunghezza. della linea noi habbiamo notitia, come dice Apollonio, quando si misurano le lunghezze sole, ò delle vie, ò delle mura, perche allhora non vi si aggiunge ne larghezza, ne grossezza, ma consideriamo solo vna dimensione, si come quando si misurano i campi riguardiamo la superficie, & quando si misurano i pozzi riguardiamo il solido, conciosiacosa che raccogliendo insieme tutte le dimensioni, diciamo essere tanto lo spatio

Il pũto è principio di tutte le grandezze. Varie diffinitioni della linea. Notitia della linea Notitia della superficie. Notitia del solido.

Senso della linea.

Linee semplici & miste.

del pozzo secondo la lunghezza, larghezza, & altezza. Il senso poi della linea haueremo, se i termini che diuidono i luoghi illuminati da gli ombrosi considereremo cosi nella luna, come nella terra, però, che questo mezo secondo la larghezza non ha dimensione, ma secondo la lunghezza, la quale insieme col lume & con l'ombra si prolunga. delle linee altre sono semplici, altre miste, le semplici sono la linea retta, & la circolare, benche la retta sia piu semplice, l'altre poi tutte sono miste, come le settioni del cono, le helici, le conchoidi, le cissoidi, & altre simili.

III.

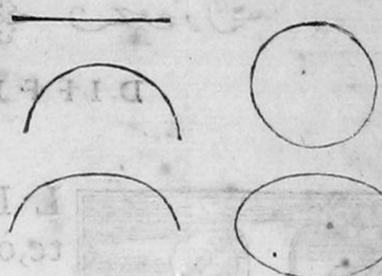
I fini della linea sono i punti.

IL COMMANDINO.

Euclide usa la linea in tre modi.

La linea circolare per se stessa non ha fine alcuno.

La Ellipse ī se stessa si riuolge come il cerchio.



Vsando in tre modi la linea Euclide, ò vero terminata & finita dall'vna & l'altra parte, ò vero infinita, ò dall'vna parte finita e dall'altra infinita; hora si tratta di quella, che è da tutte due le parti finita, della quale dice che i fini sono due punti. ma è da sapere che la linea circolare per se stessa non ha fine alcuno, ma se in essa si considera qualche punto, questo medesimo sarà principio & fine, diuersamente pero considerato. quello che si è detto della linea circolare, si può dire etiandio della ellipse, laquale parimente si come il cerchio in se stessa si riuolge. ma prendendosi vna parte della linea circolare ò della ellipse, di essa non altramente che della linea retta, i fini saranno due punti, & questo medesimo intender si deue delle altre linee curue.

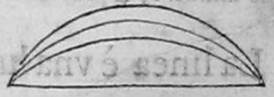
IIII.

La linea retta è quella che si distende vgualmente fra li suoi pūti.

IL COMMANDINO.

Come Platone diffinì la linea retta.

Diffinitione della linea retta di Archimede.



Vuol dire Euclide, che la linea retta è quella che contiene distanza vguale, cioè quella distanza che s'interpone fra li suoi punti, percioche quanto l'vn punto è distante dall'altro, tanta è la grandezza della linea retta terminata da essi punti: & questo è il distendersi ugualmente fra li suoi punti. se poi nella circonferenza del cerchio, ò uero in altra qual si voglia linea si considereranno due punti, la portione di quella linea, che s'interpone sarà assai maggiore che la distāza delli detti punti. In questo modo mi pare che Proclo dichiari la diffinitione della linea retta. ma Platone disse che la linea retta era quella, i mezi della quale si oppongono à gli estremi, percioche questo necessariamente auuiene ad essi estremi che sono nella linea retta, ma non già à quelli, che sono nella circolare, ò altra linea. onde dicono etiandio gli astrologi il sole ecclissarsi, & mancare, quando nella medesima retta linea esso & la luna, & l'occhio nostro si troua, percioche allhora la luna che sta nel mezo si oppone al detto occhio nostro. Archimede, come narra Proclo, disse che la linea retta era la piu breue di tutte l'altre linee c'hanno i medesimi fini. la qual diffinitione fu accettata dal Campano, oue dice che la linea retta è vna breuissima estensione dall'vn punto all'altro, che quelli nelle sue estremità riceue.

V.

La superficie è quella, che solamente ha lunghezza & larghezza.

IL COMMANDINO.

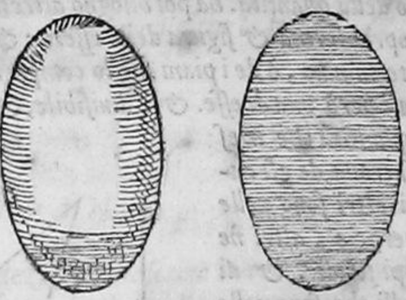
Ha detto che la superficie solamente ha lunghezza, & larghezza, percioche ella è senza *grossezza. altri dissero che ella era termine del corpo, altri grandezza distante per due interualli, della quale superficie dicono che noi habbiamo cognitione nel misurare i campi & nel distinguere i lor termini secondo la lunghezza & larghezza: & che di essa prendiamo vn certo senso, quando riguardiamo le ombre, imperoche essendo quelle senza alcuna grossezza, poiche non possono penetrare le parti interiori della terra, hanno solo lunghezza, & larghezza. delle superficie altre sono semplici, altre miste. le semplici sono la piana & la spherica, l'altre tutte poi sono miste, come la cylindrica, la conica, & quelle che hanno origine dalle settioni del cono, cioè delle figure conoidi & spheroidi, & altre.*

Varie diffinitioni della superficie. Notitia della superficie. Senso della superficie. superficie semplici & miste.

V I.

I fini della superficie sono le linee.

IL COMMANDINO.



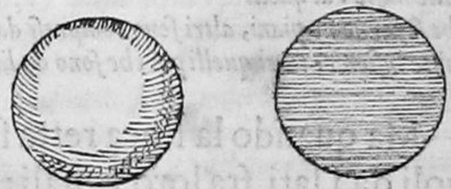
Come non di tutte le linee i fini sono i punti, cosi non di tutte le superficie i fini sono le linee, percioche la superficie della sphera, ò del spheroide per se stessa non ha fini alcuni tali, se non è segata da piani, perche allhora per fini ha le linee che dal segamento si fanno. della superficie poi del cerchio, & di quella, che è contenuta dentro della ellipse il fine è vna linea, cioè la circonferenza, & la ellipse. ma segandosi haueranno per fini le linee.

Superficie della sphera & del spheroide. La superficie del cerchio, & quella che è contenuta dalla ellipse.

V I I.

La superficie piana, è quella che giace vgualmente fra le sue linee.

IL COMMANDINO.



I philosophi antichi, come testifica Proclo, diceuano la superficie & il piano essere vna medesima cosa. ma Euclide, & i suoi seguaci dicono, che la superficie è il genere, & la sua specie è'l piano, ò uero la superficie piana; si come della linea è specie la linea retta. la onde essi diffiniscono il piano, con vna certa proportione alla linea retta, percioche come la linea retta è quella che si distende vgualmente fra i suoi punti, ò uero i mezi della quale si oppongono à gli estremi, ò che è la piu breue di tutte l'altre, c'hanno i medesimi fini, cosi dissero che la superficie piana era quella, che giace vgualmente fra le sue linee, ò che i mezi della quale si oppongono à gli estremi, o che è piu breue di tutte le altre superficie, c'hanno i medesimi fini. & certamente tutte le diffinitioni della linea retta, si possono benissimo accommodare alla superficie piana. ma se bene le superficie sono di piu spetie, Euclide ha voluto diffinire solo la piana, & in questa considerare le figure, e le loro affettioni.

V I I I.

L'angolo piano è quella inclinatione, che fanno due linee quando in vn punto si toccano, & non son poste dirittamente fra loro.

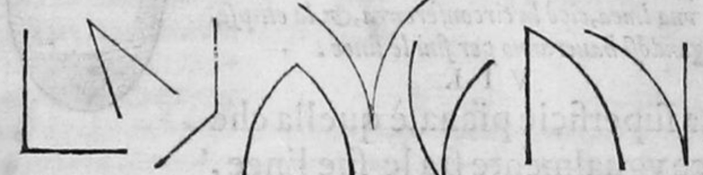
I X.

Et quando le linee, che contengono l'angolo sono rette, si chiama tal angolo rettilineo.

IL COMMANDINO.

Alcuni ponendo l'angolo nel predicamento della relatione, hanno detto essere la inclinatione ò di linee, ò di piani, che siano inclinati l'vn verso l'altro. alcuni ponendolo nel predicamento della qualità come è retto, & curuo, dissero essere vna simile affettione della superficie, ò del solido. altri riducendolo alla quantità affirmarono essere superficie, ò solido, perciochè come dicano, l'angolo che è nella superficie si diuide con la linea, & quello che è ne solidi con la superficie. ma quello che si diuide non è altro che grandezza, & quella non lineare, perche la linea è diuisa dal punto. onde resta che sia superficie ò solido. che diremo dunque intanto contrasto? ò qual di queste cose diremo essere l'angolo? risponde Proclo, che l'angolo non è alcuna di quelle cose per se stesso. ma si constituisce per il concorso di tutte: & questo auiene non solo all'angolo, ma anche al triangolo, che partecipa della quantità, & però dicesi vguale, & disuguale, hauendosi rispetto alla materia. partecipa anchora di quella qualità che s'appartiene alla figura, perciochè i triangoli & simili & disuguali son detti; di maniera che l'angolo anchora ha bisogno della quantità. ha poi bisogno altresì della qualità, per la quale viene à riceuere quasi vna propria forma & figura dello essere: & finalmente ha bisogno dell'habitudine delle linee, che lo terminino, ò de i piani che lo comprendano: & di tutte queste cose l'angolo è composto: ma non è però vna di esse. & è diuisibile, & atto à riceuere l'vgualità, & la disugualità, secondo la quantità che in esso si troua. de gli angoli altri sono nelle superficie, altri ne corpi solidi. & di quelli che sono nelle superficie; altri sono nelle semplici, altri nelle miste. di quelli che si fanno ne piani, altri sono compresi da linee semplici, altri da miste, altri da semplici & miste insieme. tutti quelli poi che sono da linee rette compresi chiamansi rettilinei.

Diuisione de gli angoli.



X.

Ma quando la linea retta stando sopra vn'altra retta, fa gli angoli da i lati fra loro vguali; sono amendue retti, & la linea, che stà sopra, si chiama perpendicolare à quella alla quale ella soprastà.

XI.

L'angolo ottuso è quello, che è maggior del retto.

XII.

L'angolo acuto è quello, che è minore del retto.

IL COMMANDINO.

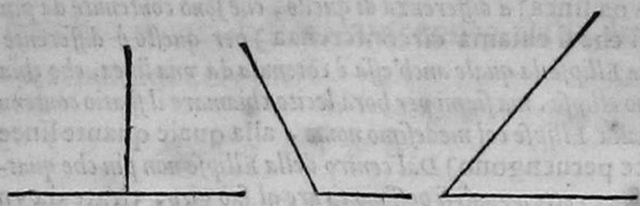
Nella diffinitione dell'angolo ottuso, & acuto bisogna intenderci il genere, perche l'vno & l'altro di essi è rettilineo; & questo, cioè l'acuto è minor del retto, & quello cioè l'ottuso è maggiore. ma non semplicemente ciascuno che è minore del retto è angolo acuto, si come ciascuno che è maggior del retto non è ottuso, perciochè quello, che da greci si chiama cornicolare, & è contenuto da vna linea retta che tocca il cerchio, & dalla circonferenza propria, non solo è minore del retto, ma d'ogni acuto, non però dicesi acuto, come auiene dell'angolo del mezo cerchio, ilquale è minore d'ogni retto, ma non però è acuto: & questa è la cagione, perciochè essi sono misti, & non rettilinei. & di quelli che da linee circolari ò altramente curue sono contenuti, molti appaiono maggiori del retto, ma non però sono ottusi. Hauendo dunque Euclide proposto di diffinire l'angolo retto, ha considerato la linea retta, che sta sopra vn'altra

Angulo cornicülare.

Angolo del mezo cerchio

retta

retta, & fa gli angoli che sono dall'vno, & l'altro lato vguali fra loro, quali egli chiama angoli che stanno l'vno dop po l'altro, ò vogliã dire conseguenti. volendo poi diffinire l'ottuso & l'acuto non ha considerato nel medesimo modo la linea



retta verso l'vna, & l'altra parte inclinata. ma per comparatione al retto gli ha dimostrati; percioche esso anchora de non retti è misura, si come l'vgualità delli disuguali: & le linee rette inclinate verso l'vna, & l'altra parte sono infinite, & non vna sola, come la perpendicolare. ma è da sapere, che qui Euclide ragiona di quelle linee, che sono nel medesimo piano, onde non ha diffinito, ne ogni linea perpendicolare, ne ogni angolo, perche la perpendicolare solida non solamente ad vna retta linea fa gli angoli retti, ma à tutte quelle, che la toccano, & sono nel soggetto piano, della quale si tratterà nell'vndecimo libro.

Angoli conseguenti. Langolo retto è anchora misura de nõ retti, come lugualità della disugualità. Perpendicolare piana solida.

XIII.

Il termine è fine di qualche cosa.

IL COMMANDINO.

Non bisogna che'l termine si riferisca ad ogni grandezza, come scriue Proclo, perche della linea dicesi termine, & fine, ma si deue riferire alli spatij, che sono nelle superficie, & à corpi solidi, chiamando hora termine quel circuito, ouer giro, che determina ogni spatio, & cotal termine dice essere fine, non già come il punto si dice fine della linea, ma come quello che rinchiude, & separa dalle cose che gli stanno d'intorno, & questo nome è proprio dell'antica Geometria, per mezo della quale misurauano i campi, & i lor termini distintamente conseruauano. onde poi acquistorono la cognitione di questa scienza. chiamando dunque Euclide questo giro esteriore termine, bene & meritamente l'ha constituito fine de spatij, imperoche per questo ogni cosa, che è contenuta, si determina, come nel cerchio la circonferenza è termine & fine, & esso piano è vn certo spatio, & parimente nel triangolo tre lati; & nel quadrilatero, i quattro lati sono termini, & fini. spatio poi è quello che dentro di questi lati vien contenuto.

XIIII.

La figura è quella che è contenuta da vno, ò da piu termini.

IL COMMANDINO.

Delle figure altre sono piane, altre solide: & delle figure piane è il cerchio, & la ellipse. delle solide la sphera, & lo spheroide, che da vn sol termine, & l'altre, che da piu termini sono contenute.

Figure piane solide.

XV.

Il cerchio è vna figura piana contenuta da vna linea, che si chiama circonferenza, alla quale quante linee rette peruengono tirate da vn punto, che è dentro alla figura, tutte fra loro sono uguali.

XVI.

Et questo tal punto si chima centro del cerchio.

IL COMMANDINO.

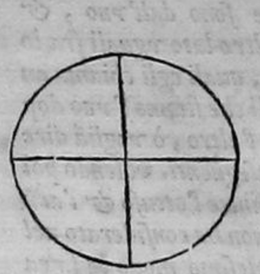
Il cerchio è la prima figura delle piane, che per la sua semplicità eccede i solidi, & è come l'vnità hauendo rispetto all'altre figure piane.

Figura

Figura] *sta in luogo del genere*. Piana] *à differenza delle figure solide*. contenuta da vna linea] *à differenza di quelle, che sono contenute da piu lati*. che si chiama circonferenza] *per questo è differente dalla Ellipse, la quale anch'essa è cõtenuta da vna linea, che chiamano ellipse. ma siami per hora lecito chiamare il spatio contenuto dalla Ellipse col medesimo nome*. alla quale quante linee rette peruengono] *Dal centro della Ellipse non piu che quattro linee rette vguali si possono tirare al suo giro*. tirate da vn punto] *di molti & infiniti punti, che sono dentro alla figura, vno solamente può far questo*. che è dentro alla figura] *cioè nel piano della figura: percioche fuor del piano della figura è altresì vn punto, dal quale tutte le linee rette tirate alla circonferenza sono vguali, qual punto non centro, ma polo del cerchio ne libri spherici è chiamato*.

Ellipse.

Polo del cerchio.

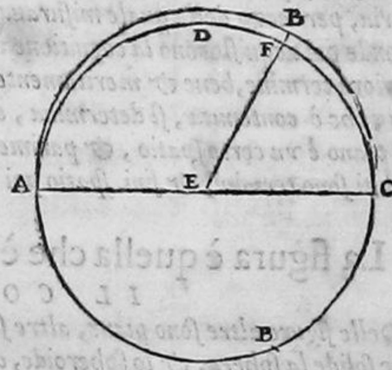


XVII.

Il diametro del cerchio è vna linea retta, che passa per lo centro, & dall'vna, & l'altra parte è terminata dalla circonferenza, la quale etiandio diuide il cerchio per mezo.

IL COMMANDINO.

Il diametro del cerchio] *percioche i diametri sono anchora di parallelogrammi. ma questi alcuna volta si chiamano diagonij, ò vero linee diagonali. sono anchora i diametri della Ellipse, de quali due si chiamano assi. oltre à ciò sono i diametri della sphera, che similmente chiamano assi. onde seguita che'l diametro sia proprio del cerchio*. vna linea retta che passa per lo centro] *conciosiacosa che nel cerchio si possano tirare infinite linee rette, le quali non passano per lo centro*. & dall'vna & l'altra parte è terminata dalla circonferenza] *perche le linee rette, le quali se ben passano perlo centro son terminate ò di quà ò di là dalla circõferenza, non sono diametri*. la quale etiandio diuide il cerchio per mezo] *Sia il cerchio A B C D, il cui diametro sia A C, & stando fermo il diametro s'intenda alzarsi la circonferenza A B C, & ponersi sopra la circonferenza ADC. Dico la circonferenza ABC conuenire & adattarsi alla circonferenza A D C: percioche se non conuiene, ò caderà di fuori, ò di dentro, ò vero parte di fuori, & parte di dentro. caggia primieramente di fuori s'egli è possibile, & dal centro del cerchio che sia E tirisi la E B, che seghi la circonferenza A D C in F. Perche dunque le linee rette tirate dal centro alla circonferenza sono fra loro vguali, sarà la E B vguale alla E F, cioè il tutto alla parte, che è impossibile. adunque la circonferenza A B C non caderà fuor della circonferenza A D C. similmente dimostreremo, che ella non cade di dentro, ne parte di fuori, & parte di dentro. onde è necessario che caggia sopra di essa à punto, & cosi la circonferenza A B C conuerrà, & si adatterà alla circonferenza A D C & adattandosi la circonferenza alla circonferenza, etiandio la superficie contenuta dalla linea retta A C & dalla circonferenza A B C, si adatterà alla superficie contenuta dalla medesima A C & dalla circonferenza A D C. Dalle qual cose seguita per l'ottaua commune notitia, la circonferenza alla circonferenza & la superficie alla superficie essere vguale. Il diametro dunque A C diuide il cerchio A B C D per mezo. il che bisognaua dimostrare.*



XVIII.

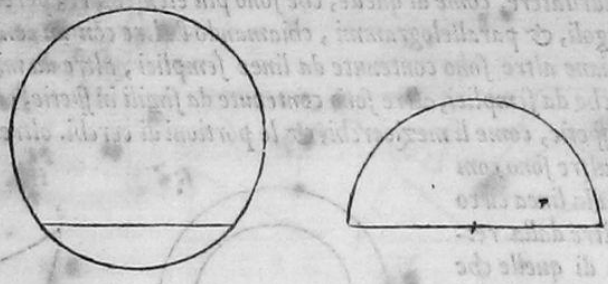
Il mezo cerchio è vna figura contenuta dal diametro, & dalla metà della circonferenza.

XIX.

La portione del cerchio è vna figura contenuta dalla linea retta & dalla circonferenza del cerchio.

IL COMMANDINO.

Dalla diffinitione del cerchio Euclide ha trouato, quale ſia la natura del cētro, che è differente da tutti gli altri punti, quali ſono nel cerchio. dal centro poi ha diffinito il diametro, ſeparandolo da tutte l'altre linee rette, che dentro al cerchio ſi deſcriuono. hora dal diametro ne inſegna quale ſia il mezo cerchio, dicendo che egli è contenuto da due termini, che ſempre ſono differenti, cioè dalla li nea retta, & dalla circonferenza, & che queſta linea non s'intende d'ogni linea retta, ma del diametro del cerchio, contenendoſi la minor portione del cerchio, & la maggiore dalla retta linea & dal la circonferenza, le quali però non ſono mezi cerchi, perche la diuiſione del cerchio non è fatta per lo centro. ma è da ſapere che tutte queſte figure ſono biformi, cioè di due forme, & ſi compongono de parti diſſimili, conciosiacoſa che le figure contenute da due termini ò ſiano da due circonferenze contenute, come la lunulare, ò dalla linea retta & dalla circonferenza, come ſono le ſopradette, ò vero da due linee miſte, come ſe due ellipſi ſi taglino inſieme, conterranno vna figura, che fra eſſe viene interpoſta: ò vero da vna linea miſta, & da vna retta, come la metà della ellipſe. ſi che il mezo cerchio da due linee diſſimili, ma però ſemplici, & applicate inſieme l'vna all'altra è contenuto. prima dunque che Euclide diffiniſca le figure triadiche, cioè di tre lati, meritamente doppo il cerchio viene à dire delle biformi, perche due rette linee non poſſono in modo alcuno chiudere vn ſpatio, ſi come può vna linea retta & la circonferenza, & ſimilmente due circonferenze, le quali ò fanno l'angolo, come nella lunulare, ò vna figura ſenza angoli, come per eſſempio ſe pigli due cerchi c'habbiano vn medeſimo centro, percioche quello ſpatio che ſta in mezo è da due circonferenze contenuto, dalla interiore, & dalla eſteriore, & niun'angolo ſi fa, non ſi tagliando eſſe fra loro, come nella lunulare, & nella figura da ogni parte conueſſa. & è manifeſto che il medeſimo è centro del mezo cerchio, & del cerchio, percioche il diametro che in ſe tiene il centro compiſce il mezo cerchio. ſi deue anco notare, che queſta figura ſolamente fra le piane ha il centro nel ſuo circuito, ò giro. onde ſi raccoglie che tre ſono i luoghi del centro, ò dentro alla figura, come nel cerchio & nella ellipſe, ò nel giro, come nel mezo cerchio, ò di fuori, come in vna delle ſettioni coniche, cioè nella hyperbola. Tre ſono i luoghi del centro.



XX.

Le figure, che ſono contenute da linee rette, ſi chiamano rettilinee.

XXI.

Et ſe ſono contenute da tre linee, ſi addimandano trilatere.

XXII.

Se da quattro, quadrilatere.

XXIII.

Se da più di quattro moltilatere.

IL COMMANDINO.

Doppo che ha trattato del cerchio, del mezo cerchio, & delle portioni del cerchio, viene alle figure rettilinee, le quali ordinatamente per numeri ſi ſtendono in infinito, cominciando dal numero ternario, perche due linee rette non poſſono (come s'è detto di ſopra) chiudere ſpacio alcuno. fa mentione poi ſolamente delle figure trilatere, & quadrilatere, come di quelle, che ſono piu elementari, percioche nel primo libro tratta delli triangoli, & parallelogrammi, chiamando l'altre con vn commun nome moltilatere.

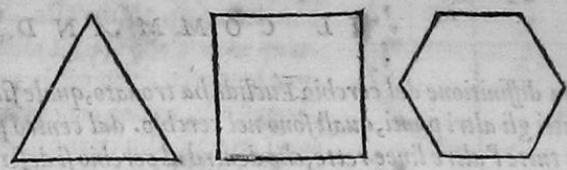
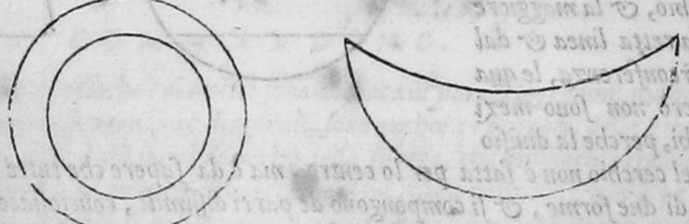


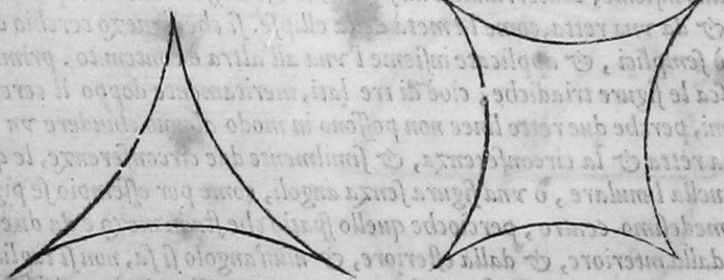
Figure piane.

delle figure piane altre ſono contenute da linee ſemplici, altre da miſte, alcune da amendue, & di quelle che da ſemplici, altre ſono contenute da ſimili in ſpetie, come le rettilinee, altre da diſſimili in ſpetie, come li mezicerchi, & le portioni di cerchi. oltre à cio di quelle, che da ſimili in ſpetie, altre ſono compreſe dalla linea circolare, altre dalla retta. ma di quelle che dalla circolare altre da due, altre da più, & da vna anchora, come il cerchio iſteſſo. di quelle poi che da due, altre ſono ſenz' angoli, come la corona, la quale da cerchi concentrici è terminata; altre ſono angolari, come il Meniſco. quelle che da piu di due, vanno in infinito, conciosiacoſa, che da tre, & da quattro, & dall'altre, che ordinatamente ſeguitano certe figure ſiano compreſe. perche ſe tre cerchi inſieme ſi tocchino, uengono à chiudere vn ſpatio trilatero, il quale è terminato da tre circonferenze; ſe quattro ſiano i cerchi, da quattro circonferenze, & coſi dell'altre di mano in mano. finalmente di quelle che da linee rette, altre da tre, altre da quattro, altre da piu ſono contenute.

Corona.

Meniſco.





XXIIII.

Delle figure trilatere è il triangolo equilatero, il quale hà tre lati vguali.

XXV.

L'Iſoſcele, ò vero equicrure, che ha ſolamente due lati vguali.

XXVI.

Lo ſcaleno, che ha tutti tre i lati diſuguali.

XXVII.

Oltre à ciò delle figure trilatere è il triangolo rettangolo, il quale contiene in se vn'angolo retto.

XXVIII.

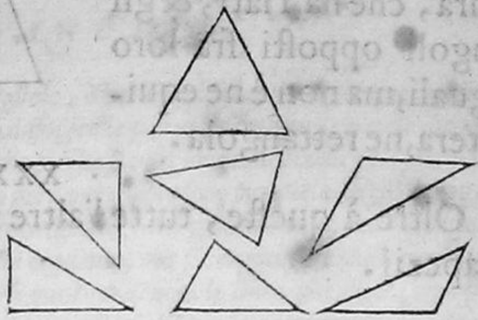
L'ottusiangolo che ha vn'angolo ottuso.

XXIX.

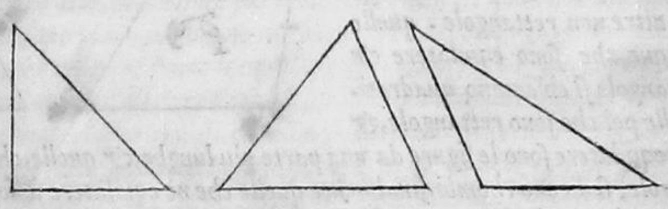
L'Acutiangolo, che ha tutti tre gli angoli acuti.

IL COMMANDINO.

Diuisione de triangoli



La diuisione de triangoli hora da i lati, hora da gli angoli procede. & quella, che da i lati va innanzi come nota, seguita poi quella che da gli angoli, come propria, percioche i tre angoli, cioè il retto, l'ottuso, & l'acuto alle rettilinee figure solo conuengono, ma l'vgualità, & la disugualità de i lati si troua anchora in quelle, che non sono rettilinee. dice dunque Euclide, che de triangoli altri sono equilateri, altri equicruri, altri scaleni; perche i lati ò sono tutti vguali, ò tutti disuguali, ò vero due di essi solamente vguali. oltre à questo de triangoli altri sono rettangoli, altri ottusiangoli, altri acutiangoli: & il rettangolo dice esser quello, che ha vn sol'angolo retto, si come l'ottusiangolo è quello, che ha vn sol'angolo ottuso, nõ essendo possibile che il triangolo habbia piu d'vno angolo retto, ò vero ottuso. l'acutiangolo poi è quello, che ha tutti gli angoli acuti, percioche non basta, che n'habbia solo vno acuto, che cosi tutti i triangoli sarebbono acutiangoli, ma è necessario che ogni triangolo habbia due angoli acuti, & che l'acutiangolo solo ne habbia tre. da queste diuisioni si coglie, che sette solamente sono le spetie de triangoli rettilinei, & non più, ne meno; percioche l'equilatero è solo acutiangolo. de gli altri poi ciascuno è di tre maniere, conciosia cosa, che l'equicrure ò sia rettangolo, ò ottusiangolo, ò acutiangolo. & similmente lo scaleno ò sia rettangolo, ò ottusiangolo, ò acutiangolo.



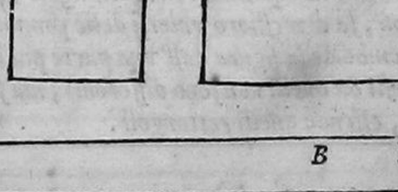
Sette sono le spetie de triangoli retilinei.

XXX.

Delle figure quadrilatere è il quadrato, il quale è equilatero & rettangolo.

XXXI.

La figura dall'vna parte piu lunga è quella che è rettangola, ma non equilatera.

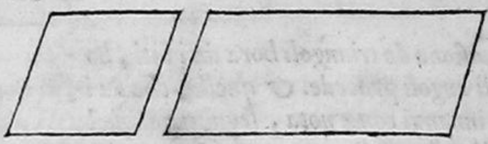


XXXII.

Il Rhombo è vna figura, che è equilatera, ma non rettangola.

XXXIII.

Il Rhomboide è vna figura, che ha i lati, & gli angoli opposti fra loro vguali, ma non è ne equilatera, ne rettangola.



XXXIIII.

Oltre à queste, tutte l'altre figure quadrilatere si chiamano trapezij.

IL COMMANDINO.

Diuisione de figure quadrilatere.

Delle figure quadrilatere altre sono equilatere, altre non equilatere, & altre sono rettangole, altre non rettangole. quelle dunque che sono equilatere & rettangole si chiamano quadrati. quelle poi che sono rettangole, & non equilatere sono le figure da vna parte piu lunghe, & quelle, che sono equilatere, & non rettangole, si dicono rhombi. finalmente quelle che ne equilatere sono, ne rettangole, & hanno i lati & gli angoli all'incontro fra loro vguali, si chiamano rhomboidi. altri in questo modo le diuidono, dicendo, che delle figure quadrilatere, altre sono parallelogramme, che hanno i lati all'incontro paralleli, altre non parallelogramme, che non hanno i lati paralleli. delle parallelogramme altre sono & rettangole, & equilatere, come i quadrati, che da greci sono detti tetragoni, altre ne rettangole, ne equilatere, come i rhomboidi, che hanno la figura simile al rhombo; altre rettangole, ma non equilatere, come le figure da vna parte piu lunghe; altre al contrario equilatere, & non rettangole, come il rhombo. delle figure non parallelogramme, altre hanno due lati solamente paralleli; altre niun lato parallelo; & quelle si chiamano trapezij, & queste trapezoidi. delli trapezij altri hanno i lati, che congiungono le linee parallele vguali; altri disuguali; & quelli si chiamano trapezij equicruri, questi scaleni. Adunque la figura quadrilatera si constituisce in sette modi, percioche la prima è il quadrato; la seconda quella, che da vna parte è piu lunga; la terza il Rhombo, la quarta il Rhomboide, la quinta il trapezio equicrure, la sesta il trapezio scaleno, la settima il trapezoide. Euclide non ha potuto diuidere le figure quadrilatere in parallelogramme; & non parallelogramme, non hauendo ne di parallele, ne di parallelogrammi prima trattato. I trapezij poi & i trapezoidi tutti con vn nome commune ha chiamati trapezij, à differenza di quei quattro, ne quali si troua la proprietà di parallelogrãmi; che è di hauere i lati & gli angoli all'incontro uguali. il che Euclide ha posto solamente nel rhomboide, per non lo diffinire con le negationi sole, quando disse che non è ne equilatero, ne rettangolo, percioche in quelle cose, doue ci mancano le proprie ragioni, fa di mestiero valersi delle communi. Il Rhombo pare che sia vn quadrato smosso & il Rhomboide la figura dall'vna parte piu lunga, che sia stata smossa, percioche inquanto à i lati questi da quelli non sono differenti, ma solamente inquanto all'ottusità de gli angoli, & acutezza, essendo quelli rettangoli.

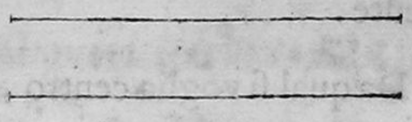
Quadrati.

Figure da una parte piu lunghe: Rhombi. Rhomboidi. Quadrati. Rhomboidi. Figure da una parte piu lunghe. Rhombi. Trapezij. Trapezoidi. Trapezij equicruri scaleni.

Doue ci mancano le proprie ragioni ci seruiamo delle cõmuni. Il Rhombo pare un quadrato smosso. Il rhomboide la figura da una parte piu lunga, che sia stata smossa.

XXXV.

Le linee parallele ò equidistanti sono quelle, le quali essendo in vn medesimo piano & prolungate in infinito dall'vna & l'altra parte, non si congiungono gia mai insieme.



IL COMMANDINO.

Quali siano gli elementi delle linee rette parallele, ò vero equidistanti, & da quali accidenti si conoscano, impareremo poi. Hora Euclide diffinisce le parallele con queste parole. le quali essendo in vn medesimo piano] *perciochè se vna sia nel soggetto piano, & l'altra alzata in qualunq; modo, non si cōgiungono mai, non però per questo sono parallele.* & prolungate in infinito dall'vna & l'altra parte non si congiungono giamai insieme] *perciochè le linee rette non parallele se saranno prolungate alquanto, [illegible] si congiungeranno insieme, ma l'esser prolungate in infinito & non congiungersi questo ci denota le linee parallele; non pero semplicemente ma dall'vna, & l'altra parte l'essere prolungate in infinito & non congiungersi; perche può essere che le linee non parallele anchora dall'vna parte siano prolungate in infinito, & non dall'altra, conciosiacosa che congiungendosi in vna parte nell'altra siano molto distanti. & la cagione è questa, che due linee rette non possono comprendere spatio alcuno. il che non auerrebbe se dall'vna & l'altra parte si congiungessero. In questo modo Euclide ha diffinito le linee rette parallele. ma Possidonio dice, che le linee parallele sono quelle, le quali non s'accostano insieme, ne si scostano nel medesimo piano, ma hanno tutte le perpendicolari vguali, che dalli pūti di vna sono tirate all'altra, & quelle che fanno le perpēdicolari minori, si cōgiungono insieme, cōciosiacosa, che la perpendicolare & l'altezze de spatij, & l'interuallo delle linee determinar possa. onde quando le perpendicolari sono vguali, etiandio gl'interualli delle linee rette saranno vguali, & quando sono minori, l'interuallo anchora sarà minore, & le linee rette, si congiungeranno insieme da quella parte, nella quale le perpendicolari sono minori. Pithone Geometra volendo dichiarare, quali siano le linee rette parallele, non contento di quello, che n'haueua scritto Euclide, con bellissimo essempio ci mostrò, dicendo che le linee rette parallele sono tali, quali noi veggiamo essere l'ombre delle colonne nelle mura, ò pauimento fatte da vna lampade accesa all'incontro ò da vna lucerna. il che come intender si debba, leggi Appo Sereno nel fine del libro della settione del cylindro. doppo le diffinitioni seguono i postulati, ò uero dimande, & poi gli Assiomi, ò communi notiti e. I postulati & assiomi, come dice Proclo con l'autorità di Gemino conuengono in questo, che non hanno bisogno d'alcuna dimostratione, ò fede geometrica, ma si accettano come noti, & si fanno principij delle cose, che seguitano. sono poi gli assiomi differenti dalli postulati nel medesimo modo, che sono differenti i theoremi dalli problemi, perciochè come ne theoremi quello, che segue alli soggetti proponiamo di considerare & conoscere, & ne problemi ci è commandato di trouare, & fare qualche cosa, cosi ne gli assiomi si accettano quelle cose che per se stesse sono manifeste, & sono in pronto alle nostre naturali notitie: & ne postulati cerchiamo di accettare quelle cose, che sono facili & apparecchiate, & che nel prenderle la nostra mente non si affatica, & non hanno bisogno ne di varietà ne di construttione alcuna.*

Possidonio diffinisce le parallele altramēte.

La perpendicolare determina l'altezza de spatii, & l'interuallo delle linee rette.

Come Pithone ha diffinito le linee rette parallele.

I postulati, & assiomi in quel che conuengono & in quel che sono differenti.

I theoremi in quel che siano differenti da problemi.

POSTVLATI OVERO DIMANDE.

I.

Addimandasi da qual si voglia punto à qual si voglia punto tirare vna linea retta.

II.

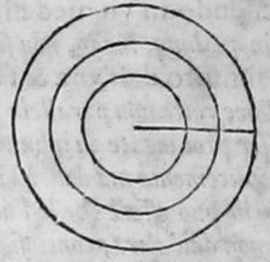
Prolungare vna linea retta terminata in continuo, & dirittamente.

III.

Da qual si voglia centro, & con qual si voglia interuallo descriuere vn cerchio.

IL COMMANDINO.

Secondo l'openione di Gemino questi tre principij, si per la facilità, si perche ci commandano che facciamo qualche cosa, ne i postulati necessariamente si debbono collocare, percioche doue dice Euclide, da qual si voglia punto à qual si voglia punto tirare vna linea retta; segue quella diffinitione, qual dice, che la linea è flusso del punto, & che la linea retta è vno vgual flusso, & non piegato. Se dunque intendiamo il punto mouersi di vn moto vguale, & breuissimo incontrare mo l'altro punto, & cosi sara fatto il primo postulato, non intendendo noi cosa varia. ma se essendo la linea retta terminata in vn punto similmente intendiamo il detto termine mouersi di vn moto breuissimo & vguale si constituirà il secondo postulato con facile & semplice modo. se poi intendiamo la linea retta terminata da vna parte essere immobile & dall'altra mouersi d'intorno al punto, che sia fermo, si farà il terzo postulato, percioche il centro sarà il punto immobile & l'interuallo la linea retta, & quanta ella sarà, tanto sarà l'interuallo dal centro à tutte le parti della circonferenza.



IIII.

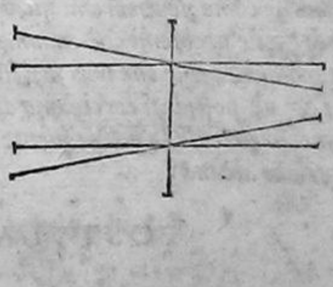
Tutti gli angoli retti essere vguali fra loro.

IL COMMANDINO.

Questo se bene, come manifesto, & chiaro, & che non ha bisogno de dimostratione da noi si conceda, non è però Postulato secondo la sentenza di Gemino. ma Assioma, percioche dice vn' accidente de gli angoli retti, non commandando che semplicemente si faccia cosa alcuna, ma se per auentura à qualcuno non fosse ben chiaro tutti gli angoli retti essere vguali fra loro, questi legga la dimostratione che fa Proclo ne commentarij. Pappo molto bene notò che'l conuerso di questo non è vero, cioè che l'angolo vguale al retto sia sempre retto, se non è rettilineo; percio che l'angolo curuilineo anchora può dimostrarsi vguale al retto.

V.

Et se sopra due rette linee cadendo vna retta farà gli angoli interiori & da vna medesima parte minori di due retti, quelle linee prolungate in infinito congiungersi insieme da quella parte, doue sono gli angoli minori di due retti.



IL COMMANDINO.

Proclo giudica, che questo in tutto si debba tor via dal numero de postulati, essendo theorema, che anchora ha molte dubitationi, le quali Ptolemeo in vn suo libro si propose di sciogliere:

&

& per essere dimostrato ha bisogno di molte diffinitioni, & theoremi, il cui conuerso Euclide etiandio come theorema ne dimostra. ma di questo si dirà di sotto al suo luogo.

ASSIOMI, OVERO COMMVNI NOTITIE.

I.

Quelle cose che sono vguali ad vna medesima, sono anchora fra loro vguali.

II.

Se alle cose vguali, si aggiungono cose vguali, tutte sono vguali fra loro.

III.

Se dalle cose vguali si traggono cose vguali, etiandio le rimanenti sono vguali fra loro.

IIII.

Se alle cose disuguali si aggiungono cose vguali, tutte sono disuguali.

V.

Se dalle cose disuguali si traggono cose vguali, le rimanenti sono disuguali.

VI.

Le cose che sono doppie di vna medesima, sono vguali fra loro. A

VII.

Le cose che sono la metà di vna medesima, sono fra loro vguali.

VIII.

Quelle cose che conuengono & si adattano bene insieme, sono vguali. B

IX.

Il tutto è maggiore della sua parte.

X.

Due linee rette non comprendono spatio alcuno. C

IL COMMANDINO.

Tutti quasi gli Assiomi sono communi alle scienze mathematiche, ne solamente nelle grandezze, ma anchora ne i numeri, ne i moti, & ne i tempi si trouano esser veri, percioche l'vguale & disuguale, il tutto, & la parte; il maggiore, & il minore alle quantità così continue, come discrete sono communi. la contemplatione adunque che consiste intorno à i tempi, intorno à i moti, intorno à i numeri, & intorno alle grandezze ha bisogno di tutti questi, come manifesti. Et essendo gli Assiomi communi, ciascuno se ne vale secondo la propria materia, in quanto ella richiede; & altri vsano quelli come nelle grandezze, altri come ne i numeri, altri come ne i tempi: & così in tutte le scienze le conclusioni si fanno proprie, anchor che gli Assiomi siano communi.

A
1. Assioma.

Le cose che sono doppie di vna medesima, sono vguali fra loro] *questo segue da quello. se alle cose vguali si aggiungono cose vguali, tutte sono vguali fra loro, percioche quelle che alla metà sono vguali, pigliando l'altra metà si fanno doppie dalla medesima, & uguali fra loro, per l'vgual giunta. & per questa ragione non solamente doppie, ma etiandio triple, & vgualmente moltiplici della medesima tutte vguali appariranno.*

B

Quelle cose che conuengono, & si adattano bene insieme sono vguali] *questo è proprio della Geometria.*

C

Due linee rette non comprendono spatio alcuno] *questo non pare molto chiaro, & però nella editione del Campano è stato posto fra le petitioni, ò postulati. à questi assiomi giudicò Pappo douersene aggiungere alcuni altri, come si può vedere ne i commentarij di Proclo. ma essendo che ogni scienza sia di due maniere, l'vna consiste intorno alle propositioni immediate, & l'altra intorno à quelle che da loro si dimostrano, & in somma intorno alle cose, che seguitano dalli principij. questa poi nelle raggioni mathematiche si diuide in problemi, & theoremi, chiamando problemi quelli, ne quali le cose che non sono, propone in certo modo di trouare, & metter fuori, & fabricare. & theoremi quelli ne quali si propone di considerare & conoscere, & dimostrare, quello che è, ò non è, & i problemi commandano, che constituiamo, i nascimenti, le positioni, le applicationi, ò adattationi, le descrittioni, le circonscrittioni, & le diuisioni per mezo, & altre cose simili. ma i theoremi cercano di persuadere, & con demostrationi confirmare gli accidenti che per se stessi sono nelli soggetti della Geometria. ogni problema poi & ogni theorema perfetto & che ha tutte le sue parti, deue contenere in se queste cose, cioè Propositione, Espositione, Determinatione, Construttione, Dimostratione, & Conclusione. delle quali la Propositione dice quello che è dato, & concesso, & quello che si cerca, percioche la perfetta Propositione è composta dall'vno & l'altro di questi. la Espositione pigliando quello che è dato per se lo prepara alla questione. la Determinatione dichiara separatamente qual sia il quesito. la Construttione aggiunge il mancamento al dato, per ritrouare quello che si cerca. la Dimostratione dalle cose concesse dottamente raccoglie quello che si propone. la Conclusione ritornando alla propositione conferma quello, che si è dimostrato: & tante sono le parti delli problemi & theoremi. ma le piu necessarie, & che si trouano in tutti sono la Propositione, la Dimostratione, & la Conclusione, percioche bisogna primamente conoscere quel che si cerca, & poi dimostrarlo per i mezi, & finalmente concludere quello, che si è dimostrato. di queste tre niuna ne può mancare. ma le altre spesse volte si pigliano, & spesse volte anchora non apportando elle vtilità alcuna, si lasciano. la Espositione, & Determinatione non sono in quel proble*ma. constituire vn triangolo equicrure che habbia l'vno & l'altro de gli angoli, che sono alla base, doppio del rimanente] *& la Construttione in molti theoremi non si troua bastando l'Espositione senza altra giunta per dimostrare dalle cose date quello che si propone. quando dunque diremo che manca l'Espositione? quando nella propositione non sarà dato alcuno. perche se bene la Propositione si diuide in dato, & quesito, non però questo è così sempre, ma alcuna volta dice il quesito solamente, qual bisogna conoscere, & fare, come nel detto problema. peroche non dice prima che sia data cosa alcuna per constituire il triangolo equicrure che habbia l'vno, & l'altro de gli angoli che sono alla base doppio del rimanente, ma solo che bisogna ciò fare: & si piglia anche in questo luogo quel che si propone dalle cose prima conosciute, sapendo noi ciò che sia equicrure, & ciò che sia vguale, & cioche sia doppio. il che Aristotele dice essere proprio di ogni scienza intellettuale, niuna cosa però à noi è soggetta, si come ne gli altri problemi, che quando si dice vna data retta linea terminata diuidere per mezo, la linea retta è data, & ci è commandato che la diuidiamo per mezo. separatamente dunque si pone il dato, & separatamente il quesito. & quando la propositione hauerà l'vno & l'altro, allhora si troua la Determinatione, & l'Espositione. ma quando ci manca il dato, è necessario che etiandio queste manchino; conciosiacosa che l'Espositione sia del dato, & la determinatione sia la medesima, che la propositione, percioche che altro diremo noi esser la determinatione in quel problema, se non che bisogna trouare il triangolo equicrure? & questo era la propositione. se dunque la propositione non ha il dato & il quesito, l'Espositione si tace, non ci essendo il dato, & la determinatione si lascia, accioche non diuenti la medesima, che la propositione. molti altri problemi si trouano così fatti, massimamente ne gli arithmetici, & nel decimo libro,*

Problemi.

Theoremi.

Ogni Problema, & Theorema perfetto deue contenere sei parti.
Propositione.
Espositione.
Determinatione.
Cōstruttione.
Dimonstratione.
Conclusione.

come

come è quello. Trouare due linee rette in potenza commensurabili, che comprendano vn spatio medio] *& tutti gli altri somiglianti. Ma è da sapere, che Archimede spesse volte, come nel libro della quadratura della parabola, & Pappo quasi sempre lasciano la propositione cōtentādosi della espositione & determinatione in luogo di quella. Ogni dato poi si da in vno di questi modi, ò per positione, ò per proportione, ò per grandezza, ò per spetie, conciosia cosa che il punto si dia solamente per positione, & la linea, & gli altri per tutti, percioche quādo diciamo* Segare l'angolo rettilineo dato per mezo] *notiamo la spetie dell'angolo, che è data, cioè rettilinea, per non cercar di segare con le medesime vie etiandio l'angolo curuilineo per mezo, & quando diciamo* Date due linee rette disuguali tagliare dalla maggiore vna, che sia vguale alla minore] *le linee sono date per grandezza, perche il maggiore, il minore, il terminato, l'infinito si riferiscono alla grandezza. ma quando diciamo* Se quattro grandezze sono proportionali, etiandio permutandosi sarāno proportionali] *si dà la medesima proportione in quattro grandezze, & quando si dice.* Da vn dato punto tirare vna linea retta vguale ad vn'altra data] *il punto si dà per positione. potendo si dunque variare la positione, anchor la construttione si varierà, percioche il punto ò vero si dà fuori della linea retta, ò vero nella linea retta, & nella estremità, ò vero fra li termini di essa: & pigliandosi il dato in quattro modi, anchor l'espositione in quattro modi si farà, & alcuna volta due, alcuna volta tre modi abbraccia. la dimostratione qualche volta si troua hauere tutte le cose, che sono proprie di essa, dimostrando il quesito per mezo della diffinitione, & questa è la dimostratione perfetta. alcuna volta argomenta da segni certi, il che bisogna considerare diligentemēte, percioche sempre le ragioni geometriche sono necessarie per cagione della soggetta materia; ma non sempre si fanno con methodi & vie dimostratiue. finalmente la conclusione suol essere di due maniere, particolare & vniuersale. perche quando nel dato haueremo fatta la conclusione, accioche non paia che noi habbiamo proposto i particolari, veniamo alla conclusione vniuersale. ma essendo che queste cose siano in tal modo determinate, ragioneremo hora breuemente di quelle che con loro sono congiunte, cioè quel che sia Lemma, quel che sia Caso, quel che sia Corollario, quel che sia Instanza & quel che sia Deduttione. Il Lemma nelle cose geometriche, è vna propositione, che ha bisogno di fede, percioche quando ò nella Construttione, ò nella Dimostratione pigliamo qualche cosa di quelle, che non sono dimostrate, ma che ne hanno bisogno, quel che è stato preso, come per se stesso oscuro, giudicandolo esser degno d'inquisitione, lo chiamiamo Lemma. & è differente dal Postulato & dall'Assioma, inquanto che si può dimostrare, conciosiacosa, che quelli senza dimostratione per se stessi si piglino à far fede de gli altri. Il Caso nota modi differenti della construttione, & mutamento della positione, trasponendosi i punti, ò le linee, ò li piani, ò li solidi, & in somma la varietà di esso consiste intorno alla descrittione, & si chiama Caso, percioche è trasposition della construttione. Il Corollario si dice anchora di alcuni problemi, come sono li Corollarij attribuiti ad Euclide, ma propriamente si chiama Corollario, quando dalle cose dimostrate appare qualche altro theorema, che da noi non è stato proposto, & perciò lo chiamiamo Corollario per esser come vn certo guadagno, che si ha fuor del proponimento della dimostratione. l'Instanza impedisce tutto il corso della oratione, opponendosi ò alla cōstruttione ò vero alla dimostratione, la quale non bisogna accettare come vera, ma bisogna rifiutarla & demonstrare esser falsa. la Deduttione poi è vn passaggio da vn problema ò theorema ad vn'altro; qual conosciuto che sia, ò fatto appare quello che è stato proposto, come quando si ricercaua la duplicatione del cubo, transportorono il quesito in vn'altro, al quale questo seguita, cioè nella inuentione delle due proportionali di mezo: & doppo ricercarono in che modo date due linee rette, si trouino in mezo di esse due proportionali.*

Ogni dato in quanti modi si dà.

Dimostratione perfetta.

Le ragioni geometriche sono sempre necessarie per cagione della soggetta materia.

La conclusione è di due maniere, particolare, & uniuersale.

Lemma.

Caso.

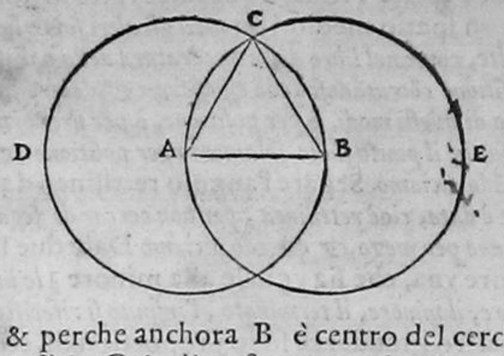
Corollario.

Instanza.

Deduttione.

PROBLEMA I. PROPOSITIONE I.

Sopra vna data retta linea terminata constituire il triangolo equilatero.



Post. 3.

Post primo.

Diff. 15.

1.com.not.

Sia la data retta linea terminata A B. bisogna sopra essa constituire il triangolo equilatero. dal centro A con l'interuallo A B descriuasi il cerchio B C D. & similmente dal centro B con l'interuallo B A descriuasi vn'altro cerchio A C E, & dal punto C, nel quale i cerchi fra loro si segano alli punti A B siano tirate le linee rette C A C B. perche dunque A è centro del cerchio C B D, sarà la A C vguale alla A B. & perche anchora B è centro del cerchio A C E, sarà la B C vguale alla B A, & fù la C A dimostrata vguale alla A B. adunque l'vna & l'altra di esse C A C B è vguale alla A B. ma quelle cose che sono vguali ad vna medesima, sono anchora fra loro vguali. onde la C A è vguale alla C B, & le tre linee C A A B B C sono vguali fra loro. il triangolo dunque A B C, è equilatero, & è constituito sopra la data retta linea terminata A B, il che bisognaua fare.

IL COMMANDINO.

La Propositione è composta del dato, & del quesito.

Espositione.

Determinatione.

Construttione.

Le dimande sono utili alle construttioni, & le communi notitie alle demonstrationi.

Dimostratione.

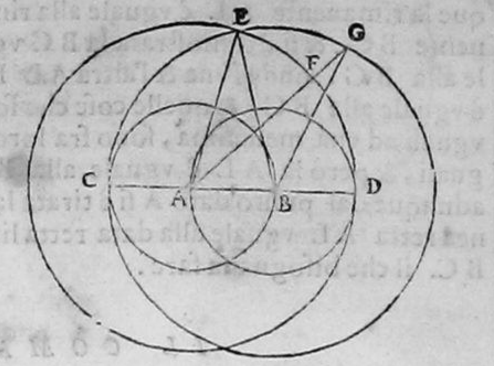
Conclusione particolare.

Conclusione uniuersale.

Il che bisogna ua fare.

Il che bisogna ua dimostrare

Tutte le cose, che si sono dette di sopra, si possono considerare in questo primo problema, per cioche essere problema appare manifestissimamente, imponendoci che trouiamo il nascimento del triangolo equilatero, & la Propositione è composta del dato, & del quesito, perche si dà la retta linea terminata, & si cerca in qual modo si possa constituire sopra essa il triangolo equilatero. il dato và innanzi & poi seguita il quesito. si che possiamo fare etiandio il congiunto, se la linea retta è terminata, può essere che sopra essa si constituisca il triangolo equilatero, per cioche non essendo retta, non si potrà constituire il triangolo, qual è composto di linee rette, & medesimamente non essendo terminata, conciosiacosa che l'angolo non si possa fare, se non ad vn punto, & la linea infinita non ha punto alcuno. doppo la Propositione seguita l'Espositione Sia la data retta linea terminata A B] *& vedi l'Espositione spiegare solamente il dato, & non aggiungerui ancho il quesito. doppo la quale seguita la Determinatione,* bisogna sopra essa constituire il triangolo equilatero] *la Determinatione è in vn certo modo causa di attentione, percioche ella ci rende piu attenti alla dimostratione, pronuntiando il quesito, si come l'Espositione più docili, ponendoci dinanzi à gli occhi il dato. doppo la Determinatione seguita la Construttione,* dal centro A con l'interuallo A B descriuasi il cerchio BCD: & similmente dal centro B con l'interuallo B A, descriuasi vn'altro cerchio ACE, & dal punto C, nel quale i cerchi fra loro si segano, alli punti A B, siano tirate le linee rette C A C B] *& vedi che nella Construttione vso i postulati, ò uer dimande, cioè da qual si voglia punto à qual si voglia punto tirare vna linea retta, & da qual si voglia centro & interuallo descriuere il cerchio, & vniuersalmente le dimande alle Construttioni, & gli Assiomi ò vogliam dire communi notitie alle Dimostrationi apportano vtilità. poi seguita la Dimonstratione, la quale dalla diffinitione del cerchio, & da quello Assioma, le cose che sono vguali alla medesima, sono fra loro vguali, conclude le tre linee rette C A A B B C, essere vguali fra loro. onde si raccoglie che il triangolo A B C è equilatero, & questa è la prima Conclusione, che seguita la Espositione. doppo questa è la Conclusione vniuersale, &* è constituito sopra la data retta linea terminata A B,] *percioche ò facciasi data la doppia, ò tripla ò vero alcun'altra maggiore ò minore di quella, che hora si è proposta, conuerrano le medesime Construttioni, & Dimonstrationi. à questo vi ha poi aggiunto,* il che bisognaua fare] *dimostrando, che era Conclusione problematica, cioè pertinente à problemi, percioche ne theoremi egli pone,* il che bisognaua dimostrare] *conciosiacosa che quelle diano ad intendere che si fa, & queste che si dimostra, & troua qualche cosa. habbiamo dunque voluto in questo primo problema solo essaminare, & far chiare tutte le cose. ma bisogna poi che co* *loro, i quali leggeranno, cerchino le medesime cose ne gli altri, & quali di esse si piglino, & quali si lascino, & quello che è dato in quanti modi si dia, & da quali principij ò le construttioni, ò le dimostrationi dipendano, percioche la diligente contemplatione di queste cose apporta non poca essercitatione, & cognitione delle ragioni geometriche. ma forse non sarà se non vtile constituire anchor gli altri triangoli, & prima l'equicrure. Sia dunque la A B, nella quale bisogni constituire il triangolo equicrure, & descriuansi i cerchi, come nell'equilatero, & prolunghisi la A B dall'vna & l'altra parte ne punti C D. la C B dunque è vguale alla A D. onde dal centro B, con l'interuallo C B descriuasi il cerchio C E. similmente dal centro A, con l'interuallo D A, descriuasi il cerchio D E, & dal punto E, nel quale si segano i cerchi, alli punti A B, siano tirate le E A E B. perche dunque la E A è uguale alla A D, & la E B alla B C, & è uguale A D à B C, sarà etiandio la E A vguale alla E B. ma sono maggiori di A B. adunque il triangolo, A B E è equicrure. il che bisognaua fare. ma sia proposto constituire il triangolo scaleno nella data retta linea A B, & descriuansi i cerchi dalli centri, & interualli, come di sopra, & piglisi nella circunferenza del cerchio; che ha per centro A, il punto F, & tirata la A F prolunghisi nel punto G, & giungasi G B. perche dunque A è centro del cerchio D E, sarà la A F vguale alla A D. onde la A G è maggiore di A D, cioè di G E, percioche esso B è centro del cerchio C E. adunque la G B, è vguale alla B C, & però è maggiore della B A. ma la G A è maggiore di G B. le tre dunque G B B A A G, sono disuguali. onde il triangolo è scaleno, & si sono costituiti i tre triangoli. queste cose sono diuulgate. ma in cio quello si troua di bello, il triangolo equilatero, vguale da tutte le parti, in vn sol modo constituirsi, & l'equicrure, che hà in due lati soli l'vgualità, constituirsi in due modi, perche la linea retta data ò uero è minore di amendue le vguali, come noi l'habbiamo posta, ò vero è maggiore; & il scaleno da tutte le parti disuguale constituirsi in tre modi, conciosiacosa che la data retta linea ò vero sia maggiore di tutte tre, ò minore, ò vero maggiore di vna, & minore dell'altra; & ci possiamo essercitare in ciascuna di queste positioni, ò prolungando ò diminuendo: ma à noi bastino le cose, che si sono proposte, & se considereremo vniuersalmente, diremo de problemi altri constituirsi semplicemente, & in vn sol modo, altri in molti modi, altri infinitamente: & quelli, che si constituiscono semplicemente (come dice Amphinomo) chiamiamo ordinati, & quelli che in molti modi, medij: quelli poi che infinitamente, disordinati. vedi l'altre cose Appò Proclo, percioche queste forse sono basteuoli, ò piu presto souerchie.*



Constitutione del triangolo equicrure.

Constitutione del triangolo scaleno.

Il triangolo equilatero si cõstituisce in un sol modo. Lequicrure in due modi. Il scaleno in tre modi.

Problemi ordinati medij disordinati.

PROBLEMA II. PROPOSITIONE II.

Da vn punto dato tirare vna linea retta vguale ad vn'altra linea data.

Sia il dato punto A, & la data retta linea B C. bisogna dal punto A tirare vna linea retta uguale alla retta B C. tirisi dal punto A al B la retta linea A B, & sopra essa constituiscasi il triangolo equilatero D A B, & si prolunghino per diritto alle D A D B le linee rette A E B F, & dal centro B, con l'interuallo B C descriuasi il cerchio C G H, & similmente dal centro D, con l'interuallo

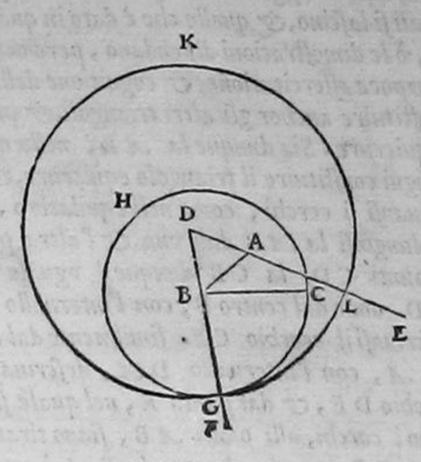
Post. primo. Prop. prima. Post. 2: 3.

DG, descriuasi il cerchio GKL. perche dunque il ponto B è centro del cerchio CGH, sarà la BC uguale alla BG. oltre à ciò perche D è centro del cerchio GKL, sarà la DL vguale alla DG: delle quali la DA è vguale alla DB. adunque la rimanente AL è vguale alla rimanente BG. & si è dimostrata la BC vguale alla BG. onde l'vna & l'altra AL BC è vguale alla BG. & quelle cose che sono vguali ad vna medesima, sono fra loro vguali, & però la AL è vguale alla BC. adunque dal punto dato A si è tirata la linea retta AL vguale alla data retta linea BC. il che bisognaua fare.

Diff.15.

com.not.3.

com.not.1.

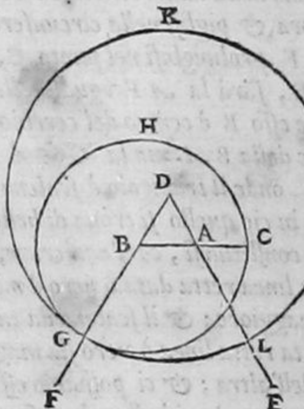


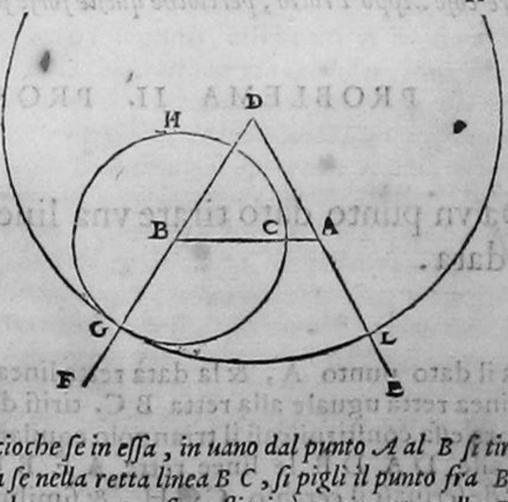
IL COMMANDINO.

De problemi, & theoremi, altri sono senza caso, altri hanno molti casi.

De problemi, & theoremi altri sono senza caso, altri hanno molti casi. quelli dunque c'hanno la medesima forza, che passa per molte descrittioni, & che mutando positioni seruano la medesima ragione del dimostrare, si dicono hauere il caso. ma quelli, che procedono secondo vna positione, & vna construttione sola, sono senza caso, perciochè semplicemente il caso si considera intorno alla construttione così de theoremi, come de problemi. il secondo problema dunque ha molti casi, & il punto si dà in esso per positione, conciosiacosa che in quel modo solo, si possa dare, & si dà la linea in specie, & grandezza, & si cerca da vn dato punto tirare vna retta linea vguale ad vn'altra retta, douunque il punto sia posto. & appare quel punto essere nel medesimo piano, nel quale è anchor la linea retta, & non in alto, perciochè bisogna imaginarsi, che à tutti i problemi, & theoremi de piani gli ne sia sottoposto vno. & è manifesto che i casi di questo problema si fanno secondo la differente positione dal punto dato, conciosiacosa che il punto ò si ponga fuori della retta linea, ò in essa, & se in essa, ò in vno de suoi termini, ò fra i termini, & se fuori della retta linea, ò uero è posto da i lati in maniera, che tirata da quello al termine vna linea retta faccia angolo, ò vero per diritto di essa, ò dinanzi, ò di dietro, si che la linea prolungandosi peruenga al detto punto. Euclide ha preso il punto dato fuori della linea retta & da i lati, perciochè se in essa, in uano dal punto A al B si tirarebbe vna linea retta, essendo già tirata. ma se nella retta linea BC, si pigli il punto fra BC, ò per diritto ad essa prolungata la BC nel punto A, si constituirà parimente nella BA il

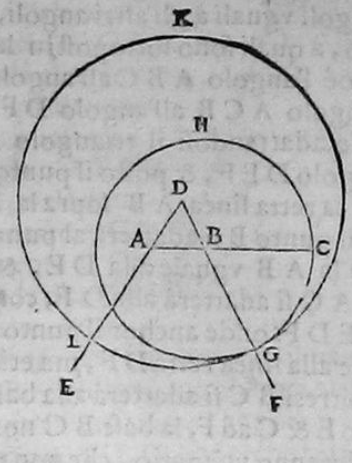
Il secondo problema ha molti casi.





triangolo equilatero D A B, & i lati ſi prolungheranno nel medeſimo modo, & ſarà la medeſima dimoſtratione. & ſe in vece del triangolo equilatero, ci piacerà di vſare lo equicrure, ſeguiranno nondimeno le medeſime coſe. finalmente ſe il punto ſarà dato in vn termine della linea retta, nõ haueremo biſogno ne del triangolo ne dell'altro cerchio, ma ſolo la deſcrittione di vn cerchio baſterà, perche ſe dal centro, cioè dal dato termine, nel quale è il punto dato, con l'interuallo rimanente ſi deſcriua il cerchio, quante linee rette ſaranno da eſſo tirate alla circunferenza, tutte faranno il problema.

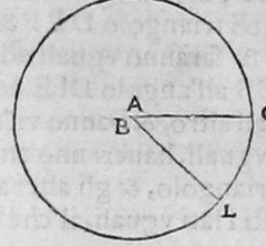
In uece del triãgolo equi latero poſsiamo uſare lo equicrure.



PROBLEMA III.

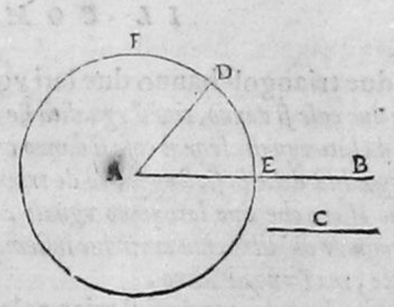
PROPOSITIONE III.

Date due linee rette diſuguali, dalla maggiore tagliarne vna vguale alla minore.



Siano date due linee rette diſuguali A B C, delle quali A B ſia maggiore. biſogna dalla maggiore A B tagliare vna linea retta vguale alla minore C. tiriſi dal punto A la linea retta A D, vguale alla C, & dal centro A con l'interuallo A D deſcriuaſi il cerchio D E F. & perche A è centro del cerchio D E F, ſarà la A E vguale alla A D. ma anchor la C è vguale alla A D. adunque l'vna, & l'altra delle A E C ſarà vguale alla A D, & però anchor la A E è vguale alla C. date dunque due linee rette diſuguali A B C dalla A B ſi è tagliata la A E vguale alla minore C. il che biſognaua fare.

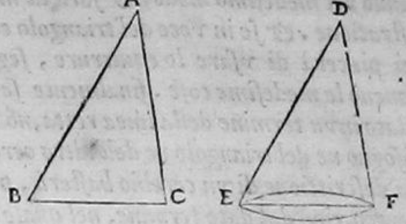
per lanteceden te.
poſt. 3.
diff.15.
com.not.1.



THEOREMA I. PROPOSITIONE IIII.

Se due triangoli hanno due lati vguali à due lati, l'vno all'altro, & hanno vn'angolo vguale ad vn'angolo, che è contenuto da linee rette vguali, haueranno anchor la baſe vguale alla baſe, & il triangolo ſarà vguale al triangolo, & gli altri angoli à gli altri angoli, l'vno all'altro, à quali ſono ſottopoſti i lati vguali.

Siano due triangoli A B C D E F, quali habbiano due lati A B A C vguali à due lati D E D F, l'vno all'altro, cioe il lato A B vguale al lato D E, & il lato A C à D F, & l'angolo B A C vguale all'angolo E D F. Dico anchor la baſe B C esser vguale alla base E F, & il triangolo A B C vguale al triangolo D E F, & gli altri angoli vguali à gli altri angoli, l'vno all'altro, à quali sono sottoposti i lati vguali, cioè l'angolo A B C all'angolo D E F, & l'angolo A C B all'angolo D F E, percioche adattandosi il triangolo A B C al triangolo D E F, & posto il punto A sopra D, & la retta linea A B sopra la D E, anchor il punto B si adatterà al punto E, per essere la A B vguale alla D E, & adattandosi la A B alla D E, etiandio la linea retta A C si adatterà alla D F, conciosiacosa che l'angolo B A C sia vguale all'angolo E D F. onde anchor il punto C si adatterà ad F, perche la linea retta A C è vguale alla linea retta D F, ma etiandio il punto B si adattaua ad E. adunque la base altresì B C si adatterà alla base E F, percioche se adattandosi il punto B al punto E & C ad F, la base B C non si adatterà alla base E F, due linee rette comprenderanno vn spatio, che non può essere. adunque la base B C si adatterà alla base E F, & sarà vguale ad essa. onde anchor tutto il triangolo A B C si adatterà à tutto'l triangolo D E F & gli sarà vguale, & gli altri si adatteranno à gli altri angoli, & saranno vguali ad essi, cioè l'angolo A B C all'angolo D E F, & l'angolo A C B all'angolo D F E. adunque se due triãgoli hanno due lati vguali à due lati l'vno all'altro, & hanno vn'angolo vguale ad vn'angolo, che è contenuto da linee rette vguali, haueranno anchor la base vguale alla base, & il triangolo sarà vguale al triangolo, & gli altri angoli à gli altri angoli l'vno all'altro, à quali sono sottoposti i lati vguali. il che bisognaua dimostrare.



B

10. com. not.

IL COMMANDINO.

Se due triangoli hanno due lati vguali à due lati, l'vno all'altro] *In questa propositione due cose si danno, cioè l'vgualità de due lati, & l'vgualità di quegli angoli, che sono contenuti da lati vguali, lequal cose si danno in proportione come è manifesto, tre cose poi si cercano, l'vgualità delle basi, l'vgualità de triangoli, & l'vgualità de gli angoli rimanenti. ma perche può essere che due lati siano vguali à due lati, & il theorema non sia vero, non essendo l'vno vguale all'altro, ma amendue insieme, & però si aggiunse i lati essere vguali, non semplicemente, ma l'vno all'altro.*

B

Percioche adattandosi il triangolo A B C sopra D E F, & posto il punto A sopra D, & la linea retta A B sopra la D E, anchor il punto B sarà sopra il punto E per essere la A B vguale alla D E, & il rimanente.

Il modo di dimostrare ponendo una figura sopra l'altra è assai in uso appo i mathematici.

Questo modo di dimostratione, che si fa ponendo vna figura sopra l'altra, oltre che è approuato da Proclo peritissimo delle scienze mathematiche, è ancho assai in vso appo i mathematici, percioche Archimede l'adoperò non solo nelle figure piane, come nel libro del centro della grauità de piani, ma etiandio nelle solide, come nel libro delli conoidi & spheroidi.

THEOREMA II. PROPOSITIONE V.

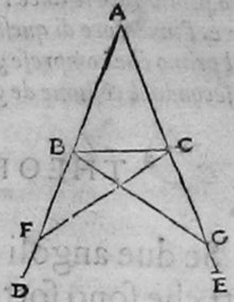
Gli angoli de triangoli equicruri sopra la base sono vguali fra loro, & prolungandosi le linee rette vguali, gli angoli sotto la base saranno anchora fra loro vguali.

Sia il triangolo equicrure A B C, c'habbia il lato A B vguale al lato A C, & si prolonghino le rette linee B D C E per diritto alle A B A C. Dico l'angolo A B C esser vguale all'angolo A C B, & l'angolo C B D all'angolo B C E. pigli si nella linea B D qual si voglia punto F, & dalla maggiore A E taglisi A G

3. di questo.

vguale

vguale alla minore A F; & congiunganſi F C G B. Perche dunque la A F è vguale alla A G, & la A B alla A C, le due F A A C ſono vguali alle due G A A B, l'vna all'altra, & contengono l'angolo commune F A G. onde la baſe F C è vguale alla baſe G B; & il triangolo A F C vguale al triangolo A G B, & gli altri angoli ſaranno vguali à gli altri angoli, l'vno all'altro, à quali ſono ſottopoſti i lati vguali, cioè l'angolo A C F vguale all'angolo A B G, & l'angolo A F C all'angolo A G B. & perche tutta la linea A F è vguale à tutta la A G, delle quali la parte A B è vguale alla parte A C, ſarà la rimanente anchor B F vguale alla rimanente C G. ma la F C fù moſtrata vguale alla G B. adunque le due B F F C ſono vguali alle due C G G B l'vna all'altra, & l'angolo B F C vguale all'angolo C G B, & la baſe di eſsi B C è commune. il triangolo dunque B F C ſarà vguale al triangolo C G B, & gli altri angoli à gli altri angoli l'vn' all'altro, à quali ſono ſottopoſti i lati vguali. adunque l'angolo F B C, è vguale all'angolo G C B, & l'angolo B C F all'angolo C B G. & perche tutto l'angolo A B G, è ſtato dimoſtrato vguale à tutto l'angolo A C F, de quali l'angolo C B G, è vguale all'angolo B C F, ſarà il rimanente A B C vguale al rimanente A C B. & ſono ſopra la baſe del triangolo A B C, & fu dimoſtrato l'angolo F B C vguale all'angolo G C B, quali ſono ſotto la baſe. gli angoli dunque de triangoli equicruri ſopra la baſe ſono vguali fra loro, & prolungate le rette linee vguali, gli angoli ſotto la baſe ſaranno anchora fra loro vguali, il che era biſogno di moſtrare.



Per l'antecedente.

3. com. not.

Per l'antecedente.

3. com. not.

IL COMMANDINO.

De theoremi altri ſono ſemplici, altri compoſti, & dico ſemplici quelli, che non ſi poſſono diuidere ſecondo le poſitioni, & concluſioni, hauendo vn dato, & vn queſito ſolo, come ſe Euclide, haueſſe detto in queſta forma. ogni triangolo equicrure ha gli angoli, che ſono ſopra la baſe vguali. I theoremi compoſti ſono quelli, che eſſendo compoſti di più, ò vero hanno le poſitioni, ò le concluſioni compoſte, ò vero amendue. & delli compoſti, altri ſono compleſſi, altri incõpleſſi. incõpleſſi ſono quelli che non poſſono eſſere diuiſi in ſemplici theoremi, come è il quarto theorema, conciosiacoſa che in eſſo, & il dato ſia compoſto, & il queſito, ma il dato non può eſſere diuiſo in ſemplici, di modo che ſi facciano più theoremi, percioche ſe i triangoli habbiano gli angoli vguali ò quello ſolo che è alla cima, non auuengono l'altre coſe. compleſſi poi ſono quelli, che ſi diuidono in ſemplici, come quello theorema, [i triangoli, & parallelogrammi, che hanno la medeſima altezza, ſono fra loro, come le baſi.] *percioche puo eſſere che diuidendo diciamo coſi, i triangoli c'hanno la medeſima altezza ſono fra loro, come le baſi, & ſimilmente i parallelogrammi, & de tutti i compoſti altri ſono compoſti ſecondo la concluſione, hauendo principio, & origine dalla medeſima poſitione, altri ſecondo le poſitioni, & danno à tutti la medeſima concluſione, & altri ſono compoſti ſecondo le concluſioni, & poſitioni. la compoſitione ſecondo la concluſione, è nel quarto theorema, percioche in eſſo tre coſe ſi concludono, cioè l'vgualità delle baſi, i triangoli vguali, & gli altri angoli vguali à gli altri, à quali ſono ſottopoſti i lati vguali. ſecondo le poſitioni ſi ritroua la compoſitione nel theorema, che è commune à triangoli, & parallelogrammi, che hanno la medeſima altezza, & ſecondo amendue in quello, i diametri de cerchi, & dell' ellipſi diuidono per mezo, & li ſpatij & le linee che delli ſpatij contengono. oltre à ciò de theoremi compleſſi altri ſono vniuerſali, altri dalle coſe particolari concludono l'vniuerſale, & li Geometri per la breuità & per le reſolutioni ſi hãno imaginate queſte compoſitioni, percioche molte coſe eſſendo incompoſte non ſi reſoluono, & le compoſte ſolo danno commedità alla reſolutione, la quale va verſo i principij. hauendo dunque conſiderate queſte coſe, appare il quinto theorema eſſere compoſto coſi ſecondo il dato, come ſecondo il queſito; & l'vno, & l'altro de quelli che ſi compongono è perfetto, & vero. la onde anchor*

Theoremi ſemplici.

Theoremi compoſti.

De theoremi compoſti altri ſono compleſſi; altri incompleſsi.

Theoremi cõpleſsi.

Theoremi cõpoſti ſecondo la concluſione

Theoremi cõpoſti ſecondo le poſitioni.

Theoremi cõpoſti ſecondo le concluſioni, & poſitioni.

De theoremi compleſsi altri ſono vniuerſali, altri dalle coſe particolari concludono l'vniuerſale.

la resolutione è vera nell'vno, & nell'altro. percioche ò siano gli angoli sopra la base vguali, ò vero prolungate le linee rette vguali, gli angoli sotto la base siano vguali, sarà il triangolo equi crure. l'inuentore di questo theorema fu Thalete, come narra Proclo, percioche si dice ch'egli fu il primo che comprese gli angoli del triangolo equicrure che sono sopra la base, essere vguali, & secondo il costume de gli antichi gli angoli vguali chiamò simili.

Thalete fu l'inuentore del quinto theorema. Gli antichi gli angoli vguali chiamarono simili.

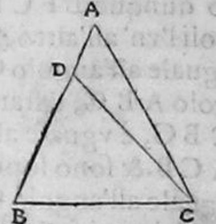
THEOREMA III. PROPOSITIONE VI.

Se due angoli d'vn triangolo siano vguali fra loro, etiandio i lati che sono sottoposti à gli vgual'angoli, sarāno fra loro vguali.

Sia il triangolo A B C, che habbia l'angolo A B C vguale all'angolo A C B. Dico anchor il lato A B essere vguale al lato A C, percioche se la A B non è vguale alla A C, vna di esse sarà maggiore. sia maggiore la A B, & dalla maggiore A B taglisi la D B vguale alla minore A C, & giungasi D C. perche dunque la D B è vguale alla A C, & la B C è commune, saranno le due D B B C vguali alle due A C C B, l'vna al l'altra, & l'angolo D B C vguale all'angolo A C B. onde la base D C è vguale alla base A B, & il triangolo D B C vguale al triangolo A C B, il minore al maggiore, che è inconueniente. non è dunque la A B disuguale alla A C, ma sarà vguale. & però se due angoli d'vn triangolo siano vguali fra loro, etiandio i lati, che sono sottoposti à gli vgual'angoli, sarāno fra loro vguali. il che bisognaua dimostrare.

3. di questo.

4. di questo.



IL COMMANDINO.

Il presente theorema principalmente dimostra queste due cose, cioè la Conuersione de theoremi, & la Deduttione all'impossibile, percioche si conuerte col precedente theorema, & si dimostra per la deduttione all'impossibile. la Conuersione appo li Geometri si dice propriamente, quando le conclusioni, & le positioni scambieuolmente si trasmutano ne theoremi, & quello che è conclusione del primo diuenta positione nel secondo, & al contrario la positione è posta in luogo della conclusione, come in quello. [gli angoli de triangoli equicruri che sono sopra la base sono vguali.] *La positione è il triāgolo equicrure, la Conclusione poi è l'vgualità de gli angoli, che sono sopra la base, & de quali gli angoli sopra la base sono vguali, quelli sono equicruri, come in questo theorema, nel quale la positione è l'vgualità de gli angoli, che sono sopra la base, & la Conclusione è l'vgualità de lati, che sono sottoposti à gli vguali angoli. vi è anche vn'altra conuersione secondo vna certa trasmutatione solamente de composti, percioche se il theorema sia composto, & cominci da piu positioni, & termini nella conclusione, pigliando la conclusione, & vna delle positioni, ò anche più, fanno conclusione l'vna delle positioni rimanēti. & in questo modo l'ottauo si conuerte col quarto theorema, conciosiacosa che in quello si pongano due lati uguali, & l'angolo vguale all'angolo, che è contenuto da vgual lati, & si cōclude la base esser vguale alla base. ma nell'ottauo si pōgono due lati vguali, & la base vguale alla base, & si conclude l'angolo contenuto da vgual lati essere vguale essendo dunque due conuersioni, quella che è così propriamente detta è vniforme, & determinata, l'altra è varia che non in vn solo cōuerte, ma in molti, per la moltitudine delle positioni, che sono ne theoremi composti. & de theoremi che si conuertono altri si sogliono chiamare precedenti, altri conuersi, percioche quādo ponendo alcun genere dimostrano qualche accidente di esso, questo si chiama precedente, & quando per il contrario fanno positione l'accidente, & conclusione il genere, al quale quel lo auuiene si chiama conuerso, come* [ogni triangolo equicrure ha gli angoli che sono sopra la base vguali] *questo è precedente* [ogni triangolo che ha due angoli vguali, hà anchor i lati che sono sottoposti à gli vgual'angoli, vguali, & è equicrure] *que-*

Questo theorema si conuerte col precedente. Conuersione appo li Geometri.

l'ottauo theorema è conuerso del quarto.

De theoremi che si conuertono altri si chiamano precedenti, altri conuersi.

sto

sto è conuerso. & ciò basti hauer detto delle cõuersioni geometriche. ma le Deduttioni all'impossibile terminano in euidentissimo inconueniente, & l'opposto del quale tutti confessano. accade alle volte che alcune di esse terminano nelle cose opposte alle communi notitie, ò ver postulati, ò positioni, & altre terminano in quelle cose, che contradicono alle già dimostrate, perche il sesto theorema dimostra non poter farsi cioche auuiene, distruggendo quella notitia cõmune [ogni tutto è maggiore della sua parte] *ma l'ottauo termina certamẽte nell'impossibile, ma non però distrugge la notitia commune, ma quello che si è dimostrato nel settimo theorema, percioche quello che il settimo hà negato esser possibile, questo affirmando dimostra seguitare à quelli che non concedono il quesito. ma ogni Deduttione all'impossibile pigliando quello che contrasta col quesito, & ponendolo procede innanzi sin tanto che s'incontra in vn manifesto inconueniente. & per questo destruggendo la positione conferma quello che da principio si cercaua. percioche, è da sapere che tutte le dimostrationi mathematiche ò sono dalli principij, ò vero alli principij, come anchora dice Porphyrio, & quelle che sono dalli principij similmente sono di due maniere, perche ò vero dipendono dalle communi notitie, & dalla chiarezza sola, che per se stessa ne fa fede, ò vero dalle cose dimostrate prima. & quelle che sono alli principij ò vero gli pongono ò gli destruggono. quelle che gli pongono si chiamano Resolutioni, alle quali sono opposte le Compositioni, percioche è possibile da quei principij ordinatamente procedere sino al quesito, & questo non è altro, che compositione. quelle che destruggono principij si nominano Deduttioni all'impossibile, perche l'officio loro è destruggere qualche cosa di quelle, che sono concesse & manifeste. & in ciò si fa vn syllogismo, che non è il medesimo con quello della resolutione, conciosiacosa che nelle deduttioni all'impossibile si concluda per lo secondo modo delle argomentationi hypothetiche, in questa forma. Se de triangoli c'hanno due angoli vguali, i lati sottoposti à detti angoli non sono vguali, il tutto è vguale alla parte. ma ciò non può essere. adunque de triangoli c'hanno due angoli vguali, i lati anchora sottoposti à gli vgual'angoli, saranno vguali. Euclide vsa la conuersione nella propositione, perche pigliando la conclusione del quinto theorema, come dato, vi aggiunge la positione di quella come quesito, & vsa la deduttione all'impossibile nella construttione, & dimostratione. Queste cose sono cauate da Proclo.*

Le Deduttioni all'impossibile terminano in euidentissimo inconueniente.

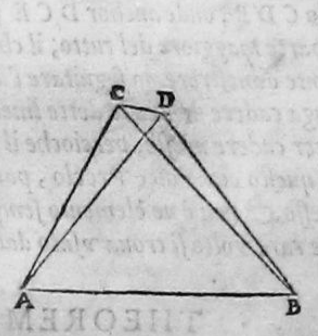
Le dimostrationi mathematiche ò sono dalli principij, ò uero alli principij. Resolutioni. Cõpositioni.

Deduttioni all'impossibile.

THEOREMA IIII. PROPOSITIONE VII.

Nella medesima retta linea non si constituiranno in diuersi punti due linee rette vguali à due medesime rette linee, l'vn'al l'altra, dalle medesime parti, c'habbiano i medesimi termini che le prime.

Constituiscansi se fia possibile, nella medesima retta linea A B à due medesime linee rette A C C B due altre rette linee vguali A D D B l'vna all'altra in diuersi punti C D, dalle medesime parti come C D, c'habbiano li medesimi termini AB, che le prime rette linee, di modo che la C A sia vguale alla D A, qual ha il medesimo termine A, & la C B sia vguale alla D B, che ha il medesimo termine B, & giungasi C D. perche dunque la A C è vguale alla A D, sarà anchor l'angolo A C D vguale all'angolo A D C. onde l'angolo A D C è maggiore dell'angolo D C B. & però l'angolo C D B sarà molto maggiore dell'angolo D C B. oltre à cio perche la C B è vguale alla D B, etiandio l'angolo C D B sarà vguale all'angolo D C B. ma si è dimostrato assai maggiore di esso, che è impossibile. adunque nel la medesima retta linea nõ si constituiranno in diuersi punti due linee rette vguali à due medesime rette linee, l'vn'all'altra, dalle medesime parti c'habbiano i medesimi termini che le prime. il che bisognaua dimostrare.



5. di questo.

IL COMMANDINO.

Le propositioni de theoremi arithmetici, & geometrici in gran parte sono affirmationi.

Ha questo theorema vna cosa rara in se, che non suole auuenire spesso nelle propositioni, che partoriscono la scienza, percioche il formarsi per negatione, & non per affirmatione non è proprio loro, essendo le propositioni de theoremi arithmetici, & geometrici in gran parte affirmationi, & la cagione è (come dice Aristotele) che l'vniuersale affirmatiuo conuiene molto alle scienze, come piu atto, & che non hà bisogno della negatione. ma l'vniuersale negatiuo ha bisogno anchora della affirmatione, percioche dalle orationi negatiue sole non si fa, ne dimostratione, ne argomentatione alcuna, & però le scienze dimostratiue concludono molte affirmationi, & rare uolte si seruono del le conclusioni negatiue. cosi scriue Proclo. ma il theorema ha molti casi, percioche il punto D ò cade fuori delle linee AC CB, ò dentro, ò in esse, & se fuori, questo si fa in due modi ò uero l'una delle linee A C C B, sega l'vna delle AD DB, ò niuna di queste sega alcuna di quelle. caggia prima di fuori, & la A D seghi C B, come appare nella prima figura, & giungasi C D. alla quale construttione conuiene la dimostratione di Euclide. ma perche ha paruta ad alcuni breue & in vn certo modo oscura, si spiegarà più facilmente, & chiaramente cosi. perche la A C è vguale alla A D, sarà l'angolo A C D vguale all'angolo A D C. ma l'angolo ACD è maggior dell'angolo D C E, essendo il tutto maggiore della sua parte. adunque l'angolo A D C è maggiore dell'angolo D C B, & l'angolo C D B per la medesima ragione è maggiore dell'angolo A D C. onde è necessario che l'angolo C D B sia assai maggiore dell'angolo D C B. oltre à ciò perche la B C, è vguale alla B D, sarà anchor l'angolo C D E vguale all'angolo D C E. ma si è dimostrato assai maggiore. il che non è possibile. similmente si dimostrerà seguitare il medesimo inconueniente, se la linea retta B D seghi la A C. caggia poi il punto D fuori delle linee A C C B, di maniera che non sia alcuna che seghi l'altra; & prolunghinsi le linee rette A C A D ne punti E F. perche dunque la A C è vguale alla A D, l'angolo A C D sopra la base sarà vguale all'angolo A D C, & prolungate le A C AD sarà l'angolo F D C sotto la base, vguale all'angolo D C E. similmente essendo la B C vguale alla B D, l'angolo B C D è vguale all'angolo B D C. ma l'angolo F D C è maggiore dell'angolo C D B. onde anchor D C E sarà maggiore di D C B, cioè la parte maggiore del tutto, il che è impossibile. non altrimente dimostreremo seguitare l'inconueniente, se il punto D si ponga cadere dentro le dette linee, & finalmente è chiaro non poter cadere in esse, percioche il tutto sarebbe vguale alla parte. questo come dice Proclo, pare vn Lemma dell'ottauo theorema seruendo alla dimostratione di esso, & non è ne elemento semplicemente, ne elementare, percioche non è vtile à più. adunque rare volte si troua vsato dalli Geometri.

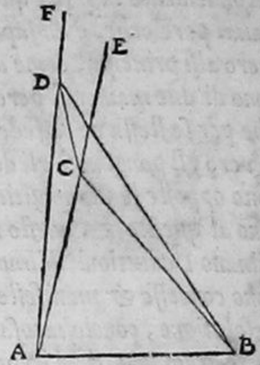
Varij casi del theorema.

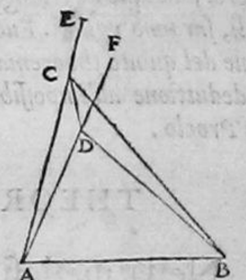
5. di questo.

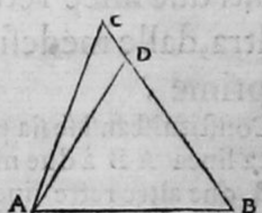
9. com not.

5. di questo.

Questo theorema pare un lemma del seguente.



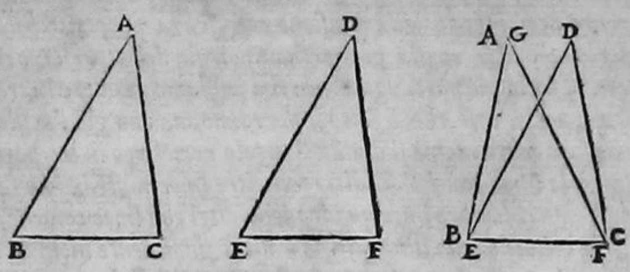




THEOREMA V. PROPOSITIONE VIII.

Se due triangoli hanno due lati vguali à due lati, l'vno all'altro, & hanno la base vguale alla base, haueranno anchora l'angolo contenuto da vgual lati, vguale all'angolo.

Siano due triangoli A B C D E F, che habbiano due lati AB AC vguali à due lati D E D F, l'vno all'altro, di modo che A B sia vguale à D E, & A C à D F, & habbiano la base B C vguale alla base E F. Dico ancor l'angolo B A C



essere vguale all'angolo E D F. percioche stando il triangolo A B C sopra il triangolo D E F, & posto il punto B sopra E, & la linea retta B C sopra la E F, etiandio, il punto C sarà sopra il punto F, perche la B C è vguale alla E F. Onde stando B C sopra E F, staranno anchora le B A A C sopra le E D D F. perche se la base B C sarà posta sopra la base E F, & i lati B A A C non siano posti sopra i lati E D D F, ma si permutino, come E G G F, saranno constituiti nella medesima retta linea in diuersi punti due linee rette vguali à due medesime rette linee, l'vna all'altra, dalle medesime parti, che hanno i medesimi termini. ma non si constituiscono, come si è dimostrato. nō è dunque vero che se la base BC è sopra la base E F, non siano i lati B A A C sopra i lati E D D F. adunque conuerranno insieme, & l'angolo B A C sarà sopra l'angolo E D F, & gli sarà vguale. onde se due triangoli hanno due lati vguali à due lati, l'vno all'altro, & hanno la base vguale alla base, haueranno anchora l'angolo contenuto da vgual lati, vguale all'angolo. il che bisognaua dimostrare. per l'antecedēte.

IL COMMANDINO.

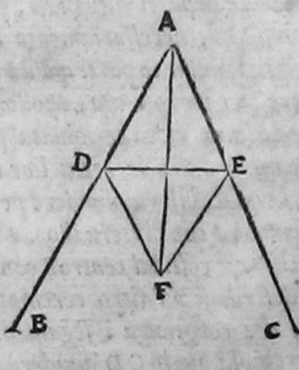
L'ottauo theorema è conuerso del quarto, come fu detto di sopra. ma però non secondo la conuersion propria, percioche non tutta la positione fa conclusione, & tutta la conclusione fa positione, ma mettendo insieme alcuna delle positioni, & delle conclusioni del quarto theorema, dimostra vn certo che delle cose, che in quello furono date. l'ottauo theorema è conuerso del quarto.

PROBLEMA IIII. PROPOSITIONE IX.

Diuidere per mezo vn'angolo rettilineo dato. A

Sia il dato angolo rettilineo B A C, bisogna diuiderlo per mezo. piglisi nella linea A B qual si sia punto D, & dalla linea AC taglisi la A E vguale alla A D, & giunta D E constituiscasi sopra essa il triangolo equilatero D E F, & giungasi A F. Dico l'angolo B A C essere diuiso per mezo dalla linea retta A F; percioche essendo la A D vguale alla A E, & la A F commune, saranno le due D A A F vguali alle due E A A F, l'vna all'altra, & la base D F vguale alla base E F. adunque l'angolo D A F è vguale all'angolo E A F, & però l'angolo rettilineo dato B A C è diuiso per mezo dalla linea retta A F. il che bisognaua fare.

3. di questo.
B
1. di questo.
per l'antecedente.



IL COMMANDINO.

Diuidere per mezo vn'angolo rettilineo dato] *l'angolo si dà in questo luogo nella spetie, cioè che sia rettilineo, & non di altra sorte, percioche per la institutione elementare* A

Per la institutione elementare non si può diuidere per mezo ogni angolo. L'angolo retto si può diuidere in tre parti uguali, ma non già l'acuto se non passiamo all'altre linee miste.

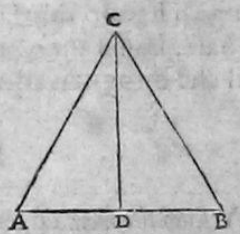
non si può diuidere per mezo ogni angolo, essendo anche dubbio se ogni angolo si possa diuidere per mezo. & il modo della diuisione non senza proposito è stato distinto, conciosiacosa che il diuiderlo in qual si voglia proportione non sia della presente construttione, verbigratia in tre ò quattro, ò cinque parti vguali, perche possiamo diuidere in tre parti l'angolo retto, seruendoci di alcune poche cose, che di sotto si porranno, ma non già l'acuto, se noi non passiamo all'altre linee che sono miste. come si diuida l'angolo rettelineo in tre parti vguali, ci ha insegnato Nicomede con le linee concoidi. altri con altre linee miste hanno fatto il medesimo, cioè quelle che noi possiamo chiamare linee quadranti. altri con linee coniche, come dice Pappo nel quarto libro delle collettioni mathematiche. altri finalmente mossi da linee spirali, delle quali tratta Archimede, nella data proportione hanno diuiso il dato angolo rettilineo. le contemplationi delle qual cose essendo difficili, & principalmente à quelli, che si instituiscono, per hora lasciaremo.

B Et giunta D E constituiscasi sopra essa il triangolo equilatero D E F.

Il medesimo si farà se in luogo dell'equilatero, così in questo, come ne gli altri sequenti constituiremo il triangolo equicrure; & la dimostratione sarà la medesima.

PROBLEMA V. PROPOSITIONE X.

Diuidere per mezo vna data retta linea terminata.



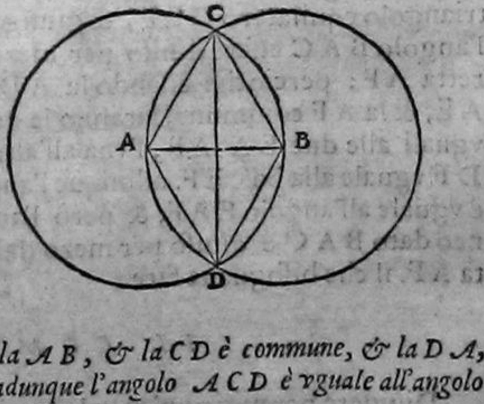
Sia la data retta linea terminata A B, bisogna diuiderla per mezo. constituiscasi sopra essa il triangolo equilatero A B C, & l'angolo A C B diuidasi per mezo con la linea retta C D. Dico la linea retta A B esser diuisa per mezo nel punto D. percioche essendo la A C vguale alla C B, & la C D commune, le due A C C D sono vguali alle due B C C D, l'vna all'altra, & l'angolo A C D è vguale all'angolo B C D. adunque la base A D è vguale alla base B D, & però la linea retta terminata A B è diuisa per mezo nel punto D. il che bisognaua fare.

1. di questo.
l'antecedente.
4. di questo.

IL COMMANDINO.

Questo anchora è theorema, che pone la retta linea terminata, perche non possiamo terminare vna linea da tutte due le parti infinita, ma la infinita da vna sol parte, ouunque si pigli il punto, si diuide in parti disuguali, percioche quella, la quale è nelle medesime parti che la linea retta infinita, necessariamente è maggiore dell'altra finita. resta dunque che si pigli la linea finita da amendue le parti quella che si deue diuidere per mezo. ma Apollonio Pergeo diuide la linea retta terminata per mezo in questo modo. Sia la retta linea terminata A B, la quale bisogni diuidere per mezo. & dal centro A con l'interuallo A B descriuasi il cerchio, & così dal centro B con l'interuallo B A descriuasi vn'altro cerchio, & tirisi la C D, che congiunga i segamenti communi de cerchi, la quale C D diuiderà per mezo la linea retta A B. giungansi A C C B, le quali sono vguali fra loro, essendo amendue vguali alla A B, & la C D è commune, & la D A, è uguale alla D B per la medesima cagione. adunque l'angolo A C D è vguale all'angolo B C D, & però la A B per il quarto theorema è diuisa per mezo.

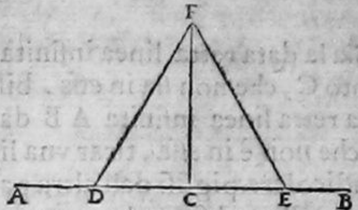
In che modo Apollonio pergeo diuida la linea retta terminata per mezo.
Post. 3.
1. Post.
1. com. not.



PROBLEMA VI. PROPOSITIONE XI.

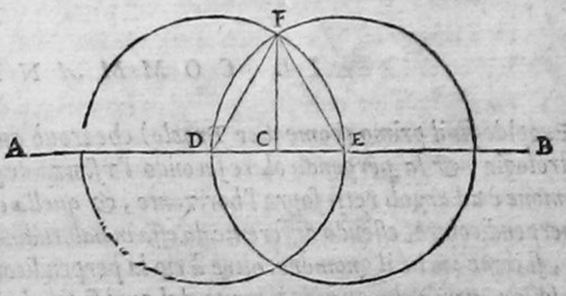
Tirare una linea retta perpendicolare ad una data retta linea da un punto dato in essa.

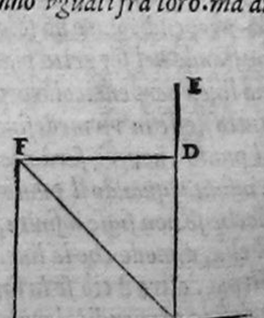
Sia la data retta linea A B, & il punto dato in essa C. bisogna dal punto C tirare vna linea retta perpendicolare alla A B. piglisi nella A C qual si voglia punto D, & alla C D pongasi vguale la C E, & sopra D E constituiscasi il triangolo equilatero F D E, & giungasi C F. 1. di questo. 1. di questo. Dico esser tirata vna linea retta F C perpendicolare alla retta data A B dal punto C dato in essa. percioche essendo la D C vguale alla C E, & la F C commune, saranno le due D C C F vguali alle due E C C F, l'vna all'altra, & la base D F è vguale alla base F E. adunque l'angolo D C F è vguale all'angolo E C F, & sono conse- 8. di questo. guenti. ma quando la linea retta stando sopra vn'altra linea retta fa gl'angoli con- 10. Diff. seguenti vguali fra loro, ciascuno de gli angoli vguali è retto. adunque ciascuno d'essi D C F F C E è retto, & però si è tirata la linea retta F C penpendicolare al la data retta linea A B dal punto C dato in essa. il che bisognaua fare.



IL COMMANDINO.

Tirare vna linea retta perpendicolare ad vna data retta linea da vn punto dato in essa] *la linea è data in specie, il punto in positione, il quale ò sarà nel mezo della linea* Casi del theorema. *retta, ò in vna delle estremità sue. Euclide l'ha preso in mezo della linea retta. ma se si pigli in vna delle estremità, ò prolongando essa construiremo il remanente nel medesimo modo, ò vero altrimente asseguiremo quel che haueuamo proposto. ma Apollonio tira la linea retta perpendicolare in questo modo.* In che modo Apollonio tiri la linea retta perpēdicolare: *Sia la data linea retta A B, & il dato punto in essa C, & nella linea A C preso qual si voglia punto D, dalla C B, taglisi la C E vguale alla C D,* 3. di questo. 3 post. *& dal centro D con l'interuallo D E descriuasi il cerchio. & similmente dal centro E con l'interuallo E D descriuasi vn'altro cerchio. & dal punto F nel quale i cerchi insieme si segano, tirisi F C.* 1. post. *Dico F C esser perpendicolare. percioche giungendosi F D F E saranno vguali fra loro. ma anchor le D C C E sono vguali, & la F C è commune. onde per l'ottauo theorema gli angoli nel punto C necessariamente saranno vguali fra loro. ma se si pigli il punto nell'estremità della linea retta, cosi giudica Proclo che si debba fare.* Tirare la perpendicolare quando il punto è nella estremità della linea retta. *Sia la linea retta A B, & il punto dato A, & piglisi nella A B qual si voglia punto C, dal quale tirisi la C E perpendicolare alla A B, come egli ci ha insegnato, & da essa taglisi la C D vguale alla A C,* 3. di questo. *& l'angolo C sia diuiso per mezo con la linea retta C F,* 9. di questo. *poi dal punto D tirata la perpendicolare alla E C s'incontri con la linea retta C F nel punto F, & giungasi F A. Dico l'angolo A esser retto. percioche essendo la D C vguale alla C A, & la C F commune, & contenendo gli angoli vguali, conciosiacosa, che l'an*

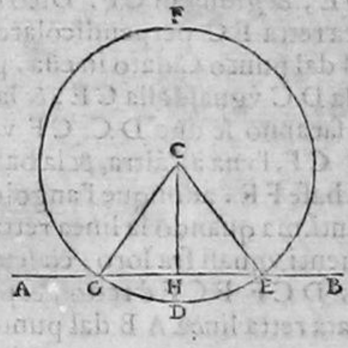




4. di questo. *golo C sia diuiso per mezo; sarà anchor la D F vguale alla F A, & parimente tutte vguali à tutte per il quarto theorema. onde etiandio l'angolo A è vguale all'angolo D. adunque l'angolo A sarà retto. il che bisognaua fare.*

PROBLEMA VII. PROPOSITIONE XII.

Sopra vna data retta linea infinita da vn punto dato, che non sia in essa, tirare vna linea retta perpendicolare.



Sia la data retta linea infinita A B, il dato punto C, che non sia in essa. bisogna sopra la data retta linea infinita A B dal punto dato C, che non è in essa, tirar vna linea retta perpendicolare. piglisi dall'altra parte della linea retta A B qual si uoglia punto D, & dal centro C con l'interuallo C D descriuasi il cerchio E F G, & la E G sia segata per mezo nel punto H, & giunganſi C G C H C E. Dico sopra la data retta linea infinita A B dal punto dato C, che non è in essa, essere tirata la C H perpendicolare. percioche essendo la G H vguale alla H E, & la H C commune; le due G H H C sono vguali alle due E H H C, l'vna all'altra, & la base C G è vguale alla base C E. adunque l'angolo C H G è vguale all'angolo E H C. & sono conseguenti. ma quando la linea retta, stando sopra vna linea retta fa gli angoli conseguenti vguali fra loro, ciascuno de gli angoli vguali è retto, & quella linea retta, che stà sopra si chiama perpendicolare à quella, alla quale ella soprastà. adunque sopra la data retta linea infinita A B dal dato punto C, che non è in essa, si è tirata la perpendicolare C H. il che bisognaua fare.

Postulato 3.
10. di questo.
8. di questo.
Diff. 10.

IL COMMANDINO.

Enopide fù il primo (come dice Proclo) che trouò questo problema, giudicandolo vtile all'astrologia, & la perpendicolare secondo l'vsanza de gli antichi chiama gnomone, perche il gnomone è ad angoli retti sopra l'horizonte, & quella che è ad angoli retti è la medesima che la perpendicolare, essendo differente da essa in habitudine solamente, & di soggetto la medesima, si come anche il gnomone. oltre à cio la perpendicolare è di due sorti, l'vna piana, & l'altra solida, percioche quando il punto, dal qual si tira la linea retta perpendiculare è nel soggetto piano, si chiama piana. ma quando il punto è sublime, & fuori del soggetto piano, è detta solida, & la piana è tirata sopra la linea retta, ma la solida sopra il piano. onde è necessario che quella perpendicolare nõ solo faccia gli angoli retti con vna sola retta linea, ma con tutte quelle, che stando nel soggetto piano la toccano. in questo problema adunque Euclide propone tirare vna linea perpendicolare piana, essendo tirata sopra vna linea retta, & parlandosi come se il tutto fosse in vn medesimo piano; & nella linea, che è ad angoli retti, perche si è preso in essa il punto, non vi sarà necessità alcuna che constringa farla infinita. ma pone la data retta linea infinita, quando il punto, dal quale deue esser tirata la perpendicolare, si pigli fuori di essa, percioche se non fusse infinita, si potrebbe pigliare il punto fuori della linea retta, ma per diritto ad essa, dimodo che la linea retta prolungata cadesse in detto punto, & non si potesse fare il problema. oltre à ciò se la linea non fusse infinita, potremmo pigliare il punto in tal modo che tirandosi la perpendicolare necessariamente cadesse fuori di essa, & non in essa, & per queste cagioni la linea retta sopra la quale è tirata la perpendicolare, si pone infinita.

Gli antichi chiamarono la perpendicolare gnomone. La perpendicolare, è di due sorti piana & solida.

THEOREMA VI. PROPOSITIONE XIII.

Quando vna linea retta ſtando ſopra vn'altra retta linea fa gli angoli, ò gli farà amendue retti, ò vguali à due retti. *

La linea retta AB ſtando ſopra la retta C D faccia gli angoli CBA ABD. Dico gli angoli CBA ABD ò eſſere due retti, ò vguali à due retti. perche ſe CB A è vguale ad ABD, ſono due retti. ma ſe nò, tiriſi dal punto B ſopra la CD la BE perpẽdicolare. adũ que gliangoli CBE EBD ſono due retti. & perche CB E è vguale alli due CBA ABE, pongaſi EBD commune. gli angoli dunque C B E E B D ſono vguali alli tre angoli C B A A B E E B D. ſimilmente perche l'angolo D B A è vguale alli due angoli D B E E B A, pongaſi ABC commune. adunque gli an goli D B A A B C, ſono vguali alli tre D B E E B A A B C. ma ſi è dimoſtrato anchor gli angoli C B E E B D eſſere vguali alli medeſimi tre, & quelle coſe che ſono vguali ad vna medeſima, ſono vguali fra loro. adunque etiandio gli angoli C B E E B D ſono vguali à gli angoli D B A A B C. & C BE EBD ſo no due retti. onde gli angoli D B A A B C ſaranno vguali à due retti. & però quando vna linea retta ſtando ſopra vn'altra retta linea fa gli angoli, ò gli farà amendue retti, ò vguali à due retti. il che biſognaua dimoſtrare.

Diff. 10. 11. di queſto.

1. com. not.

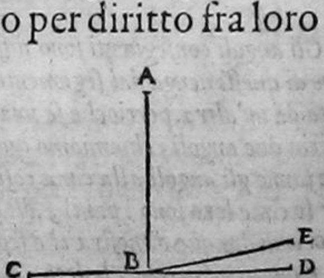
IL COMMANDINO.

Quando vna linea retta ſtando ſopra vn'altra retta linea fa gli angoli] *E da ſapere, come dice Proclo, che Euclide in queſta propoſitione ha uſato una gran diligenza, percioche non ha detto ſemplicemente ogni retta linea, che ſta ſopra una retta linea ò fa due angoli retti, ò uguali à due retti; ma ſe fa gli angoli, percioche che ſarà poi, ſe ſtando nella eſtremità della retta linea faccia vn'angolo ſolo? accade forſe mai che egli ſia vguale à due retti? queſto certamente non è poſſibile, conciosiacoſa che ogni angolo rettilineo ſia minore di due retti, ſi come ogni angolo ſolido è minore di quattro retti, & ſe piglieremo vn'angolo, che ci pare eſſere ottuſiſſimo, lo accreſceremo anchora come quello, che non riceue la miſura di due retti. biſogna dunque che la retta linea ſtia di modo, che venga à produrre, & fare gli angoli.*

Ogni angolo rettilineo è minore di due retti.

THEOREMA VII. PROPOSITIONE XIIII.

Se ad una retta linea, & ad un punto, che ſia in eſſa due linee rette non poſte dalle medeſime parti, facciano gli angoli conſeguenti uguali à due retti, eſſe linee ſaranno per diritto fra loro.



Ad una retta linea A B, & al punto B che è in eſſa due linee rette B C B D non poſte dalle medeſime parti facciano gli angoli conſeguenti vguali à due retti A B C A B D. Dico la B D eſſer per diritto alla CB. percioche ſe la BD non è per diritto alla C B, ſia la B E per diritto alla C B. perche dunque la linea retta A B ſta ſopra la retta C B E. gli angoli A B C A B E ſono vguali à due retti: ma etiandio gli angoli A B C A B D ſono vguali à due retti. onde gli angoli C B A A B E ſaranno vguali alli C B A A B D, traggaſi lo A B C commune.

Per l'antecedente:

il rimanente dunque A B E è uguale al rimanente A B D, il minore al maggiore; che non può essere. adunque la B E non è per diritto alla B C. dimostreremo similmente non essere alcun'altra, fuori, che la B D. adunque la C B sarà per diritto alla B D. & però se ad una retta linea, & ad un punto che sia in essa, due linee rette non poste dalle medesime parti facciano gli angoli conseguenti uguali à due retti, esse linee saranno per diritto fra loro. il che bisognaua dimostrare.

IL COMMANDINO.

Questo theorema è conuerso del precedente, & si dimostra per la deduttione all'impossibile, perche così si debbono dimostrare i conuersi de theoremi, come dice Proclo.

THEOREMA VIII. PROPOSITIONE XV.

Se due linee rette si seghino insieme, faranno gli angoli, che sono alla cima uguali fra loro.

Due linee rette A B C D si seghino insieme nel punto E. dico l'angolo A E C esser' uguale all'angolo D E B, & l'angolo CEB all'angolo A E D. perche stãdo la linea retta AE sopra la retta CD, fa gli ango-

13. di questo. li CEA AED, saranno questi uguali à due retti. similmente perche la linea retta D C stando sopra la retta A B fa gli angoli A E D D E B, saranno AED D E B uguali à due retti, & si è dimostato anchor

1. com. not. gli angoli C E A AED esser'uguali à due retti. adunque gli angoli C E A A E D sono uguali à gli angoli A E D D E B. traggasi il

3. com not. commune A E D. adunque anchora il rimanente C E A è uguale al rimanente B E D. si dimostreranno parimente uguali C E B D E A, & però se due linee rette si seghino insieme, faranno gli angoli che sono alla cima uguali fra loro. il che bisognaua dimostrare.

COROLLARIO.

Da questo chiaramente si uede, che quante linee rette insieme si segano, fanno gli angoli che sono nel segamento, uguali à quattro retti.

IL COMMANDINO.

Angoli conseguenti. Angoli alla cima.

Gli angoli conseguenti sono differenti da gli angoli che sono alla cima. conciosiacosa che l'origine di questi uenga dal segamento di due linee rette, & l'origine di quelli da una sola linea segata da un'altra, percioche se una linea retta non segata segandone un'altra con la sua estremità faccia due angoli, chiamiamo questi angoli conseguenti. ma se due linee rette si seghino insieme fanno gli angoli alla cima cosi detti, perche hanno le cime congiunte nel medesimo punto, & le cime loro sono i punti, alli quali quando i piani si ristringono, fanno gli angoli. questo theorema dunque dimostra che segandosi insieme due linee, gli angoli alla cima sono uguali; & fù trouato prima da Thalete, come dice Eudemo, ma dimostrato poi da Euclide. nel quale manca la construttione, come meno necessaria, percioche la dimostratione contentandosi della espositione non ricerca construttione alcuna.

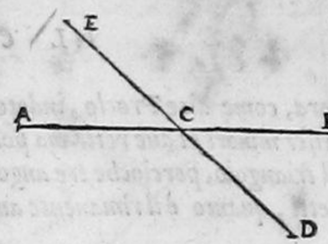
Le cime de gli angoli.

Questo theorema fu trouato da Thalete.

Da questo chiaramente si vede] *è vn corollario che appare per la dimostratione precedente,*

cedente, percioche i corollarij nella institutione elementare, come dice Proclo, sono quelli che appaiono insieme con la dimostratione di altre cose, ma essi non si ricercano principalmente, come quello che hora ci è proposto: perche si ricercaua se segandosi insieme due linee rette fossero vguali gli angoli, che sono alla cima. ma mentre che ciò si dimostra insiememente si è dimostrato quattro angoli, che si fanno esser vguali à quattro retti. il corollario dunque è vn theorema che all'improuiso ci si manifesta dalla dimostratione di vn'altro problema, ò theorema, perche pare che à caso c'incontriamo ne corollarij, & non ci pensando noi, ne ricercandogli, ci vengono inanti. ma de corollarij altri sono geometrici, altri arithmetici. oltre à ciò altri sono conseguenti à problemi, altri à theoremi, & altri si prouano per dimostrationi dirette, altri per deduttioni all'impossibile. il conuerso di questo theorema così è dimostrato da Proclo. Corollarij geometrici arithmetici. Il conuerso di questo theorema è dimostrato da Proclo.

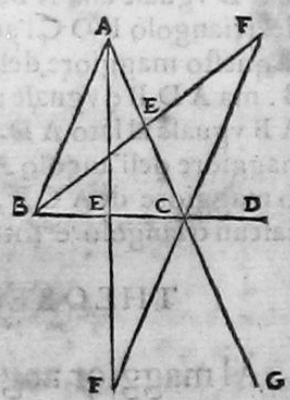
Se à qualche retta linea due linee rette non prese dalle medesime parti fanno gli angoli, che sono alla cima, vguali, quelle linee rette sarãno per diritto fra loro.



Sia vna linea retta A B, & in essa qual si voglia punto C, & nel C due linee rette C D C E non prese dalle medesime parti facciano gli angoli A C D B C E uguali. Dico le C D C E essere per diritto fra loro. percioche la linea retta C D stando sopra la retta A B fa due angoli vguali à due retti, cioè D C A D C B, ma l'angolo D C A è vguale all'angolo B C E. onde gli angoli D C B B C E sono vguali à due retti. perche dunque ad vna retta linea B C due linee rette C D C E non prese dalle medesime parti fanno gli angoli conseguenti vguali à due retti, saranno per diritto fra loro. 13. di questo. 14. di questo.

THEOREMA IX. PROPOSITIONE XVI.

Prolungandosi vn lato di ciascun triangolo, l'angolo esteriore è maggiore dell'vno & l'altro interiore, & opposto.

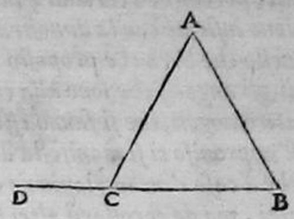


Sia il triangolo A B C, & vn lato di esso B C si prolunghi nel D. Dico l'angolo esteriore A C D esser maggiore dell'vno & l'altro interiore, & opposto, cioè C B A B A C. seghisi A C per mezo nel punto E, & giũta B E prolunghisi nel pũto F, & pongasi la E F uguale alla B E. giũgasi poi F C, & tirata la A C prolunghisi nel punto G. perche dunque la A E è vguale alla E C, & la B E alla E F, le due A E E B sono vguali alle due C E E F, l'vna all'altra, & l'angolo A E B è vguale all'angolo F E C, percioche sono alla cima. onde la base A B è vguale alla base F C, & il triangolo A B E al triangolo F E C, & gli altri angoli vguali à gli altri angoli, l'vno all'altro; à quali si sottopongono i lati vguali. adunque l'angolo B A E è vguale all'angolo E C F, ma l'angolo E C D è maggiore di E C F. l'angolo dunque A C D, è maggiore dell'angolo B A E, & parimente segandosi la linea retta B C per mezo, si dimostrerà l'angolo B C G, cioè A C D maggiore dell'angolo A B C. la onde prolungandosi vn lato di ciascun triangolo l'angolo esteriore è maggiore dell'vno & l'altro interiore, & opposto. il che bisognaua dimostrare. Per l'antecedente. 4. di questo.

THEOREMA X. PROPOSITIONE XVII.

Due angoli di ciascun triangolo, presi in qualunque modo, sono minori di due retti.

Sia il triangolo A B C. Dico due angoli del triangolo A B C, presi in qual si voglia modo esser minori di due retti. prolunghisi la B C nel punto D. & perche l'angolo A CD esteriore del triangolo A B C, è maggiore dell'interiore, & opposto A B C, pongasi commune lo A C B. adunque gli angoli A C D A C B sono maggiori de gli angoli A B C B C A. ma gli angoli A C D A C B sono vguali à due retti. il perche A B C B C A sono minori di due retti. dimostreremo similmente anchor gli angoli B A C A C B & C A B A B C esser minori di due retti. adunque due angoli di ciascun triangolo, presi in qualunque modo sono minori di due retti. il che bisognaua dimostrare.



Per l'antecedente.

13. di questo.

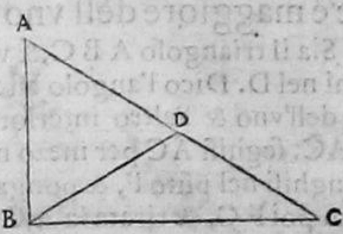
IL COMMANDINO.

Hora, come dice Proclo, indeterminatamente si dimostra due angoli quali si siano del triangolo esser minori di due retti. ma poi si dimostrerà quanto siano minori, cioè dell'angolo rimanente del triangolo, percioche tre angoli sono vguali à due retti. onde due sono tanto minori di due retti, quanto è il rimanente angolo del triangolo.

THEOREMA XI. PROPOSITIONE XVIII.

Il maggior lato di ciascun triangolo è sottoposto al maggiore angolo.

Sia il triangolo A B C, che habbia il lato A C maggiore del lato A B. Dico anchor l'angolo A B C esser maggiore dell'angolo B C A. percioche essendo la A C maggiore della A B, pongasi la A D vguale alla A B, & giungasi B D. & perche del triangolo B D C l'angolo esteriore è A D B, sarà questo maggiore dell'interiore, & opposto D C B. ma A D B è vguale ad A B D, essendo il lato A B vguale al lato A D. adunque l'angolo A B D è maggiore dell'angolo A C B. onde A B C sarà molto maggiore di A C B, & però il maggior lato di ciascun triangolo è sottoposto al maggior angolo. il che bisognaua dimostrare.



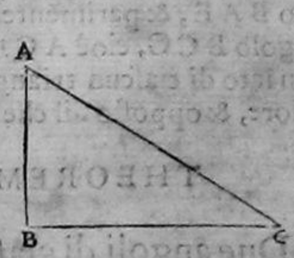
16. di questo.

5. di questo.

THEOREMA XII. PROPOSITIONE XIX.

Al maggior angolo di ciascun triagolo è sottoposto il maggior lato.

Sia il triangolo A B C c'habbia l'angolo A B C maggior dell'angolo B C A. Dico il lato A C essere maggiore del lato A B. percioche se non è maggiore, ò uero A C è vguale ad A B, ò vero è minore di esso. ma non è vguale, perche anchor l'angolo A B C sarebbe vguale all'angolo A C B, che non è, & però A C non è vguale ad A B. ma ne anche è minore, perche anchor l'angolo A B C sarebbe minore dell'angolo A C B, che non è. onde AC non è minore di A B, & si è dimostrato che non è vguale. adunque A C è maggiore



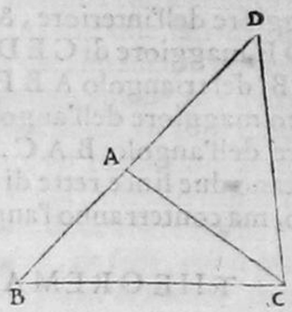
giore di A B. la onde al maggior angolo di ciascun triangolo è sottoposto il maggior lato. il che bisognaua dimostrare.

IL COMMANDINO.

Questo è il conuerso del precedente theorema, & però si dimostra per la deduttione all'impossibile.

THEOREMA XIII. PROPOSITIONE XX.

Due lati di ciascun triangolo presi in qual si uoglia modo sono maggiori del rimanente.



Sia il triangolo A B C. Dico due lati del triangolo A B C esser maggiori del rimanente, presi in qual si voglia modo, cioè i lati B A A C maggiori del lato B C, & i lati A B B C maggiori del lato A C, & i lati B C C A essere maggiori di A B. prolunghisi B A nel punto D, & pongasi A D vguale à C A, & giungasi D C. perche dunque D A è vguale ad A C, sarà anchor l'angolo A D C vguale all'angolo A C D. ma l'angolo B C D è maggiore dell'angolo A C D. adunque l'angolo B C D è maggior dell'angolo A D C. & perche D C B è triangolo che ha l'angolo B C D maggiore dell'angolo BDC, & al maggior angolo è sottoposto il maggior lato, sarà il lato D B maggiore del lato B C, ma D B è vguale alli B A A C. onde i lati B A A C sono maggiori di B C. dimostreremo similmente anchor i lati A B B C esser maggiori del lato C A, ma i lati B C C A sono maggiori di A B. adunque due lati di ciascun triangolo, presi in qual si uoglia modo, sono maggiori del rimanente. il che bisognaua dimostrare.

5. di questo.

Per l'antecedente.

IL COMMANDINO.

Il presente theorema, come scriue Proclo, soleua essere rifiutato dalli Epicurei, dicendo che era manifesto all'Asino, & che non haueua bisogno di proua, & dimostrano, che egli è manifesto all'Asino; perche posta l'herba nell'estremità di un lato, l'Asino uolendo pascersi passa per un lato, & non per due. contra questi si deue dire, che il theorema è al senso manifesto, & chiaro, ma non alla ragione, che genera la scienza; perche questo in molte cose accade, come per essempio, il fuoco scalda, questo anchora è chiaro al senso, ma prouare in che modo scaldi è offitio della scienza. così adunque due lati del triãgolo esser maggiori del rimanente è chiaro al senso, ma dire in che modo questo si faccia appartiene alla scienza. altri poi hanno dimostrato questo thorema altrimente non prolongando la linea retta, come si puo uedere appò Proclo.

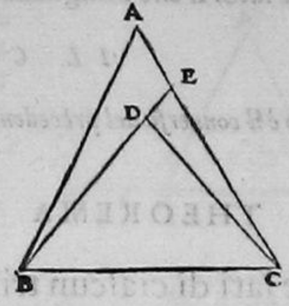
THEOREMA XIIII. PROPOSITIONE XXI.

Se da i termini d'un lato del triangolo si constituiscano due linee rette di dentro, queste saranno minori delli due lati del triangolo, ma conterranno l'angolo maggiore.

In vn lato del triangolo ABC, cioè B C da i termini B C constituiscansi di dentro due rette linee B D D C. Dico BD DC esser minori de gli altri due lati del triangolo B A A C. ma contenere l'angolo B D C maggiore dell'angolo B A C. prolunghisi B D nel punto E. & perche due lati di ciascun triangolo sono maggiori del rimanente, saranno due lati B A AE del triangolo A B E, maggiori del lato B E. pongasi E C commune. adunque B A A C sono maggiori di B E E C. similmente perche due lati C E E D del triangolo C E D sono maggiori del lato C D, pongasi commune D B. onde C E E B sono maggiori di C D D B. ma si è dimostrato B A A C esser maggiori di B E E C. adunque B A A C sono molto maggiori di B D D C. oltre à ciò perche l'angolo esteriore di ciascun triangolo è maggiore dell'interiore, & opposto, sarà l'esteriore angolo B D C del triangolo C D E, maggiore di C E D. per la medesima ragione anchor l'angolo esteriore C E B del triangolo A B E, è maggiore di B A C. ma l'angolo B D C si è dimostrato maggiore dell'angolo C E B. adunque l'angolo B D C sarà molto maggiore dell'angolo B A C. onde se da i termini di vn lato del triangolo si constituiscano due linee rette di dentro, queste saranno minori delli due lati del triangolo, ma conterranno l'angolo maggiore. il che bisognaua dimostrare.

per l'antecedète.

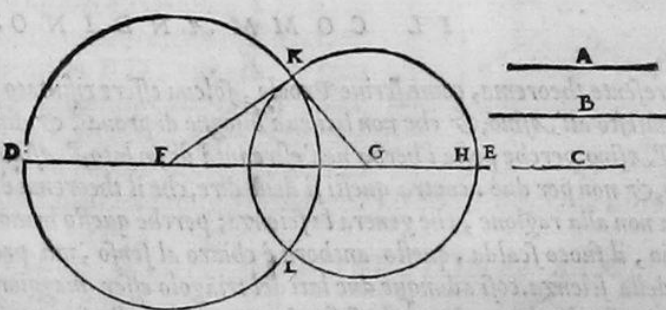
16. di questo.



THEOREMA VIII. PROPOSITIONE XXII.

Da tre linee rette che siano vguali à tre rette linee date constituire un triangolo. ma bisogna che due siano maggiori della rimanente, prese in qual si voglia modo; percioche due lati di ciascun triangolo, presi in qual si voglia modo, sono maggiori del rimanente.

Siano tre linee rette date A B C, due delle quali siano maggiori della rimanente, prese in qual si voglia modo, cioè che le A B siano maggiori della C, & le A C siano maggiori della B, & anchora le B C maggiori della A. onde bisogna da tre linee rette vguali alle A B C constituire un triangolo. propongasi la linea retta D E terminata nel punto D, ma infinita verso il punto E. & pongasi la D F vguale alla A, & la F G vguale alla B, & la G H alla C. & dal centro F con l'interuallo F D descriuasi il cerchio D K L. poi dal centro G con l'interuallo G H descriuasi vn'altro cerchio K L H, & giungansi K F K G. Dico da tre linee rette vguali alle A B C essersi constituito il triangolo K F G. percioche essendo il punto F centro del cerchio D K L, sarà la F D vguale alla F K. ma la F D è vguale alla A. adunque anchor la F K è vguale ad A. oltre à ciò perche il punto G è centro del cerchio L K H, sarà la G H vguale alla G K. ma la G H è vguale alla C. adunque etiandio la G K è vguale alla C. & è la F G vguale alla B. adunque le tre K F



3. & questo
3. Post.

F G GK, sono vguali alle tre rette A B C. & però delle tre linee rette KF F G GK, che sono vguali alle tre rette date A B C si è constituito il triangolo KF G. il che bisognaua fare.

IL COMMANDINO.

Il presente problema è determinato, percioche de problemi, si come anchor de theoremi, altri sono indeterminati, altri determinati. che se diremo semplicemente in questo modo, constituire il triangolo da tre linee rette, che siano vguali à tre date rette linee, il problema sarà indeterminato, & non si potrà fare. ma se ui aggiungeremo due delle quali prese in qual si voglia modo, siano maggiori della rimanente, sarà determinato, & si potrà fare, & la Determinatione è di due sorti, l'vna è parte del problema, ò theorema, la quale vien posta doppo l'Espositione, & dimostra qual sia quello che si cerca, l'altra poi è quella che vieta la propositione essere vniuersale, facendo conoscere quando, & con qual ragione, & in quanti modi si possa fare quello che è proposto, come in questo luogo [ma bisogna che le due prese in qual si voglia modo siano maggiori della rimanente, perche due lati di ciascun triangolo presi in qual si voglia modo sono maggiori del rimanente] *& nel sesto libro* [ad vna data retta linea adattare vn parallelogrammo vguale ad vn dato rettilineo, che manchi di vna figura parallelogramma, simile ad vn'altra data, ma bisogna che il dato rettilineo, al quale si deue adattare vn parallelogrammo vguale, non sia maggiore di quello che è adattato alla metà, essendo simili i mancamenti, & quello che si fa dalla metà, & quello al quale deue essere simile il mancamento] *& come de theoremi si fa la diuisione secondo il vero, & falso, così de problemi secondo il possibile & impossibile. Proclo ne commentarij cita le parole di Euclide, le quali sono differenti dalle parole di questa dimostratione. onde è chiarissimo le dimostrationi di Euclide in alcuni luoghi esser state mutate da Theone, & quelle che habbiamo hora essere di Theone, & non di Euclide.*

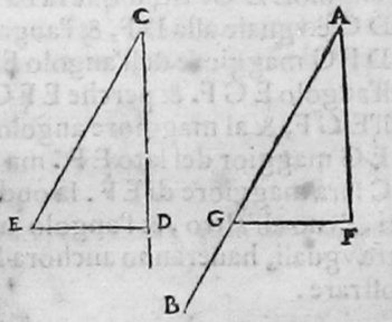
De problemi altri sono determinati, altri non determinati. La determinatione è di due maniere.

La diuisione de theoremi secondo il uero, & falso, & de problemi secõdo il possibile & impossibile.

PROBLEMA IX. PROPOSITIONE XXIII.

Nella data retta linea, & nel punto dato in essa constituire vn' angolo rettileneo vguale ad vn'altro angolo rettilineo dato.

Sia la data linea A B, & il punto dato in essa A, & l'angolo rettilineo dato DCE. bisogna nella data linea retta A B, & nel dato punto in essa A, constituire vn'angolo rettilineo uguale all'angolo rettilineo dato. piglisi nell'vna, & l'altra di esse C D C E quali si vogliano punti DE, & giungasi D E, & da tre linee rette che siano vguali alle tre rette C D D E E C, ✣ constituiscasi il triangolo A F G, di modo che la C D sia vguale alla A F, & la C E al la A G, & la D E alla F G. perche dunque le due D C C E sono vguali alle due F A A G l'vna all'altra, & la base D E è vguale alla base F G, sarà anchor l'angolo D C E vguale all'angolo F A G. adunque nella data rettalinea A B, & nel punto in essa dato A, si è constituito l'angolo rettilineo F A G vguale all'altro angolo rettilineo dato D C E. il che bisognaua fare.



✣ Per l'antecedente.

IL COMMANDINO.

Et da tre linee rette che siano vguali alle tre rette C D D E E C constituiscasi il triangolo A F G. ✣

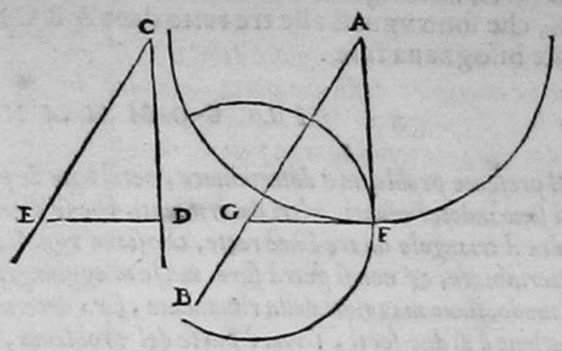
3. di questo.

Dalla linea retta A B taglisi la A G, vguale alla C E, & dal centro A con l'interuallo vguale alla C D

Post. 3.

descriuasi vn cerchio, & poi dal centro G con l'interuallo vguale alla E D descriuasi vn'altro cerchio, di modo che i cerchi si seghino fra loro nel punto F, & giunganſi A F F G. Dico già essere fatto quello, che si proponeua, & la dimostratione sarà la medesima. questo problema dice Eudemo esser stato trouato da Enopide.

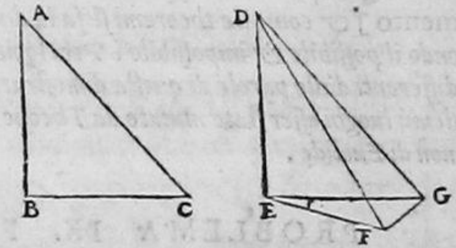
Questo problema fu trouato da Enopide.



THEOREMA XV. PROPOSITIONE XXIIII.

Se due triangoli hanno due lati vguali à due lati, l'vno all'altro, & l'angolo maggiore dell'angolo, che è contenuto da linee rette vguali, haueranno anchora la base maggiore della base.

Siano due triangoli A B C D E F, che habbiano due lati A B A C vguali à due lati DE DF, l'vn all'altro, cioè il lato A B vguale al lato D E, & il lato A C vguale à D F, & l'angolo B A C sia maggiore dell'angolo E D F. Dico anchora la base B C esser maggiore della base E F. perche l'angolo B A C è maggiore dell'angolo E D F, constituiscasi nella linea retta D E, & nel punto che è in essa D, l'angolo E D G vguale



Per l'antecedente.

all'angolo B A C, & pongasi la D G vguale ad vna di esse A C D F, & giunganſi

* G E F G. onde perche la A B è vguale alla D E, & la A C alla D G, le due B A A C sono uguali alle due E D D G, l'vna all'altra, & l'angolo B A C è vguale

4. di questo.

all'angolo E D G. Adunque la base B C è vguale alla base E G. oltre à ciò perche la D G è vguale alla D F, & l'angolo D F G vguale all'angolo D G F, sarà l'ango

5. di questo.

lo D F G maggiore dell'angolo E G F. l'angolo dunque E F G è molto maggiore dell'angolo E G F. & perche E F G è triangolo, che ha l'angolo E F G maggiore dell'E G F, & al maggiore angolo è sottoposto il maggior lato, sarà anchor il la-

14. di questo.

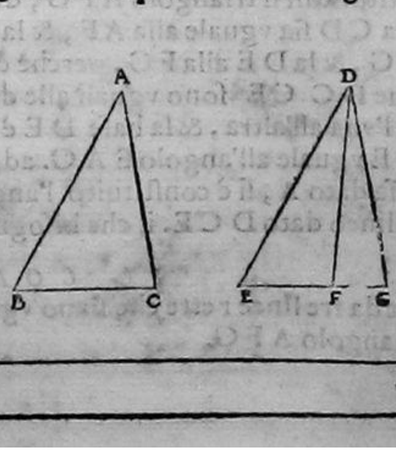
to E G maggior del lato E F. ma il lato EG è vguale al lato BC. adunque anchor B C sarà maggiore di E F. la onde se due triangoli hanno due lati vguali à due lati, l'vno all'altro, & l'angolo maggiore dell'angolo, che è contenuto da linee rette vguali, haueranno anchora la base maggiore della base. il che bisognaua di mostrare.

IL COMMANDINO.

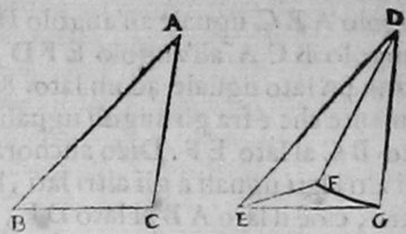
Questo theorema è opposto al quarto.

Questo theorema è opposto al quarto, perciochè quello pone gli angoli che sono alle cime de triangoli, vguali, & questo disuguali: quello mostra le base vguali, questo disuguali.

* Et giunganſi G E F G] *la linea retta E G ò uero cade sopra la E F, ò in essa, ò sotto essa. Euclide la prese come quella che cade sopra, & se ca*



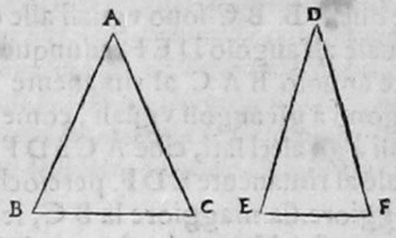
de in essa, come nella seconda figura, il medesimo si dimostrerà, percioche le due B A A C sono vguali alle due E D D G, & contenendo gli angoli vguali anchor la base B C sarà vguale alle base E G. ma la E G è maggiore della E F, si come il tutto è maggiore della sua parte. adunque anchor la B C è maggiore della E F. caggia finalmente sotto essa, come nella terza figura, dimostreremo similmente la base B C essere vguale alla base E G. ma perche le due E F F D constituite dentro al triangolo E D G sono minori delle due EG GD, & la D G è vguale alla D F, sarà la rimanente E G maggiore della rimanente E F. ma la B C è vguale alla E G. adunque è necessario che etiandio la B C sia maggiore della E F. 4. di questo. 21. di questo.



THEOREMA XVI. PROPOSITIONE XXV.

Se due triangoli hanno due lati vguali à due lati, l'vno all'altro, & la base maggiore della base, haueranno anchora l'angolo maggiore dell'angolo, che da lati vguali è contenuto.

Siano due triangoli A B C D E F, che habbiano due lati AB AC vguali à due lati D E D F, l'vno all'altro; cioè il lato A B vguale al lato D E, & il lato A C al lato D F, & la base B C sia maggiore del la base E F. Dico anchora l'angolo BAC essere maggiore dell'angolo E D F. percioche se non è maggiore, ò vero è ugua le, ò minore. ma l'angolo B A C non è vguale all'angolo E D F, perche etiandio la base B C sarebbe vguale alla base E F, il che non è. onde l'angolo B A C non è vguale all'angolo E D F. ma ne anche è minore: perche la base B C sarebbe mino re della base E F, che non è. adunque l'angolo B A C non è minore dell'angolo E D F. & si è dimostrato che non è vguale. l'angolo dunque B A C necessariamen te sarà maggiore dell'angolo E D F, & però se due triangoli hanno due lati vgua li à due lati, l'vno all'altro, & la base maggiore della base, haueranno anchora l'angolo maggiore dell'angolo, che è contenuto da lati vguali. il che bisognaua dimostrare. 4. di questo. per l'antecedéte.



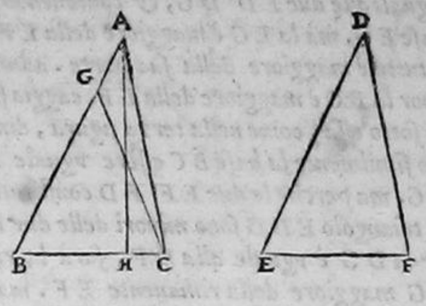
IL COMMANDINO.

Questo theorema è opposto all'ottauo, & è conuerso del precedente, quale altri altrimente hanno dimostrato, come dice Proclo. Questo theorema è opposto all'ottauo, & è conuerso del precedente.

THEOREMA XVII. PROPOSITIONE XXVI.

Se due triangoli hanno due angoli vguali à due angoli, l'vno all'altro & vn lato vguale ad vn lato, che è fra gli angoli vguali, ò che è sottoposto ad vno de gli vguali angoli, haueranno anchora gli altri lati vguali à gli altri lati, l'vno all'altro, & l'angolo rimanente vguale al rimanente.

Siano due triangoli A B C D E F, che habbiano due angoli A B C B C A uguali alli due D E F E F D, l'uno all'altro, cioè l'angolo A B C uguale all'angolo D E F, & l'angolo B C A all'angolo E F D, & habbiano un lato uguale ad un lato. & primieramente che è fra gli angoli uguali, cioè il lato B C al lato E F. Dico anchora hauere gli altri lati uguali à gli altri lati, l'uno all'altro, cioè il lato A B al lato D E, & il lato A C à D F, & il rimanente angolo B A C



vguale al rimanente E D F; percioche se la A B non è vguale alla D E, vna di esse sarà maggiore. sia maggiore A B: & pongasi la G B vguale alla D E, & giunga si G C. perche dunque la B C è vguale alla D E, & la B C alla E F, le due G B B C sono vguali alle due D E E F, l'vna all'altra, & l'angolo G B C è vguale all'angolo D E F. adunque la base G C è vguale alla base D F, & il triangolo G B C al triangolo D E F, & gli altri angoli vguali à gli altri angoli, l'vno all'altro, à quali sono sottoposti i lati vguali. adunque l'angolo G C B è vguale all'angolo D F E. ma l'angolo D F E si pone vguale all'angolo B C A. onde anchor l'angolo B C G è vguale all'angolo B C A, il minore al maggiore, che non può essere. non è adunque la A B disuguale alla D E. & però sarà vguale, & la B C è vguale alla E F. onde le due A B B C sono vguali alle due D E E F, l'vna all'altra. & l'angolo A B C è uguale all'angolo D E F. adunque la base A C è vguale alla base D F, & il rimanente angolo B A C al rimanente E D F. ma siano vguali quei lati che si sottopongono à gli angoli vguali, come A B à D E. Dico anchor gli altri lati essere vguali à gli altri lati, cioè A C à D F, & B C ad E F, & etiandio il rimanente B A C uguale al rimanente E D F. percioche se la B C non è vguale alla E F, vna di esse è maggiore. sia maggiore la B C, se esser può, & pongasi la B H uguale alla E F: & giungasi A H. perche dunque la B H è vguale alla E F, & la A B alla D E, le due A B B H sono vguali alle due D E E F, l'vna all'altra, & contengono gli angoli vguali. adunque la base A H è vguale alla base D F, & il triangolo A B H vguale al triangolo D E F, & gli altri angoli à gli altri angoli, l'vno all'altro, à quali sono sottoposti i lati vguali. l'angolo dunque B H A è vguale all'angolo E F D. ma l'angolo E F D è vguale all'angolo B C A. adunque anchor l'angolo B H A è vguale all'angolo B C A. onde l'angolo esteriore B H A del triangolo A H C è vguale all'interiore, & opposto B C A, che non può essere, & però non è disuguale la B C alla E F, ma vguale. & è la A B vguale alla D E. onde le due A B B C sono vguali alle due D E E F, l'vna all'altra, & contengono gli angoli vguali, & perciò la base A C è vguale alla base D F, & il triangolo A B C al triangolo D E F, & l'angolo rimanente B A C al rimanente E D F. adunque se due triangoli hanno due angoli vguali à due angoli, l'vno all'altro, & vn lato vguale ad vn lato, ò che è fra gli angoli vguali, ò che è sottoposto ad vno de gli vguali angoli, haueranno anchora gli altri lati vguali à gli altri lati, l'vno all'altro, & l'angolo rimanente vguale al rimanente. il che bisognaua dimostrare.

4. di questo.

4. di questo.

4. di questo.

IL COMMANDINO.

Questo theorema si attribuisce à Thalete.

Questo theorema si attribuisce à Thalete, come dice Proclo, con l'autorità di Eudemo. del nascimento, & vgualità ò disugualità de triangoli tutto quello che si poteua dire nell'institutione elementare, habbiamo imparato dalle cose dette di sopra. conseguentemente poi tratta Euclide de quadrilateri & principalmente de parallelogrammi, ragionando insieme de trapezij. percioche il quadrilatero si diuide, come si è detto di sopra, nel parallelogrammo & trapezio, & di nuouo il parallelogrammo in altre specie, & il trapezio similmente. ma perche il paral-

lelogrammo è ordinato per participatione dell'vgualità, & il trapezio non serua ne il medesimo, ne'l simile ordine, meritamente ragiona prima de parallelogrammi, & insieme con questi va considerando il trapezio, percioche per lo segamento de parallelogrammi appare l'origine de trapezij, come si manifesterà procedendo inanzi. ma perche altresi non è possibile che si dica cosa alcuna della construttione ò vgualità de parallelogrammi senza considerare le linee parallele, conciosiacosa che come ancho appare da esso nome, il parallelogrammo sia quello che si descriue da linee rette parallele poste all'incontro: necessariamente ha cominciato dalle parallele, & procedendo poco auanti viene à trattare de parallelogrammi, seruendosi di vn theorema che è in mezo fra la institutione elementare di questi, & di quelli, il quale pare che consideri vn'accidente, che auuiene alle parallele, & prima pone l'origine de parallegrammi, che è tale [le linee rette che congiungono le vguali, & parallele, anch'esse sono vguali, & parallele] *percioche in questo si considera vn certo accidente delle vguali, & parallele, & dal congiungimento di esse appare il parallelogrammo, c'ha i lati vguali, & paralleli posti all'incontro. di qui dunque si vede chiaramente, che è stato necessario prima ragionar delle parallele. ma bisogna sapere tre cose, le quali principalmente sono nelle parallele & le dichiarano, & con esse si conuertono, ne solo tutte tre insieme, ma ciascuna presa separatamente dalle altre. vna è questa, che segando la linea retta le parallele, gli angoli alterni sono vguali fra loro. l'altra è che segando la linea retta le parallele, gli angoli interiori sono vguali à due retti. la terza che segando medesimamente la linea retta le parallele, l'angolo esteriore è vguale all'interiore, & opposto. & dimostrandosi ciascuno di questi accidenti, si può veramente affermare le linee essere parallele. In questo modo etiandio gli altri mathematici sogliono disputare delle linee, assignando l'accidente di ciascuna spetie, si come ha fatto Apollonio in ciascuna delle linee coniche, Nicomede nelle conchoidi, Hippia nelle quadranti, & Perseo nelle spirici, percioche doppò l'origine, & nascimento loro considerato l'accidente che per se stesso, & principalmente è nelle linee, viene à constituire ciascuna specie, separandola da tutte le altre. in questo medesimo modo Euclide hà inuestigato gli accidenti delle linee parallele, & tutto ciò s'è cauato da Proclo.*

Il parallelogrammo è ordinato. Il trapezio è inordinato.

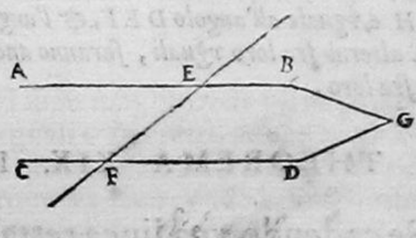
Il parallelogrãmo è quello, che si descriue da linee rette parallele. Il nascimento de parallelogrammi.

Tre cose principalmente sono nelle parallele.

Apollonio tratta delle linee coniche. Nicomede delle conchoidi. Hippia delle quadranti. Perseo delle spirici.

THEOREMA XVIII. PROPOSITIONE XXVII.

Se cadendo vna linea retta sopra due linee rette fa gli angoli alterni vguali fra loro, saranno le linee rette parallele. *



La linea retta E F cadendo sopra le due linee rette A B C D faccia gli angoli alterni A E F E F D vguali fra loro. Dico la linea retta A B essere parallela alla C D. percioche se non è parallela, le A B C D prolungate ò verso le parti B D, ò verso le A C concorreranno insieme. prolunghinsi, & concorrano insieme dalle parti B D nel punto G. l'angolo dunque esteriore del triangolo G E F è maggiore dell'interiore, & opposto E F G. ma è anchora vguale, il che non può essere. adunque le A B C D prolongate non concorreranno dalle parti B D. si dimostrerà parimente non concorrere dalle parti A C, & quelle, che non concorrano in alcuna delle parti, sono parallele fra loro. onde la A B è parallela alla C D. se dunque cadendo vna linea retta sopra due linee rette fa gli angoli alterni vguali fra loro, saranno le linee rette parallele. il che bisognaua dimostrare.

16. di questo.

Diff. 35.

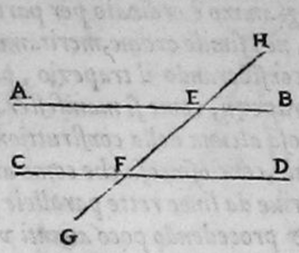
IL COMMANDINO.

Se cadendo vna linea retta, sopra due linee rette fa gli angoli alterni uguali] *Al* *

terni

Angoli alterni

terni chiama quegli angoli, che non sono posti dalle medesime parti, ne consegueti, ma sono distinti dalla linea, che cade, essendo l'vno & l'altro dentro alle parallele. & sono differenti che vno è posto di sopra, l'altro di sotto, come per essempio, essendo le A B C D linee rette, & cadendo sopra esse la linea retta E F, chiama gli angoli A E F D F E, & C F E B E F alterni, come quelli che stanno con ordine alterno & commutato secondo la positione. Et è da sapere che essendo tale il sito delle linee rette, tutti gli accidenti sono sei per la diuisione. tre de quali solamente ha presi il Geometra, & tre ne hà lasciati. percioche ò vero pigliaremo gli angoli dalle medesime parti ò nò, & se dalle medesime, ò amendue dentro alle linee rette, le quali dimostra esser parallele, ò amendue fuori, ò l'vno dentro, & l'altro fuori. ma se non dalle medesime parti, similmente ò amendue dentro, ò fuori, ò l'vno dentro, & l'altro fuori. siano oltre à ciò le linee rette AB CD sopra le quali caggia la linea retta E F, & prolunghinsi alli punti H G. se dunque dalle medesime parti pigliaremo gli angoli, ò vero gli porremo amendue dentro, come B E F, & E F D, ò vero A E F & E F C, ò amendue fuori, come H E B D F G, ò vero H E A C F G, ò vno dentro, & l'altro fuori, come H E B E F D, ò vero G F D F E B, ò vero H E A E F C, ò vero G F C A E F. percioche questi in quattro modi si pigliano; ma se non dalle medesime parti, ò vero amendue dentro, come A E F E F D ò C F E F E B, ò amendue fuori, come A E H D F G, ò H E B C F G, ò vero l'vno dentro & l'altro fuori, & questo altresì in quattro modi, ò vero A E H E F D ò vero H E B E F D ò G F C F E B ò G F D F E A. pigliandosi dunque gli angoli in sei modi, Euclide ne hà presi tre modi solamente. vno è di quegli angoli, che non sono dalle medesime parti, & che sono presi solo dentro, quali ha chiamato alterni. due de quegli che sono dalle medesime parti, ò amendue si pigliano dentro, quali chiama vguali à due retti, ò l'vno si piglia fuori, & l'altro dentro, quali chiama vguali fra loro, gli altri tre rimanenti ha lasciati, cioè quelli, à quali in tutto seguitano le medesime cose. siano dalle medesime parti amendue gli angoli H E B D F G fuori. Dico questi essere vguali à due retti. perche l'angolo D F E è vguale all'angolo H E B & l'angolo B E F all'angolo D F G. & se gli angoli B E F E F D sono vguali à due retti, anchora gli angoli D F G H E B saranno vguali à due retti. siano etiandio gli angoli A E H E F D non dalle medesime parti; l'vno de quali sia fuori l'altro dentro, anchora essi sono vguali à due retti, percioche essendo l'angolo A E H vguale all'angolo B E F, & gli angoli B E F E F D vguali à due retti, saranno altresì gli angoli AEH EFD vguali à due retti. siano vltimamente gli angoli A E H D F G non dalle medesime parti, & amendue fuori. Dico che sono vguali fra loro, perche l'angolo A E H è vguale all'angolo D E F, & l'angolo D F G all'angolo E F C, & sono gli angoli BEF E F C alterni fra loro vguali, saranno anchor gli angoli A E H D F G necessariamente vguali fra loro.



Pigliandosi gli angoli in sei modi, Euclide ne ha presi tre solamēte

THEOREMA XIX. PROPOSITIONE XXVIII.

Se cadendo vna linea retta sopra due linee rette fa l'angolo esteriore vguale all'interiore, & opposto, & dalle medesime parti, ò vero gli interiori, & dalle medesime parti vguali à due retti, le linee rette saranno parallele fra loro.

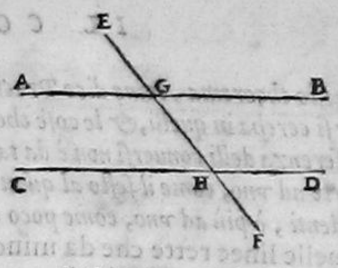
Cadendo sopra due linee rette A B C D la linea retta E F faccia l'angolo esteriore E G B vguale all'interiore & opposto G H D, ò vero gli angoli interiori, & dalle medesime parti B G H G H D uguali à due retti. Dico la linea retta A B esser parallela alla C D, percioche essendo l'angolo E G B vguale all'angolo G H D, & l'angolo E G B all'angolo A G H, sarà anchor l'angolo A G H vguale all'angolo G H D, & sono alterni. adunque la A B è parallela alla C D. oltre a ciò

15. di questo.

Per l'antecedente.

perche

perche gli angoli B G H G H D sono vguali a due retti, & sono anchora gli angoli A G H B G H vguali à due retti, saranno gli angoli A G H B G H vguali à gli angoli B G H G H D. traggasi il commune B G H. adunque il rimanente A G H, è vguale al rimanente G H D, & sono alterni. onde la A B sarà parallela alla C D. Se dunque cadendo vna linea retta sopra due linee rette fa l'angolo



esteriore vguale all'interiore, & opposto, & dalle medesime parti, ò vero gli interiori, & dalle medesime parti vguali à due retti, le linee rette saranno parallele fra loro. il che bisognaua dimostrare.

IL COMMANDINO.

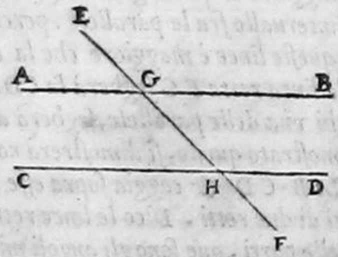
Questo theorema è dimostrato altramente da Ptolomeo, come dice Proclo.

Questo theorema è dimostrato altramente da Ptolomeo.

THEOREMA XX. PROPOSITIONE XXIX.

Cadendo vna linea retta sopra le linee rette parallele, farà gli angoli alterni vguali fra loro; & l'esteriore vguale all'interiore & opposto, & dalle medesime parti, & gli interiori, & dalle medesime parti vguali à due retti.

Caggia sopra le linee rette parallele A B C D la linea retta E F. Dico che fa gli angoli alterni A G H G H D vguali fra loro, & l'esteriore E G B vguale all'interiore, & opposto, & dalle medesime parti G H D, & gli interiori, & dalle medesime parti B G H G H D vguali à due retti. percioche se non è vguale A G H à G H D, vno di essi sarà maggiore. sia maggiore A G H & perche l'angolo A G H è maggiore dell'angolo G H D, pongasi B G H



commune. gli angoli dunque A G H B G H sono maggiori de gli angoli B G H G H D. ma gli angoli A G H B G H sono vguali à due retti. adunque gli angoli B G H G H D sono minori di due retti. & quelle linee rette, che da minori di due retti si prolungano in infinito, concorrono fra loro. onde le linee rette A B C D prolungate fra loro concorreranno. ma non concorrono, ponendosi parallele. non è dunque l'angolo A G H disuguale all'angolo G H D. onde è necessario che sia vguale. ma l'angolo A G H è vguale all'angolo E G B, & però anchor E G B sarà vguale à G H D. pongasi B G H commune. adunque gli angoli E G B B G H sono vguali à gli angoli B G H G H D. ma gli angoli E G B B G H sono vguali à due retti. adunque etiandio B G H G H D saranno vguali à due retti; & però cadendo vna linea retta sopra le linee rette parallele farà gli angoli alterni vguali fra loro, & l'esteriore vguale all'interiore, & opposto, & dalle medesime parti, & gli interiori, & dalle medesime parti vguali à due retti. il che bisognaua dimostrare.

13. di questo.
5. Post.
15. di questo.
13. di questo.

IL COMMANDINO.

Questo theorema, come dice Proclo, si conuerte con amendue li precedenti & fa positione cioche si cercha in quelli, & le cose che in quelli sono date, hora propone di dimostrare. & questa differenza delli conuersi non è da tacere, percioche tutti quelli, che si conuertono ò vno si conuerte ad vno, come il sesto al quinto, ò vno à più, come questo che hora si è proposto, alli precedenti, ò più ad vno, come poco doppò sarà manifesto.

* Quelle linee rette che da minori di due retti si prolungano in infinito concorrono fra loro] *questo è il quinto postulato ò la quinta dimanda, la quale perche non è cosi chiara, & pare c'habbia bisogno de dimostratione, Proclo giudicò, che in questo modo si douesse dimostrare, mettendo innanzi due cose, cioè vn certo Assioma del quale si è seruito ancho Aristotele, & vn Lemma.*

ASSIOMA.

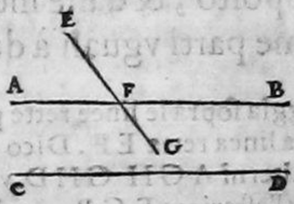
Se da un punto si prolunghino in infinito due linee rette, che facciano l'angolo, la distanza loro auanza ogni finita grandezza.

LEMMA.

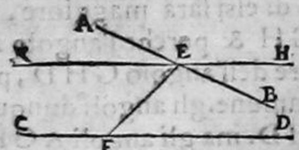
Se la linea retta seghi vna delle parallele, segherà anchor l'altra.

Siano le parallele A B C D, & la linea retta E F G seghi la A B. Dico la E F G segare anchor l'altra C D, percioche essendo due linee rette B F F G, le quali da vn punto F sono prolungate in infinito, haueranno maggior distanza di qual si voglia grandezza finita. onde anchora sarà maggiore di quella grandezza la quale è tanto, quanto è l'interuallo fra le parallele. perche dunque la distanza di queste linee è maggiore che la distanza delle parallele, la linea retta F G segherà la C D. onde se la linea retta seghi vna delle parallele, segherà anchor l'altra.

per l'antecedēte.



Dimostrato questo, si dimostrerà conseguentemente quello che si è proposto. Siano due linee rette A B C D & caggia sopra esse la linea retta E F, la quale faccia gli angoli B E F D F E minori di due retti. Dico le linee rette concorrere fra loro da quelle parti, oue sono gli angoli minori di due retti; percioche essendo gli angoli B E F D F E minori di due retti, sia l'angolo H E B vguale all'eccesso di due retti, & prolunghisi la H E nel punto K. onde perche la linea retta E F cade sopra le rette linee H K C D, & fa gli angoli interiori H E F D F E vguali à due retti, saranno le H K C D parallele & la A B sega la H K. adunque segherà anchora l'altra C D per lo precedente lemma, & concorreranno fra loro le linee rette A B C D da quelle parti, nelle quali sono gli angoli minori di due retti. il che bisognaua dimostrare.

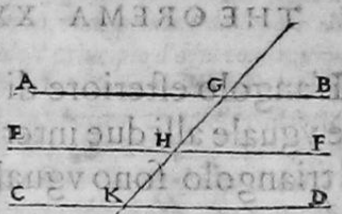


THEOREMA XXI. PROPOSITIONE XXX.

* **Quelle linee che sono parallele alla medesima retta linea, saranno anche fra loro parallele.**

Siano amendue le A B C D parallele alla E F. Dico anchor la A B alla C D esser parallela. caggia sopra esse la linea retta G K. & perche sopra le linee rette parallele A B E F cade la linea retta G K, l'angolo AGH è vguale all'angolo GHF.

Poi perche sopra le linee rette parallele E F C D cade la linea retta G K, l'angolo G H F è uguale all'angolo G K D. & si è dimostrato l'angolo A G H uguale all'angolo G H F. adunque anchor l'angolo A G K sarà vguale all'angolo G K D, & sono alterni. onde la A B è parallela alla C D. & però quelle linee che sono parallele alla medesima linea retta, saranno anche parallele fra loro. il che bisognaua dimostrare.



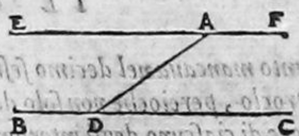
IL COMMANDINO.

Quelle linee che sono parallele alla medesima retta linea saranno anche fra loro parallele] *questo non è vero in tutti li rispetti, come dice Proclo, perche quelle che sono doppie della medesima non sono anche fra loro doppie, ne quelle che sono sesquialtere di vna medesima sono sesquialtere fra loro. ma pare che habbia luogo in quelle sole che si conuertono vniuocamente, come nella vgualità, somiglianza, identita, & nella positione parallela, per che quella che è parallela alla parallela, è parallela anchor essa, come etiandio quello che è vguale all'vguale è anche esso vguale, & quello che è simile al simile anch'esso è simile, conciosiacosa che il rispetto delle parallele fra loro sia vna somiglianza di positione.*

PROBLEMA X. PROPOSITIONE XXXI.

Per vn punto dato tirare vna linea retta, parallela ad vna data retta linea.

Sia il dato punto A, la data retta linea B C. bisogna per lo punto A tirare vna linea retta parallela alla B C. piglisi nella B C qual si voglia punto D, & giungasi A D, & nella linea retta D A & nel punto in essa A constituiscasi l'angolo D A E vguale all'angolo A D C, & per diritto alla E A prolunghisi la linea retta A F. perche dunque la linea retta A D cadendo sopra le due linee rette B C E F fa gli angoli alterni E A D A D C vguali fra loro, sarà la E F parallela alla B C. adunque per lo dato punto A si è tirata la linea retta E A F, parallela alla retta linea B C. il che bisognaua fare.



23. di questo.

27. di questo.

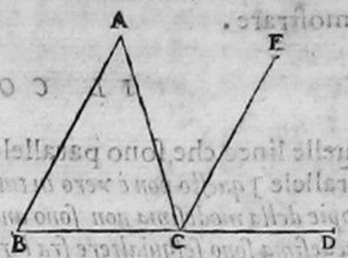
IL COMMANDINO.

Per un pũto dato tirare una linea retta parallela ad una data retta linea] *pare che questo problema c'insegni l'origine & nascimento delle parallele. ma bisogna pigliare il punto dato fuori della linea retta, di modo che la linea retta tirata da un punto ad essa faccia l'angolo, altramente niun'altra si potrà tirare fuor che la gia detta. ma sono differenti per lo punto dato & dal punto dato tirare una linea retta, percioche quando il punto è principio della linea retta, che è tirata, da esso si tira, come nel problema* [sopra la data retta linea infinita dal punto che non è in essa tirare una linea retta perpendiculare] *ma quando il punto è nella linea retta, per esso si dice tirarsi, come hora nelle parallele.* [per un dato punto tirare una linea retta parallela ad una data retta linea] *& come non è possibile dal medesimo punto sopra una data linea retta tirare due ò piu perpendicolari, cosi ne per l'istesso punto si possono tirare due ò piu parallele alla data linea retta; percioche le parallele concorrerebbono insieme in detto punto, che è in conueniente.*

Tirare la linea per lo punto dato, & dal pũto dato sono differenti.

THEOREMA XXII. PROPOSITIONE XXXII.

L'angolo esteriore di ciascun triangolo prolungandosi un lato è vguale alli due interiori, & opposti, & i tre angoli interiori del triangolo sono vguali à due retti.



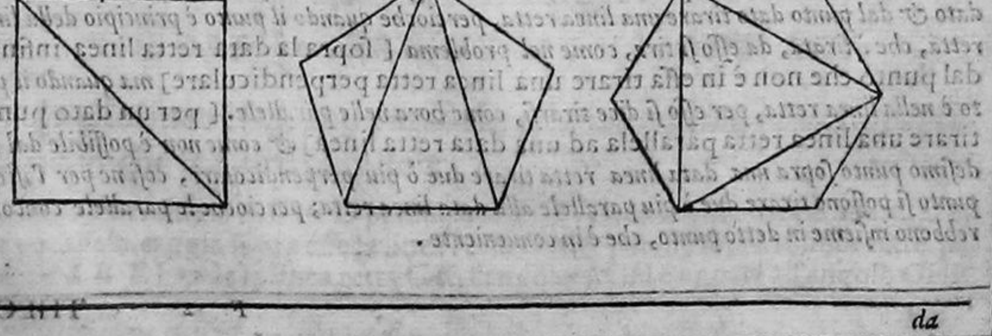
Sia il triangolo ABC & un lato di esso B C prolunghisi nel punto D. Dico l'angolo esteriore A C D essere uguale alli due interiori & opposti C A B A B C, & tre angoli interiori A B C B C A C A B del triangolo essere uguali à due retti. tirisi per lo punto C la CE parallela alla linea retta AB. & perche la AB è parallela alla C E, & in esse cade la CE, A C gli angoli alterni B A C A C E sono uguali fra loro. oltre à cio perche la A B è parallela alla C E, & in esse cade la linea retta B D, l'angolo esteriore E C D è uguale all' interiore, & opposto A B C, & si è dimostrato l'angolo A C E uguale all'angolo B A C. onde tutto l'esteriore angolo A C D è uguale alli due interiori, & opposti B A C A B C. pongasi A C B commune. adunque gli angoli A C D A C B sono uguali alli tre A B C B C A C A B. ma gli angoli A C D A C B sono uguali à due retti. onde anchor A C B C B A C A B saranno uguali à due retti. adunque l'angolo esteriore di ciascun triangolo prolungandosi un lato è uguale alli due interiori, & opposti, & i tre angoli interiori del triangolo sono uguali à due retti. il che bisognaua dimostrare.

per l'antecedente.

19 di questo.

IL COMMANDINO.

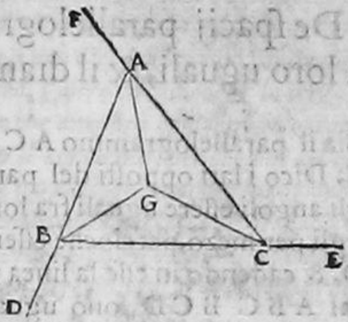
Quanto mancaua nel decimo sesto & decimo settimo theorema, tãto aggiungesi in questo, come nota Proclo, percioche non solo da questo imparano l'angolo esteriore di ogni triangolo esser maggiore di ciascuno degli interiori & opposti, ma anchor quanto sia maggiore; perche essendo uguale ad amendue è maggiore che l'uno di due del rimanente. ne per mezo di questo conoscemo solamente due quali si siano angoli del triangolo esser minori di due retti, ma quanto siano minori, cioè del rimanente delli tre. quelli adunque furono in un certo modo theoremi indefiniti, ma questo ha recato ad amendue il termine della scienza. di quel theorema che il triangolo habbia gli angoli interiori uguali à due retti, l'inuentione si da à Pithagorici secondo Eudemo. quale hanno dimostrato in altro modo, come dice Proclo, che dimostra anche due conuersi di questo theorema. onde può apparere in che modo due si conuertano con uno. essendo adunque chiaro per questo che i tre angoli interiori del triãgolo sono uguali à due retti, si è aperta la stra



da à noi, per la quale trouaremo anchor gli angoli dell' altre figure à quanti retti siano uguali. come delle quadrilatere, quinquelatere, & altre che seguono. onde prima è da sapere che ogni figura rettilinea si risolue in triangoli, percioche il triangolo è principio d'ogni constitutione, & ciascuna si risolue in triangoli che sono due meno delli proprij lati, come se la figura habbia quattro lati, si risolue in due triangoli; se cinque, in tre, se sei, in quattro, & così le rimanenti. & essendo i tre angoli interiori di ciascun triangolo uguali à due retti il numero de triangoli, de quali è composto ciascuna figura, doppiato ne darà la moltitudine de retti, à quali detta figura ha gli angoli vguali. la onde ogni figura quadrilatera essendo composta di due triangoli ha gli angoli vguali à quattro retti, & ogni figura quinquelatera ha gli angoli vguali à sei retti, & conseguentemente nel medesimo modo. ma è da sapere anchor questo [Ogni figura prolungato vna volta ciascuno de suoi lati hauere gli angoli che si constituiscono di fuori vguali à quattro retti] *il che noi dimostraremo così.*

Ogni figura rettilinea si risolue in triangoli che sono due meno delli proprij lati.

Sia il triangolo A B C, & prolunghinsi i lati A B B C C A alli punti D E F. Dico gli angoli C B D B A F A C E, che sono constituiti di fuori esser vguali à quattro retti.



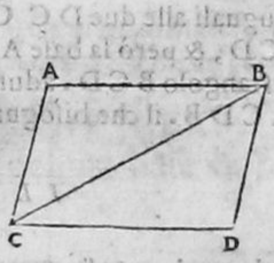
Piglisi dentro al triangolo qual si voglia punto G, & giunganſi G A G B G C. saranno tutti gli angoli de triangoli A G B B G C C G A vguali à sei retti. ma anchor gli angoli C B A C B D B A C B A F A C B A C E sono vguali à sei retti. adunque gli angoli di detti triangoli sono vguali à gli angoli C B A C B D B A C B A F A C B A C E. tragganſi i communi C B A B A C A C B. adunque i rimanenti che si fanno nel punto G sono vguali à gli angoli constituiti fuori della figura. ma gli angoli nel punto G sono vguali à quattro retti. adunque anchor gli angoli che sono constituiti fuori della figura cioè C B D B A F A C E saranno vguali à quattro retti. il che bisognaua dimostrare. nel medesimo modo dimostreremo anchor nelle altre figure, che gli angoli constituiti fuor di esse sono vguali à quattro retti.

Corollario della 15.

THEOREMA XXIII. PROPOSITIONE XXXIII.

Quelle linee rette che congiungono le vguali & parallele dalle medesime parti, anchor esse sono vguali & parallele.

Siano vguali, & parallele A B C D, & le linee rette A C B D le congiungano dalle medesime parti. Dico le A C B D essere vguali, & parallele. giungasi B C. & perche la A B è parallela alla CD, & cade in esse la B C, gli angoli alterni A B C B C D sono vguali. oltre à ciò perche la A B è vguale alla C D, & la B C commune, le due A B B C sono vguali alle due B C C D: & l'angolo A B C è vguale all'angolo B C D. adunque la base A C è vguale alla base B D; & il triangolo A B C al triangolo B C D; & gli angoli rimanenti sono vguali alli rimanenti, l'vno all'altro, à quali si sottopongono i lati vguali. onde l'angolo A C B è vguale all'angolo C B D. & perche nelle due linee rette A C B D cadendo la linea retta B C fa gli angoli alterni A C B C B D vguali fra loro, la A C è parallela alla B D: & si è dimostrata vguale ad essa. adunque quelle linee rette che congiungono le vguali & parallele dalle medesime parti, anch'esse sono vguali & parallele. il che bisognaua dimostrare.



29. di questo.

4. di questo.

27. di questo.

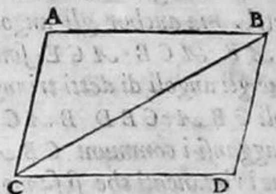
IL COMMANDINO.

Questo theorema diceuamo essere come confine della consideratione de parallelogrammi & de parallele, perche pare che dica un' accidente de linee rette uguali, & parallele, & pianamẽ te ne insegna l'origine & nascimento de parallelogrãmi, percioche il parallelogrãmo si fa dalle uguali, & parallele, che sono da principio tirate, & da quelle linee rette che le congiungono, le quali anche dimostra essere uguali, & parallele. il perche quello che subito segue, come se gia sia constituito il parallelogrammo, considera qual cose per se stesse in cosi fatti spacij si trouino. ma quanta diligenza si sia posta in questa propositione molto accortamente l'ha notato Proclo.

Il parallelogrammo come si faccia.

THEOREMA XXIIII. PROPOSITIONE XXXIIII.

De spacij parallelogrammi i lati, & gli angoli opposti sono fra loro uguali, & il diametro gli sega per mezo.



Sia il parallelogrammo A C D B, il cui diametro sia B C. Dico i lati opposti del parallelogrammo ACDB, & gli angoli essere uguali fra loro, & il diametro B C segargli per mezo, percioche essendo la A B parallela alla C D, & cadendo in esse la linea retta B C, gli angoli alterni A B C B C D sono uguali fra loro. similmente perche la A C è parallela alla B D, & in esse cade la BC, gli angoli alterni A C B C B D sono uguali fra loro. sono adunque due triangoli A B C C B D, che hanno due angoli A B C B C A uguali à due angoli B C D C B D, l'uno all'altro, & un lato uguale ad un lato, che è fra gli angoli uguali, commune ad amendue B C. adunque hauerãno anchora i lati rimanenti uguali alli rimanenti, l'un all'altro, & l'angolo rimanente uguale al rimanente; & percio il lato AB è uguale al lato CD, & il lato A C à B D, & l'angolo B A C uguale all'angolo B D C. & perche l'angolo A B C è uguale all'angolo B C D, & l'angolo C B D all'angolo A C B, sarà tutto l'angolo A B D uguale à tutto A C D, & si è dimostrato l'angolo B A C uguale all'angolo B D C. adunque de spacij parallelogrammi i lati, & gli angoli opposti sono uguali fra loro. dico anchora il diametro segargli per mezo, percioche essendo la A B uguale alla C D, & la B C commune, le due A B B C sono uguali alle due D C C B, l'una all'alrra, & l'angolo A B C uguale all'angolo B C D, & però la base A C è uguale alla base D B, & il triangolo A B C uguale al triangolo B C D. adunque il diametro B C sega per mezo il parallelogrammo A C D B. il che bisognaua dimostrare.

29. di questo.

26. di questo.

4. di questo.

IL COMMANDINO.

De theoremi, come dice Proclo, altri sono uniuersali, altri non uniuersali, & hora faremo mentione in che modo chiamiamo amendue questi, quando partiremo il quesito, quale ha una parte uniuersale, & l'altra parte non uniuersale. & benche ciascun theorema forse potesse parere uniuersale, & tutto quello che uien dimostrato da Euclide esser tale (si come anchor al presente non solo l'hauere i lati & gli angoli opposti uguali, perche si dica uniuersalmente de tutti i parallelogrammi, ma anche il diametro segargli per mezo) nientedimeno dicemo che altri si dimostrano uniuersalmente, altri non uniuersalmente, perche in altro modo si costuma chiamare uniuersale quello che porge il uero di tutte le cose, delle quali si dice. & in altro modo poi quello che comprende ogni cosa, nella quale si considera il medesimo accidente. percioche uniuer

De theoremi altri sono uniuersali, altri non uniuersali.

Vniuersale in due modi si può chiamare

sale

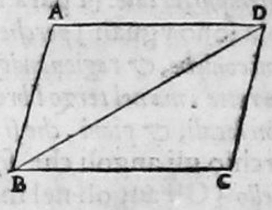
sale è quello che ciascun equicrure ha tre angoli uguali à due retti, essendo vero in tutti gli equicruri; & vniuersale altresi quello che ciascun triangolo ha tre angoli vguali à due retti, comprendendo tutte le cose nelle quali questo per se stesso si troua. la onde diremo ciò dimostrarsi etiandio principalmente del triangolo, che ha tre angoli vguali à due retti, & secondo questo significato che de theoremi altri sono vniuersali, altri non vniuersali, diciamo il presente theorema hauere vno de quesiti vniuersale, & l'altro non vniuersale, percioche questo è vniuersale, che habbia i lati & gli angoli opposti vguali, essendo solamente ne parallelogrammi. ma questo che il diametro seghi per mezo il spatio, non è vniuersale, perche non comprende tutte le cose, nelle quali si considera questo accidente, trouandosi anchora ne cerchi & ellipsi: & paiono le prime notitie de cosi fatte cose esser piu particolari, ma procedute che siano auanti comprendere il tutto, perche hauendo gli antichi considerato il diametro segare per mezo il cerchio, & la ellipse, & il parallelogrammo, hanno poi in questi considerato un commune. & come dice Aristotile, s'inganna colui che dimostra quello che non è vniuersale come vniuersale, per essere senza nome il commune, nel quale prima consiste quello accidente, percioche quel che sia commune à numeri à grandezze à moti, & à suoni, ne quali è la proportione permutata, non si può dire: & oltre à ciò difficilmente si può dire quel che sia cõmune à cerchi, ellipsi, & parallelogrammi, che vna figura è rettilinea, l'altra circulare, & la terza mista. la onde giudichiamo dimostrare vniuersalmente quello che dimostra ogni parallelogrammo esser segato per mezo dal diametro, perche non veggiamo il commune, per cagione del quale questo è vero. non è dunque ciò in tal modo vniuersale, ne parallelogrammi per la cagione già detta, ma è bene vniuersale quello, che ogni parallelogrammo habbia i lati, & gli angoli opposti vguali, percioche se sia proposta alcuna figura che habbia i lati, & gli angoli opposti vguali, questa si dimostrerà esser parallelogrammo. cosi scriue Proclo: & il conuerso di questo theorema inquanto appartiene alla prima parte, è tale.

L'hauer triangoli uguali à due retti si dimostra principalmente del triangolo.

Che'l diametro seghi per mezo il spacio non auuiene solamente parallelogrammi ma a cerchi, & ellipsi.

Quel che sia commune à cerchi, & ellipsi & parallelogrammi difficilmente si può dire.

Ogni quadrilatero che ha i lati, & gli angoli opposti uguali è parallelogrammo.

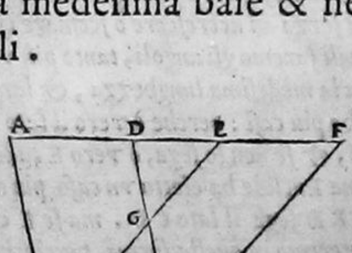


Sia il quadrilatero A B C D che habbia il lato A B vguale al lato D C, & il lato A D al lato BC, & parimente vguale l'angolo A B C all'angolo A D C, & l'angolo B A D all'angolo B C D. Dico il quadrilatero A B C D esser parallelogrammo. tirisi il diametro B D. & perche la A B è vguale alla D C, & la A D alla B C, le due D A A B sono vguali alle due B C C D, & contengono gli angoli vguali; & la base B D è commune ad amendue. il triangolo dunque A B D sarà vguale à C D B, & gli altri angoli à gli altri angoli, cioè l'angolo A B D all'angolo C D B, & l'angolo A D B all'angolo C B D, che sono alterni. adunque la A B è parallela alla D C, & la A D alla B C, & però A B C D è parallelogrammo. il che bisognaua dimostrare.

Il conuerso poi che appartiene alla seconda parte, sarà tale. [Ogni quadrilatero, che è segato per mezo da amendue li diametri è parallelogrammo. [*il che noi poco doppo dimostreremo.*

THEOREMA XXV. PROPOSITIONE XXXV.

I parallelogrammi constituiti nella medesima base & nelle medesime parallele, sono fra loro vguali.



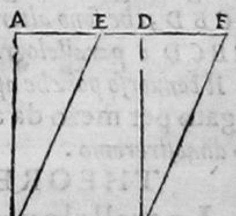
Siano i parallelogrammi A B C D E B C F nella medesima base B C, & nelle medesime parallele A F B C. Dico il parallelogrammo A B C D essere vguale al parallelogrammo E B C F. percioche essendo A B C D parallelogrammo, la A D è vguale alla B C. & per la medesima ragione la E F è vguale alla B C. onde la A D sarà vguale alla E F, & la DE è cõmune. adunque tutta la AE è uguale à tutta la D F. & è la A B vguale alla D C. on- 27. di quello.

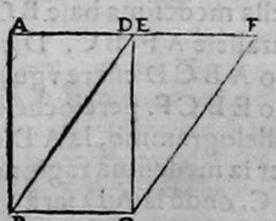
de le due E A A B sono vguali alle due F D D C, l'una all'altra, & l'angolo F D C vguale all'angolo E A B, l'esteriore all'interiore. la base dunque E B è vguale alla base F C, & il triangolo E A B uguale al triangolo F D C. traggasi il commune D G E. sara il rimanente trapezio A B G D uguale al rimanente E G C F. pongasi il triangolo G B C commune. adunque tutto il parallelogrammo A B C D sarà vguale à tutto il parallelogrammo E B C F, & perciò i parallelogrammi constituiti nella medesima base, & nelle medesime parallele sono fra loro uguali. il che bisognaua dimostrare.

4. di questo.

IL COMMANDINO.

Come de theoremi, secondo Proclo, diceuamo altri essere vniuersali, altri particolari, & come diuidendo questi soggiungeuamo altri essere semplici, altri composti, & dimostrauamo quel che fosse ciascuno di essi, cosi hora secondo vn'altra distintione, altri diciamo esser locali, altri non locali. chiamo locali quelli à quali auuiene il medesimo accidente in tutto vn certo luogo, & luogo chiamo il sito della linea, & della superficie, il quale fa vn medesimo accidente, conciosiacosa che de locali altri si constituiscono nelle linee, altri nelle superficie. & perche delle linee altre sono piane, altre solide, & le piane sono quelle, delle quali è vna semplice intelligenza nel piano, come della retta: & le solide quelle, l'origine delle quali appare da un certo segamento della figura solida, come della helica cylindrica, & delle linee coniche; direi anche di quei theoremi locali che si constituiscono nelle linee, altri hauere il luogo piano, altri solido. il presente dunque theorema è locale & locale nelle linee, & piano, percioche tutto lo spatio interposto fra le parallele è luogo de parallelogrammi constituiti nella medesima base, quali Euclide dimostra etiando essere uguali fra loro. ma di quei theoremi che sono chiamati solidi l'essempio sia tale. [I parallelogrammi, che si descriuono nelle asymptoti & hyperbola sono vguali] *perche è manifesto che la hyperbola è linea solida, essendo vna delle settioni coniche, & ragionandosi al presente de rettilinei pone i theoremi locali, & piani nelle linee rette. ma nel terzo libro trattandosi de cerchi, & loro accidenti ragionerà anche de theoremi locali, & piani, che si constituiscono nelle circonferenze, come è quello doue dice* [Nel cerchio gli angoli che sono nella medesima portione sono vguali fra loro] *& quello* [Gli angoli nel mezo cerchio sono retti] *percioche se nella circonferenza siano constituiti infiniti angoli stando la medesima base, tutti si dimostreranno vguali, & quelli proportionalmente rispondono à triangoli, & parallelogrammi, che sono nella medesima base, & nelle medesime parallele. le spetie dunque de theoremi seguenti appo gli antichi mathematici è chiamata locale. sono oltre à ciò questi theoremi del numero di quelli, che nelle discipline mathematiche si chiamano ammirabili, percioche subito si merauiglia il uolgo, come stando la medesima base la longhezza moltiplicata non distrugga l'ugualità de spatij, conciosiacosa che quanto prolunghiamo le parallele, tanto si accrescano le lunghezze de parallelogrammi. & è da sapere che l'ugualità ò disugualità de gli angoli hanno gran forza ad accrescere ò scemare i spatij, perche quanto più disuguali faremo gli angoli, tanto più verremo à scemare il spatio, se sia la medesima lunghezza, & larghezza. questo theorema ha piu casi: perche ò vero il lato B E sega C D, ò non lo sega, & se non lo sega, ò vero E cade fra A D, ò vero in D. ma Euclide ha eletto vn caso piu difficile, cioè quando il lato B E sega il lato C D. ma se E caggia fra A D, argumenteremo in questa forma. percioche essendo la A D vguale alla A F, per essere l'vna & l'altra vguale alla B C, tratta la commune E D, sarà la rimanente A E vguale alla rimanente D F: & è la D C vguale alla A B. onde le due F D D C sono vguali alle due E A A B: & contengono gli angoli vguali. adunque la base*



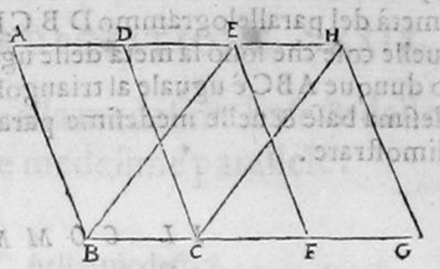


Theoremi locali & non locali.
Luogo è sito della linea & della superficie che fa il medesimo accidente.
Linee piane solide.
De theoremi locali altri hãno il luogo piano, altri solido.
Theoremi solidi.
L'hyperbola è linea solida.
Theoremi locali, & piani nelle linee rette.
Theoremi locali, & piani nelle circonferenze.
Theoremi chiamati ammirabili appò li mathematici.
La ugualità, & disugualita de gli angoli hanno gran forza ad accrescere ò scemare i spatij.
Questo theorema ha molti casi.

FC è vguale alla base EB: & il triangolo FDC al triangolo EAB. aggiungasi il trapezio cõmune EBCD. sarà tutto il parallelogrammo ABCD vguale à tutto il parallelogrammo EBCF. ma se E caggia in D, dimostreremo parimente il triangolo FDC vguale al triangolo DAB. la onde aggiunto il triangolo DBC commune all'vno & all'altro, sarà tutto il parallelogrammo ABCD vguale à tutto'l parallelogrammo DBCF, cioè EB vguale à CF.

THEOREMA XXVI. PROPOSITIONE XXXVI.

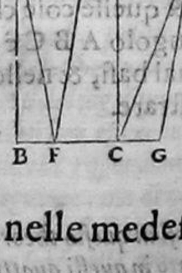
I parallelogrammi constituiti nelle vgual basi & nelle medesime parallele sono vguali fra loro.



Siano i parallelogrammi ABCD EFGH constituiti nelle basi vguali BC FG & nelle medesime parallele AH BG. Dico il parallelogrammo ABCD essere vguale al parallelogrammo EFGH. congiunganſi BE CH. & perche la BC è vguale alla FG, & la FG alla EH, sarà anchor la BC vguale alla EH: & sono parallele, & BE CH le congiungono. ma quelle, 33. di questo. che congiungono le vguali, & parallele dalle medesime parti, anch'esse sono vguali, & parallele. adunque le ED CA sono vguali, & parallele. onde EBCH è parallelogrammo, & vguale al parallelogrammo ABCD, perche hà la medesima base BC; & è constituito nelle medesime parallele BC AD. per l'antecedente. per la medesima ragione il parallelogrammo EFGH è vguale al medesimo parallelogrammo EBCH, & però il parallelogrammo ABCD sarà vguale al parallelogrammo EFGH. adunque i parallelogrammi constituiti nelle vgual basi, & nelle medesime parallele sono vguali fra loro. il che bisognaua dimostrare.

IL COMMANDINO.

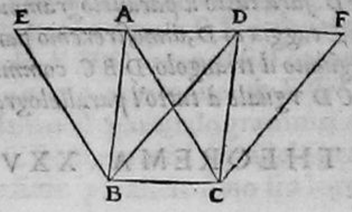
Il precedente theorema pigliaua le medesime basi, & questo le vguali. ma l'essere nelle medesime parallele, è ad amendue commune. bisogna dunque che non caggiano ne dentro delle soggette parallele, ne fuori, percioche i parallelogrammi si dicono essere nelle medesime parallele, quando le basi loro, & i lati che sono opposti si adattano alle medesime parallele. Quali parallelogrammi siano nelle medesime parallele. *I casi di questo sono molti, perche ò le basi sono in tutto separate, ò si toccano, ò vero hanno commune qualche parte, communque si siano i lati che sono opposti alle basi.* I casi di questo theorema. *& benche Proclo dica Euclide hauer fatta la dimostratione del theorema, pigliando la base separata, nientedimeno à me pare che la dimostratione c'habbiamo conuenga à tutti i casi, di modo che etiandio da questo luogo si può comprendere le dimostrationi di Euclide esser state da Theone ridutte in miglior forma.*



THEOREMA XXVII. PROPOSITIO. XXXVII.

I triangoli constituiti nella medesima base, & nelle medesime parallele sono vguali fra loro.

Siano i triangoli A B C D B C nella medesima base B C, & nelle medesime parallele A D B C. Dico il triangolo A B C essere uguale al triangolo DBC. prolunghisi la AD dall'una & l'altra parte ne punti E F. & per B tirisi la B E parallela alla C A, & per C la C F parallela alla B D. adunque è parallelogrammo l'uno & l'altro E B C A D B C F. & il parallelogrammo E B C A è uguale al parallelogrammo D B C F, perche sono nella medesima base B C, & nelle medesime parallele B C E F: & il triangolo A B C è la metà del parallelogrammo E B C A, conciosiacosa che il diametro A B lo seghi per mezo: & il triangolo D B C è la metà del parallelogrammo D B C F, segandolo per mezo il diametro D C, & quelle cose che sono la metà delle uguali, sono anche uguali fra loro. il triangolo dunque ABC è uguale al triangolo DBC. onde i triangoli constituiti nella medesima base & nelle medesime parallele sono uguali fra loro. il che bisognaua dimostrare.



31. di questo.

35. di questo.

34. di questo.

7. com. not.

IL COMMANDINO.

I theoremi de triangoli locali nelle linee, & piani.

I triangoli nelle medesime parallele quali siano.

Sono anche questi theoremi de triangoli che nella medesima, ò nelle ugual basi, & nelle medesime parallele si constituiscono, locali, & locali nelle linee & piani, & si dicono i triangoli essere nelle medesime parallele, quali hauendo le basi in una delle parallele, nell'altra fermano le lor cime.

THEOREMA XXVIII. PROPOSITIO. XXXVIII.

I triangoli constituiti nelle ugual basi, & nelle medesime parallele, fra loro sono uguali.

Siano i triangoli A B C D E F nelle basi uguali B C E F, & nelle medesime parallele B F A D. Dico il triangolo A B C esser uguale al triangolo D E F. Prolunghisi A D dall'una, & l'altra parte ne punti G H, & per B tirisi B G parallela alla C A, & per F tirisi F H parallela alla D E. adunque l'uno, & l'altro di essi G B C A D E F H è parallelogrammo. & è il parallelogrammo G B C A uguale al parallelogrammo D E F H, percioche sono nelle basi uguali B C E F, & nelle medesime parallele BF GH. ma il triangolo A B C è la metà del parallelogrammo G B C A, conciosiacosa che il diametro A B lo seghi per mezo. & il triangolo D E F è la metà del parallelogrammo D E F H, segandolo per mezo il diametro D F: & quelle cose che sono la metà delle uguali sono uguali fra loro. adunque il triangolo A B C è uguale al triangolo D E F: & però i triangoli costituiti nelle ugual basi, & nelle medesime parallele fra loro sono uguali. il che bisognaua dimostrare.

31. di questo.

36. di questo.

34. di questo.

7. com. not.

IL COMMANDINO.

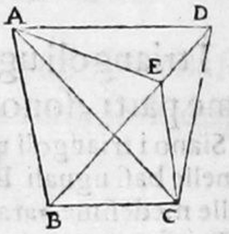
I casi in questo theorema sono tanti, quanti nel uigesimo sesto, & quello che Euclide ha dimostrato in questi quattro theoremi, mi pare essere compreso in quel solo theorema nel principio

del

del sesto libro [I triangoli, & parallelogrammi che hanno la medesima altezza fra loro sono, come le basi] percioche hauer la medesima altezza non è altro che essere nelle medesime parallele, conciosiacosa, che tutte le figure che sono nelle medesime parallele habbiano l'altezza medesima, & cosi al contrario, essendo l'altezza la perpendiculare che si tira da una delle parallele all'altra. in quel luogo dunque per la proportione fu dimostrato, i triangoli & parallelogrammi c'hãno la medesima altezza cioè che sono nelle medesime parallele essere fra loro, come le basi, & se le basi sono uguali etiandio li spatij esser uguali, & se doppie anchor li spatij esser doppij, & se hanno altra proportione, la medesima proportione hauer i spatij fra loro. ma in questo luogo perche non si poteua seruire della proportione non hauendo prima di essa trattato, si contentò della ugualità sola, & della identità.

THEOREMA XXIX. PROPOSITIONE XXXIX.

I triangoli uguali constituiti nella medesima base & dalle medesime parti sono etiandio nelle medesime parallele. A



Siano i triangoli uguali A B C D B C nella medesima base B C, & dalle medesime parti. Dico essere anchora nelle medesime parallele. giungasi A D. Dico la A D essere parallela alla B C, percioche se non è parallela tirisi per A la linea retta A E parallela alla B C, & giungasi E C. adunque il triangolo A B C è uguale al triangolo E B C, essendo nella medesima base B C & nelle medesime parallele B C A E. ma il triangolo A B C è uguale al triangolo D B C. onde etiandio il triangolo D B C è uguale al triangolo E B C. il maggiore al minore, che non puo essere. non è adunque A E parallela alla B C. similmente dimostreremo niuna altra essere parallela, fuor che la A D. adunque la A D è parallela alla B C, & però i triangoli uguali constituiti nella medesima base, & dalle medesime parti sono etiandio nelle medesime parallele. il che bisognaua dimostrare.

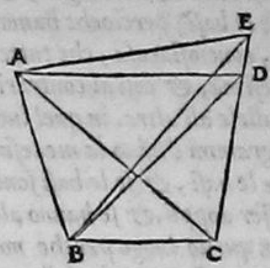
31. di questo.
37. di questo.
B

IL COMMANDINO.

Questo theorema è conuerso del uigesimo settimo, & quello che seguita è conuerso del uigesimo ottauo, percioche, come dice Proclo, essendo la conuersione de theoremi di trè maniere, ò uero il tutto si conuerte al tutto, come il duodecimo all'undecimo, ò uero la parte al tutto, come il terzo al secondo, ò la parte alla parte, come il quinto al primo, conciosiacosa che non tutto quello che è dato in uno, si cerchi nell'altro, ne tutto quello che si cerca, sia dato, ma una parte sola. di simil maniera paiono essere anchora questi theoremi de triangoli, percioche ne precedenti si cercaua i triangoli esser uguali, ma cio non è dato solamente in questi, hauendo preso una parte di quello che in essi si poneua, perche l'essere in una medesima base, & nelle basi uguali è dato, cosi in questi come in quelli, fuor che in queste positioni ui è aggiunto un certo che, che in quelli ne si cercaua, ne era dato, conciosiacosa che quella particella [dalle medesime parti] sia stata presa di fuori. I theoremi conuersi del uigesimo quinto, & uigesimo sesto ne parallelogrammi con determinato consiglio ha lasciati per essere in amendue la medesima dimostratione [Dalle medesime parti] *quelle parole che rispondono à queste in alcuni libri greci non si trouano cosi in questo theorema come nel seguente. ma di necessità ui sono state aggiunte, percioche può essere che nella medesima base siano presi triangoli uguali, l'uno dalle parti di sopra & l'altro da quelle di sotto, quali però non sono nelle medesime parallele, & spesse uolte non della medesima altezza.*

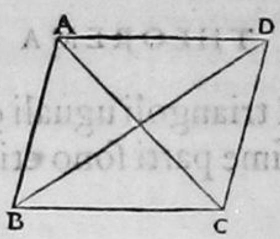
La conuersione de theoremi è di tre maniere.
A

Il maggiore al minore, che non può essere] *il me-*
B *desimo inconueniente seguirà se la linea retta A E si pigli fuori di essa A D, come nota Proclo. Dalle cose che si sono dimostrate in questo luogo appare il conuerso della seconda parte del uigesimoquarto theorema, che era tale.*



Ogni quadrilatero che da amendue li diametri si sega per mezo è parallelogrammo.

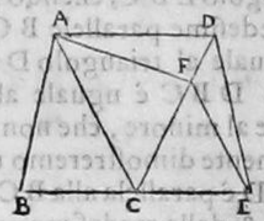
Sia il quadrilatero A B C D, i cui diametri A C B D lo seghino per mezo. Dico A B C D essere parallelogrammo. percioche essendo i triangoli A B C D B C la metà del medesimo quadrilatero, sono fra loro uguali, & hanno la medesima base BC. adunque sono nelle medesime parallele. però A D è parallela alla BC. similmente essendo il triangolo A B C uguale al triangolo A B D, & nella medesima base A B, si dimostrerà la linea retta D C esser parallela alla A B. adunque A B C D sarà parallelogrammo. il che bisognaua dimostrare.



THEOREMA XXX. PROPOSITIONE XL.

I triangoli uguali constituiti nelle basi uguali, & dalle medesime parti, sono anche nelle medesime parallele.

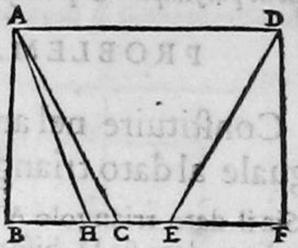
Siano i triangoli uguali A B C C D E constituiti nelle basi uguali B C C E. Dico etiandio essere nelle medesime parallele. giungasi A D. Dico la A D essere parallela alla B E. perche se non è, tirisi per A la A F parallela alla B E, & giungasi F E. adunque il triangolo A B C è uguale al triangolo F C E, essendo constituiti nelle basi uguali & nelle medesime parallele B E A F. ma il triangolo A B C è uguale al triangolo D C E. onde anchor il triangolo D C E sarà uguale al triangolo F C E il maggiore al minore, che non può essere. la A F dunque non è parallela alla B E. dimostreremo similmente non essere alcun'altra parallela fuori che la A D. adunque la A D sarà parallela alla B E. & però i triangoli uguali constituiti nelle basi uguali, & dalle medesime parti, sono anche nelle medesime parallele. il che bisognaua dimostrare.



IL COMMANDINO.

Essendo tre cose nelle già dette propositioni, cioè l'essere nelle uguali, ò nelle medesime basi, & nelle medesime parallele, & i triangoli, & parallelogrammi essere uguali, noi pigliandone sempre due, & lasciando una in uarij modi conuertiremo; percioche ò uero porremo le medesime ò le ugual basi, & nelle medesime parallele i triangoli & parallelogrammi, & faremo quattro theoremi, ò uero gli piglieremo uguali, & le basi medesime ò uguali, & faremo quattro altri theoremi, due de quali Euclide ha lasciati, cio è quelli che sono ne parallelogrammi, ma gli altri due dimostra, cioè quelli che sono ne triangoli; ò uero quando hauendogli presi uguali, & nelle medesime parallele, dimostreremo il rimanente, ò essere nelle medesine basi, ò nelle uguali, & faremo altri quattro, quali parimente ha lasciati Euclide, perche in questi è la medesima dimostratione. fuor che due di questi quattro non sono ueri per sestessi, conciosia cosa che i parallelogrammi ò triangoli uguali & che sono nelle medesime parallele, non siano necessariamente nella medesima base. ma tutto ciò è uero inqueste positioni, ò essere nelle medesime basi, ò nelle uguali. ma l'uno di essi non seguita in tutte le positioni già prese. la onde *essendo dieci tutti i theoremi, sei ne ha presi il Geometra, & quattro n'ha lasciati, accioche non si affatichi indarno essendo la medesima dimostratione perche ne triangoli si dimostrerà in questo modo.*

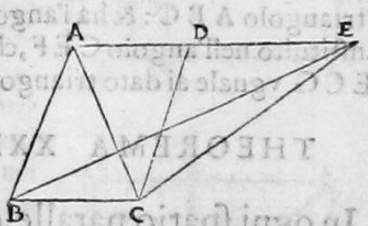
I triangoli vguali, & constituiti nelle medesime parallele, ò saranno nelle medesime, ò nelle vgual basi.



Siano i triangoli vguali A B C D E F constituiti nelle medesime parallele A D B F. Dico che sono anchora nelle basi vguali. Non già, ma se esser può; siano le basi B C E F disuguali, & sia la B C maggiore, & taglisi la B H vguale alla E F. & giungasi A H. onde perche i triangoli A B H D E F sono nelle basi vguali B H E F, & nelle medesime parallele, saranno vguali fra loro. ma etiandio i triangoli A B C D E F si sono posti vguali. adunque il triangolo A B C è vguale al triangolo A B H; ma è maggiore, che non può essere. le basi adunque de triangoli A B C D E F non sono disuguali. il medesimo anchora si dimostrerà ne parallelogrammi. onde essendo il medesimo modo di dimostrare, & quello che non può essere il medesimo, cioè che il tutto sia vguale alla sua parte, non senza cagione è stato pretermesso da Euclide. così scriue Proclo.

THEOREMA XXXI. PROPOSITIONE XLI.

Se il parallelogrammo & triangolo hanno la medesima base, & sono nelle medesime parallele, il parallelogrammo sarà doppio del triangolo.



Il parallelogrammo A B C D, & il triangolo E B C habbiano la medesima base BC, & siano nelle medesime parallele B C A E. Dico il parallelogrammo ABCD esser doppio del triangolo EBC. giungasi A C. adunque il triangolo ABC è vguale al triangolo E B C, perche sono nella medesima base B C, & nelle medesime parallele B C A E. 37. di questo.
ma il parallelogrammo A B C D è doppio del triangolo A B C, segandolo per mezo il diametro A C. onde sarà anche doppio di esso triangolo E B C. & però se il parallelogrammo, & triangolo hanno la medesima base, & sono nelle medesime parallele, il parallelogrammo sarà doppio del triangolo. il che bisognaua dimostrare. 34. di questo.

IL COMMANDINO.

Sono due casi di questo theorema, perche ò vero il triangolo ha la cima dentro ò fuori del parallelogrammo. ma in amendue è la medesima dimostratione, & se le basi siano vguali dimostreremo nel medesimo modo tirando il diametro de parallelogrammi, perche essendo i triangoli constituiti nelle vgual basi, il parallelogrammo che è doppio di vno, sarà anchor doppio del rimanente. ma si dimostreranno parimente due conuersi di esso, l'vno de quali è questo.

Se il parallelogrammo è doppio del triágolo & hanno la medesima base, ò le basi vguali, & sono dalle medesime parti, saranno anche le medesime pararelle.

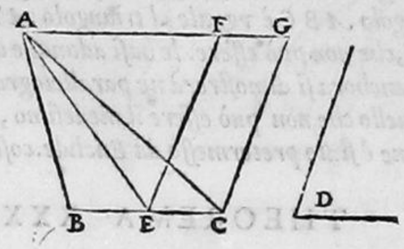
Che se non è così, il tutto sarà vguale alla parte, & la medesima ragione valerà, percioche è necessario che la cima del triangolo ò caggia dentro ò fuori delle parallele, & in qual modo si sia, seguiterà il medesimo inconueniente, tirata per la cima del triangolo la parallela alla base l'altro è questo.

Se il parallelogrammo è doppio del triangolo, & amendue sono nelle medesi me parallele, saranno in vna medesima base, ò in basi vguali.

Perche se siano in disugual basi, hauendole prese vguali, il tutto sarà vguale alla parte. in questo dunque commune inconueniente terminano tutti questi theoremi. onde l'institutore degli elementi ci ha lasciato inuestigare la verità che in essi si troua, hauendo egli fatta la considera tione ne piu semplici & principali, come dice Proclo.

PROBLEMA XI. PROPOSITIONE XLII.

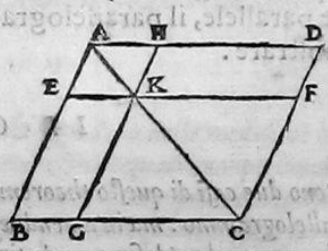
Constituire nel angolo rettilineo dato vn parallelogrammo vguale al dato triangolo.



Sia il dato triangolo A B C, l'angolo rettilineo dato sia D. bisogna nell'angolo rettilineo vguale ad esso D constituire un parallelogrammo vguale al triangolo A B C. seghisi B C per mezo nel punto E: & giunta A E nella linea retta E C, & 23. di questo. nel punto ch'è in essa E constituiscasi l'angolo C E F, vguale all'angolo D, & per A tirisi la A G parallela alla E C, & per C 31. di questo. tirisi la C G parallela alla F E. adunque F E C G è parallelogrammo. & perche la 38. di questo. B E è vguale alla E C, sarà anche il triangolo A B E vguale al triangolo A E C, conciosiacosa che siano nelle basi vguali B E E C, & nelle medesime parallele 34. di questo. B C A G. il triangolo dunque A B C è doppio del triangolo A E C. & è etiandio il parallelogrammo F E C G doppio del triangolo, perche ha la medesima base, & è nelle medesime parallele. onde il parallelogrammo F E C G è vguale al triangolo A B C: & ha l'angolo C E F vguale all'angolo dato D. adunque si è constituito nell'angolo C E F, che è vguale al dato angolo D, il parallelogrammo F E C G vguale al dato triangolo A B C. il che bisognaua fare.

THEOREMA XXXII. PROPOSITIONE XLIII.

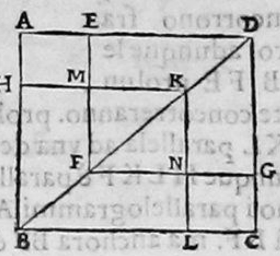
In ogni spatio parallelogrammo i supplementi di quei parallelogrammi che sono d'intorno al diametro, sono vguali fra loro.



Sia il parallelogrammo A B C D, il cui diametro A C: & d'intorno ad esso A C siano i parallelogrammi E H F G: & quei che si chiamano supplementi B K K D. Dico il supplemento B K esser vguale al supplemento K D, percioche essendo A B C D parallelogrammo, 34. di questo. & il suo diametro A C, sarà il triangolo A B C vguale al triangolo A D C. poi perche E K H A è parallelogrammo, il cui diametro A K, sarà il triangolo A E K vguale al triangolo A H K, & per la medesima ragione il triangolo K G C è vguale al triangolo K F C. essendo dunque il triangolo A E K vguale al triangolo A H K, & il triangolo K G C à K F C, sarà il triangolo A E K insieme col triangolo K G C vguale al triangolo A H K insieme con K F C. & è tutto il triangolo A B C vguale à tutto il triangolo A D C. adunque il rimanente supplemento B K è vguale al rimanente K D. & però in ogni spatio parallelogrammo i supplementi di quei parallelogrammi che sono d'intorno al diametro, sono uguali fra loro. il che bisognaua dimostrare.

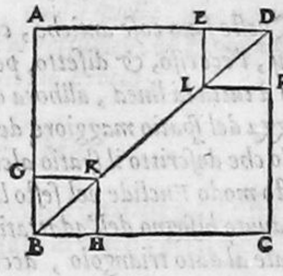
IL COMMANDINO.

Tre sono i casi di questo theorema, percioche ò vero i parallelogrammi che stanno d'intorno al medesimo diametro si toccano in un punto, ò vero si segano, ò sono separati da vna parte del diametro. ma in tutti conuiene la medesima dimostratione, auenga che non sempre siano i supplementi quadrilateri. Euclide ha preso quei parallelogrammi quali si dicono propriamente stare d'intorno al diametro, cioè quelli che si toccano in vn punto, nel qual caso i supplementi B K K D sono quadrilateri, come appare nella prima figura. sia poi il parallelogrammo A B C D, il cui diametro B D, & d'intorno à B D siano i parallelogrammi E F G D H B L K, quali si seghino ne punti M N. Dico i quadrilateri A H M E N L C G essere vguali fra loro, percioche essendo il triangolo A B D vguale al triangolo D B C, & il triangolo E F D al triangolo D F G, sarà il rimanente quadrilatero A B F E vguale al rimanente C B F G. oltre à ciò perche il triangolo H B K è vguale al triangolo K B L, & il triangolo M F K al triangolo K F N, sarà il rimanente quadrilatero H B F M vguale al rimanente L B F N. ma tutto A B F E era vguale à tutto C B F G. adunque è necessario che il rimanente quadrilatero A H M E sia vguale al rimanente N L C G: & questi quadrilateri sono quelli che si chiamano supplementi.

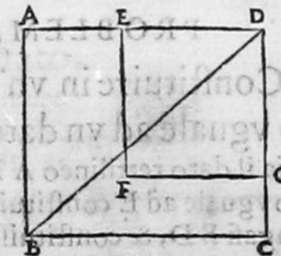


34. di questo.

Sia finalmēte il parallelogrāmo A B C D, & il suo diametro BD, d'intorno al quale siano i parallelogrammi E L F D G B H K separati da vna parte del diametro K L. & perche il triangolo A B D è vguale al triangolo D B C, & i triangoli E L D G B K vguali à i triangoli D L F K B H, sarà il rimanente quinquelatero A C K L E vguale al rimanente H K L F C. & questi sono i supplementi de parallelogrammi. ma il nome de supplementi è preso dalla cosa medesima, in quanto anchor essi, oltre alli due parallelogrammi che sono d'intorno al diametro, compiscono tutto il parallelogrammo, & tutti quei parallelogrammi sono d'intorno al medesimo diametro quali hanno vna parte di tutto il diametro per diametro loro. ma quando il diametro di tutto il parallelogrammo sega alcun lato del parallelogrammo di dentro, allhora questo parallelogrammo à tutto il parallelogrammo non è d'intorno al medesimo diametro, come nel parallelogrammo A B C D il diametro B D sega il lato E F del parallelogrammo E F G D. onde il parallelogrammo E F G D non è d'intorno al medesimo diametro.



Il nome de supplementi è preso dalla cosa medesima.



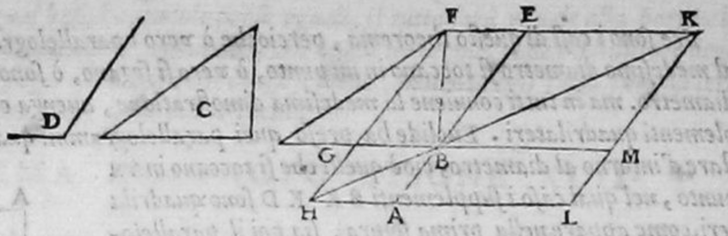
PROBLEMA XII. PROPOSITIONE XLIIII.

Alla data retta linea in vn angolo rettilineo dato adattare un parallelogrammo vguale al dato triangolo.

Sia la data retta linea A B, & il dato triangolo C, & l'angolo rettilineo dato D. bisogna dunque alla data linea retta A B nell'angolo vguale à D adattare vn parallelogrammo che sia vguale al dato triangolo C. constituiscasi il parallelogrammo B E F G vguale al triangolo C nell'angolo E B G, che è vguale à D: & pongasi la B E per diritto alla A B: & prolunghisi la F G nel punto H; & per A tirisi la A H parallela ad vna di esse B G E F, & giungasi H B. perche dunque nelle parallele A H E F cade la linea retta HF, gli angoli A H F H F E sono vgua

42. di questo.
31. di questo.
29. di questo.

li à due retti. onde B H G G F E sono minori di
5. Post. due retti: & quelle linee che da minori di due retti si prolungano in infinito, concorrono fra loro. adunque le H B F E prolun



31. di questo. gate concorreranno. prolunghinsi, & concorrano nel punto K. & per K tirisi la K L parallela ad vna delle E A F H, & le A H G B prolunghinsi ne punti M L. adunque H L K F è parallelogrammo, il cui diametro H K: & d'intorno ad H K
Per l'antecedente. sono i parallelogrammi A G M E, & i supplementi L B B F. adunque L B è vguale à B F. ma anchora BF è vguale al triangolo C. onde etiandio LB sarà vguale al
15. di questo. triangolo C. & perche l'angolo G B E è vguale all'angolo A B M, ma ancho è vguale all'angolo D, sarà l'angolo A B M vguale all'angolo D. adunque alla data linea retta A B nell'angolo A B M, che è vguale all'angolo D, si è adattato il parallelogrammo L B, vguale al dato triangolo C. il che bisognaua fare.

IL COMMANDINO.

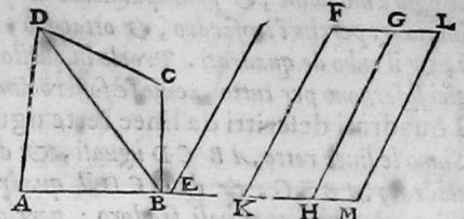
Queste sono cose antiche, come dice Eudemo & inuentioni de Pithagorici l'adattatione de spatij, l'eccesso, & difetto, perche quando proposta la linea retta il dato spatio sia accommodato à tutta la linea, allhora dicono quel spatio essere adattato. ma quando si faccia la lunghezza del spatio maggiore della linea retta, allhora dicono eccedere & quando minore, di modo che descritto il spatio alcuna parte della linea retta resti di fuori, dicono mancare, & in questo modo Euclide nel sesto libro fa mentione & dell'eccesso, & del difetto, ma al presente ha hauuto bisogno dell'adattatione, volendo alla data retta linea adattare vn parallelogrammo vguale al dato triangolo, accio che non solo habbiamo la constitutione del parallelogrammo vguale al dato triãgolo, ma l'adattatione ancora alla linea retta terminata. questo è di Proclo.

PROBLEMA XIII. PROPOSITIONE XLV.

Constituire in vn'angolo rettilineo dato vn parallelogrammo vguale ad vn dato rettilineo.

Sia il dato rettilineo A B C D, & l'angolo rettilineo dato E. bisogna in vn'angolo vguale ad E constituire vn parallelogrammo vguale al rettilineo A B C D. giungasi B D, & constituiscasi il parallelogrammo FH, vguale al triangolo ADB
42. di questo. nell'angolo H K F, vguale ad E, & poi alla linea retta G H adattisi il parallelo-
per l'antecedente. grammo G M, vguale al triangolo D B C, nell'angolo G H M, che è vguale ad E. & perche l'angolo E è vguale ad amendue H K F G H M, sarà anche H K F vguale à G H M. pongasi K H G commune. adunque gli angoli F K H K H G sono
29. di questo. vguali à gli angoli KHG G H M. ma F K H K H G sono vguali à due retti. adunque K H G G H M saranno vguali à due retti, & però nella linea retta G H & nel dato punto H, che è in essa, le due linee rette K H H M non poste dalle medesime parti fanno gli angoli conseguenti vguali à due retti. adunque la K H è per dirit
14. di questo. to alla H M. & perche nelle parallele K M F G cade la linea retta H G, gli angoli
29. di questo. alterni M H G H G F sono vguali. pongasi H G L commune. gli angoli dunque M H G H G L sono vguali à gli angoli H G F H G L. ma gli angoli M H G H G L sono vguali à due retti. onde anchor gli angoli H G F H G L saranno uguali à due retti. adunque la F G è per diritto alla G L. & perche
34. di questo. la K F è vguale & parallela alla H G, ma anchor la H G alla M L, sarà la K F vgua
30. di questo.

le & parallela alla M L. & sono cógiunte dalle linee rette KM FL. adunque le KM F L anchora sono vguali & parallele. onde K F L M è parallelogrammo. & essendo il triangolo A B D vguale al parallelogrammo H F, & il triangolo D B C al parallelogrammo G M, sarà tutto il rettilineo A B C D vguale à tutto'l parallelogrammo KF L M. si è dunque constituito nell'angolo F K M, che è vguale al dato angolo E, il parallelogrammo KF LM, vguale al dato rettilineo A B C D. il che bisognaua fare. 33. di questo.



IL COMMANDINO.

Questo è piu uniuersale di due problemi, ne quali ha trouato la constitutione & addatatione de parallelogrammi uguali al dato triangolo perche ò sia dato il triangolo, ò il quadrato ò quadrilatero, ò alcun'altra figura multilatera per questo problema gli constituiremo un parallelogrammo uguale, conciosiacosa che ogni rettilineo per se stesso si risolua in triangoli, come s'è detto prima, & habbiamo data la uia di trouare la moltitudine de triangoli. resoluendo dunque il dato rettilineo in triangoli, & constituendo il parallelogrammo uguale ad uno di essi, & adattando i parallelogrammi uguali à gli altri, alla data linea retta, cioè à quella, alla quale s'è fatta la prima adattatione, haueremo il parallelogrammo uguale al rettilineo che è composto di quei triangoli & sarà fatto quello che si proponeua. queste cose scriue Proclo.

COROLLARIO.

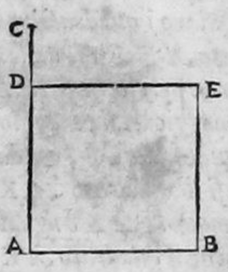
Dalle cose gia dette è manifesto, come in un dato angolo rettilineo ad una data linea retta si possa adattare un parallelogrammo uguale al dato rettilineo.

PROBLEMA XIIII. PROPOSITIONE XLVI.

Dalla data linea retta descriuere vn quadrato.

Sia la data linea retta A B. bisogna dalla A B descriuere un quadrato. tirisi la A C ad angoli retti sopra la A B dal punto A dato in essa, & pongasi la A D uguale alla A B, & per D tirisi la D E parallela alla A B, & per B la B E parallela alla A D. adunque A D E B è parallelogrammo, & la AB è uguale alla D E, & la A D alla BE. ma anchora la B A è uguale alla A D. onde le quattro B A AD DE EB, sono uguali fra loro: & pero il parallelogrammo A D E B è equilatero. Dico parimente esser rettangolo, percioche cadendo nelle parallele A B DE la linea retta A D, gli angoli B A D A D E sono uguali à due retti. ma B A D è retto. adunque etiandio A D E sarà retto. & de spatij parallelogrammi i lati & gli angoli opposti sono uguali fra loro: & però ciascuno de gli angoli opposti A B E B E D è retto: & A D E B è rettangolo. ma si è dimostrato anchora essere equilatero. la onde è necessario che sia quadrato. & si è descritto dalla linea retta A B. il che bisognaua fare.

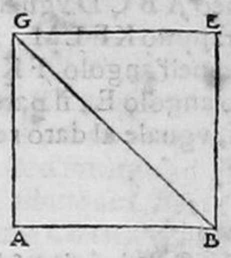
11. di questo.
31. di questo:
29. di questo.
34. di questo.



IL COMMANDINO.

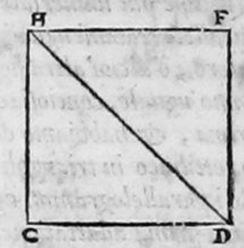
Habbiamo bisogno di questo problema massimamente per la construttione del theorema seguente, & pare che Euclide habbia uoluto insegnare il nascimento di due principali rettilinei, *cioè del triangolo equilatero & del quadrato, perciochè si ricercano questi alle constitutioni delle figure mondane, & principalmente di quelle quattro, delle quali è il nascimento & la resolutione. perche l'icosaedro, & ottaedro, & pyramide si compongono de triangoli equilateri, & il cubo de quadrati. Proclo in questo luogo dimostra due theoremi de quali i mathematici si seruono per tutto, come se fossero dimostrati, cioè questi.*

I quadrati descritti da linee rette uguali, sono anche fra loro uguali.

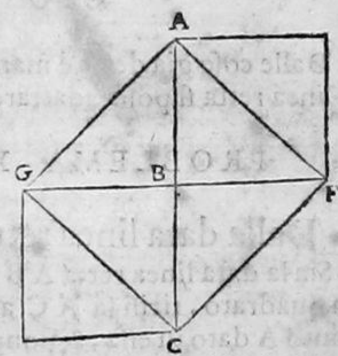


Siano le linee rette A B C D uguali, & dalla A B descriuasi il quadrato A B E G, & dalla C D il quadrato C D F H. Dico questi quadrati essere uguali fra loro; perciochè essendo le linee rette A B C D uguali, saranno anchor le A G C H uguali; & contengono uguali angoli. adunque anchor la base G B è uguale alla H D, & il triangolo A B G è uguale al triangolo C D H: & i doppij loro sono uguali. onde il quadrato A B E G sarà uguale al quadrato C D F H. ma il conuerso anchora di questo.

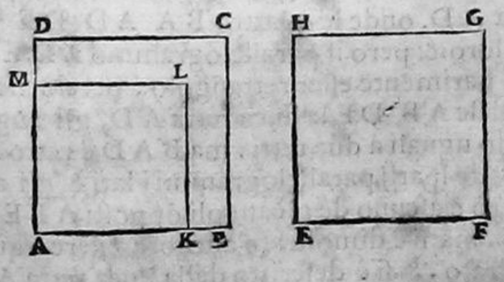
I quadrati uguali sono descritti da linee rette uguali.



Siano i quadrati uguali A F C G, & ponganſi di modo che il lato A B sia per diritto al B C. essendo dunque gli angoli retti, anchor la linea retta F B sarà per diritto alla B G. giunganſi le linee rette F C C G G A A F. & perche il quadrato A F è uguale al quadrato C G, anchor il triangolo A F B sarà uguale al triangolo C B G. pongasi il triangolo B C F commune. adunque tutto il triangolo A C F è uguale à tutto C F G, & però la A G è parallela alla F C. oltre à ciò perche l'angolo A F G è uguale all'angolo C G B, essendo amendue la metà di un retto, sarà la
39 di questo
A F parallela alla C G, & è la linea retta A F uguale alla C G essendo lati opposti del parallelogrammo. onde perche sono due triangoli A B F B C G, che hanno gli angoli alterni uguali, essendo le A F C G parallele, & un lato A F è uguale al lato C G; sarà anche il lato A B uguale al lato B C; & il lato B F al lato B G. si è dimostrato dunque i lati, da quali sono descritti i quadrati A F C G essere uguali fra loro, essendo quelli uguali. possiamo anchora dimostrare quello che s'è proposto altrimenti per l'impossibile in questa maniera.

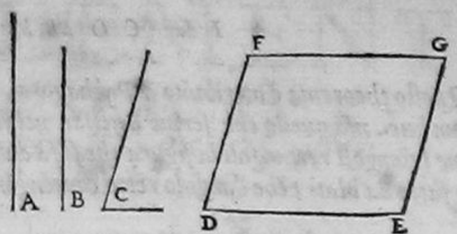


Siano i quadrati uguali A B C D E F G H. Dico le linee rette A B E F, dalle quale sono descritti, essere uguali fra loro. perciochè se le A B E F non sono uguali, una di loro è maggiore. sia maggiore A B, & taglisi la A K, che sia uguale alla E F, & dalla A K descriuasi il quadrato A K L M. perche dunque la A K è uguale alla E F, sarà anche il quadrato A K L M, per le cose gia dimostrate vguale al quadrato E F G H. ma il quadrato A B C D anche esso sarà vguale al medesimo E F G H. adunque il quadrato A B C D è vguale al quadrato A K L M, il tutto alla parte, che non può essere. essendo dunque i quadrati A B C D E F G H uguali, le linee rette A B E F. dalle quali si descriuono, non sono disuguaili. adunque è necessario che siano uguali fra loro. sara anchor utile alla constitutione de parallelogrammi il problema che seguita.



Da due linee rette, lequali siano uguali à due date, & in un'angolo rettilineo dato constituire un parallelogrammo.

Siano le date linee rette A B, & l'angolo rettilineo dato C. bisogna da due linee rette, lequali siano uguali alle A B, & in un'angolo uguale à C, constituire il parallelogrammo. propongasi la linea retta D E, laquale sia uguale alla A. onde nella data linea retta D E & nel punto dato in essa D constituiscasi l'angolo F D E, uguale all'angolo rettililineo dato C, di modo che la F D sia uguale alla data linea retta B. poi per F tirisi la F G parallela alla D E: & per E tirisi una parallela alla D F, laquale concorra con la F G nel punto G. adunque F D E G è parallelogrammo constituito da linee rette D E D F, che sono uguali alle date linee rette A B & contengono l'angolo F D E, uguale al dato angolo C. il che bisognaua fare.

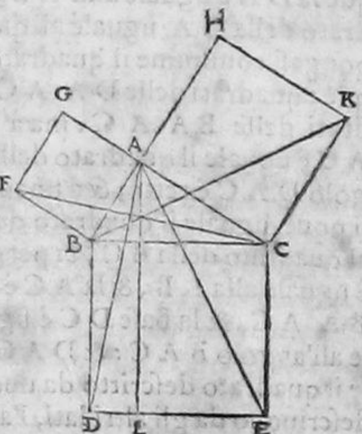


23. di questo.

31. di questo.

THEOREMA XXXIII. PROPOSITIONE XLVII.

Ne triangoli rettangoli il quadrato che si descriue dal lato sottoposto all'angolo retto è uguale alli quadrati descritti da i lati, che l'angolo retto contengono.



Sia il triangolo rettangolo ABC, che habbia l'angolo B A C retto. Dico il quadrato descritto dalla retta B C essere uguale alli quadrati che si descriuono dalle B A A C. descriuasi dalla B C il quadrato B D E C & dalle B A A C i quadrati G B H C: & per A tirisi la A L parallela ad una di esse B D C E: & giungansi A D F C. perche dunque l'uno & l'altro de gli angoli B A C B A G è retto, ad una linea retta B A & al dato punto in essa A due linee rette A C A G, non poste dalle medesime parti fanno gli angoli conseguenti uguali à due retti. adunque C A è per diritto alla A G; & per la medesima ragione la A B è per diritto alla A H. & perche l'angolo D B C è uguale all'angolo F B A, essendo amendue retti. pongasi commune A B C. adunque tutto l'angolo D B A è uguale à tutto F B C. & perche le due A B B D sono uguali alle due F B B C, l'una all'altra, & l'angolo D B A è uguale all'angolo F B C, sarà anhor la base A D uguale alla base F C, & il triangolo A B D uguale al triangolo F B C; & il parallelogrammo B L è doppio del triangolo A B D, perche hanno la medesima base B D, & sono nelle medesime parallele B D A L; & il quadrato G B è doppio del triangolo F B C, perche anch'essi hanno la medesima base F B & sono nelle medesime parallele F B G C. ma quelle che sono doppie delle uguali, sono uguali fra loro. adunque il parallelogrammo B L è uguale al quadrato G B; & giunte parimente A E B K si dimostrerà anche il parallelogrammo C L uguale al quadrato H C. tutto dunque il quadrato B D E C è uguale alli due quadrati G B H C, & si descriue il quadrato B D E C dalla linea retta B C, & i quadrati G B H C dalle B A A C. adunque il quadrato B E descritto dal lato B C è uguale alli quadrati descritti da i lati B A A C. onde ne triangoli rettangoli il quadrato che si descriue dal lato sottoposto all'angolo retto, è uguale alli quadrati descritti da i lati che l'angolo retto contengono. il che bisognaua dimostrare.

14 di questo:

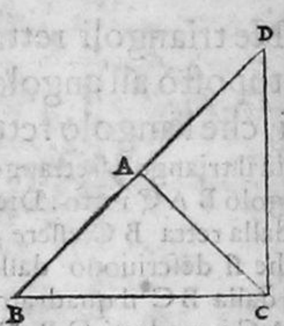
4. di questo.
41. di questo.

IL COMMANDINO.

Questo theorema è attribuito à Pythagora, & dicono che quando egli l'hebbe trouato sacrificò un bue. ma quello che scriue Euclide nel sesto è molto piu uniuersale, perche dimostra che ne triangoli rettangoli la figura che si fà dal lato sottoposto all'angolo retto è uguale alle figure fatte da i lati, che l'angolo retto contengono, simili & similmente descritte.

THEOREMA XXXIIII. PROPOSITIONE XLVIII.

Se il quadrato descritto da uno de lati del triangolo sia uguale à quadrati, che si descriuono da gli altri lati, l'angolo contenuto da gli altri due lati del triangolo sarà retto.



Il quadrato che si descriue da un lato B C del triangolo A B C sia uguale alli quadrati descritti da gli altri lati del triangolo B A A C. Dico l'angolo B A C esser retto. tirisi dal punto A la A D ad angoli retti sopra la A C. & pongasi la A D uguale alla B A, & giungasi D C. perche dunque la D A è uguale alla A B, sarà anche il quadrato della D A uguale al quadrato della A B. pongasi commune il quadrato della A C. adunque i quadrati delle D A A C sono vguali à quadrati delle B A A C. ma à quadrati delle D A A C è uguale il quadrato della D C, perche l'angolo D A C è retto, & à quadrati delle B A A C si pone uguale il quadrato della B C. adunque il quadrato della D C è uguale al quadrato della B C, & però il lato D C è uguale al lato C B. & perche la D A è uguale alla A B, & la A C è commune, le due D A A C sono uguali alle due B A A C, & la base D C è uguale alla base C B. l'angolo dunque D A C è uguale all'angolo B A C: & D A C è retto. onde anchor B A C sarà retto. adunque se il quadrato descritto da uno de lati del triangolo sia uguale à quadrati che si descriuono da gli altri lati, l'angolo contenuto da gli altri due lati del triangolo sarà retto. il che bisognaua dimostrare.

11. di questo.

8. di questo.

IL COMMANDINO.

Questo theorema si conuerte al precedente, & tutto à tutto, perche se il triangolo sia rettangolo il quadrato che si descriue dal lato sottoposto all'angolo retto è vguale alli quadrati descritti da gli altri lati del triangolo & se il quadrato che si fa da questo sia uguale à quadrati fatti dalli rimanenti, il triangolo sarà rettangolo, percioche hà l'angolo retto, cioè quello che è contenuto da gli altri lati.

FINE DEL PRIMO LIBRO.