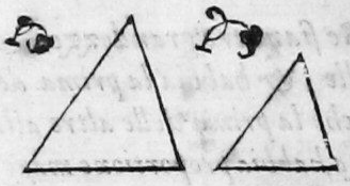
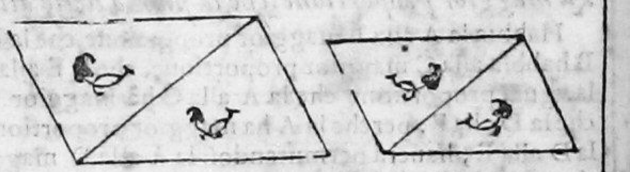
DE GLI ELEMENTI DI EVCLIDE
LIBRO SESTO
CON LI SCHOLII ANTICHI, ET COMMENTARII
Di Federico Commandino da Vrbino.

DIFFINITIONI.
I.

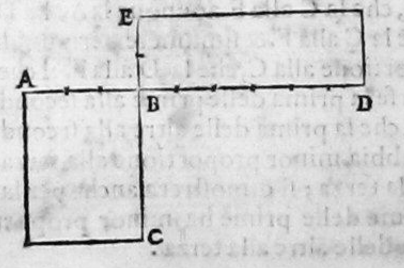
LE figure rettilinee simili sono quelle, che hanno ciascun'angolo vguale, & d'intorno à gli vgual angoli i lati proportionali.





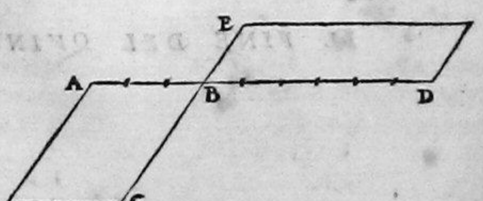
II.

Le figure reciproche sono, quando nell'vna & nell'altra siano le antecedenti & conseguenti proportioni.



IL COMMANDINO.

Per le antecedenti & conseguenti proportioni, intendi i termini antecedenti & conseguenti delle proportioni, come se siano due rettangoli A B C D B E, & sia come la A B alla B D, così la E B alla B C, si diranno queste figure essere reciproche, ò vero rispondenti fra loro contrariamente. percioche nell'vna è



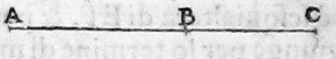
il termine antecedente della prima proportione, cioè A B, & il conseguente della seconda B C; & nell'altra è il conseguente della prima B D & l'antecedente della seconda E B. sono anchora le dette figure vguali fra loro, come di sotto si mostrerà.

III.

La linea retta si dice essere segata secondo l'estrema & meza proportione, quando sia come tutta la linea alla parte maggiore, cosi la maggiore alla minore.

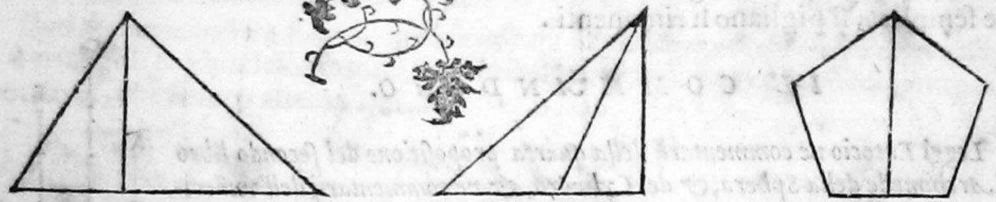
IL COMMANDINO.

La linea retta perciò si dice esser segata secondo l'estrema & meza proportione, che è segata in due parti, che sono termini della proportione, cioè l'estremo & mezo, tenendo tutta la linea il luogo del primo termine. sia la retta A C cosi segata nel punto B. sarà la A C il primo termine, la A B il mezo, & la B C l'estremo.



IIII.

L'altezza di ciascuna figura è la linea perpendicolare, che dalla cima è tirata sino alla base.



V.

La proportione si dice essere composta di proportioni, quando le quantità delle proportioni moltiplicate fra loro fanno vna certa proportione.

SCHOLIO.

La proportione si dice esser composta di due ò di piu proportioni, quando le quantità delle proportioni moltiplicate fanno vna certa proportione.

Habbia A B à C D vna data proportione, come doppia ò tripla, ò qualch'altra: & C D ad E F somigliantemente habbia vna proportione data. Dico la proportione di A B ad E F essere composta dalla proportione di A B à C D, & dalla proportione di CD ad EF, ò vero che se la quãtità della proportione di AB à CD sarà moltiplicata per la quantità della proportione di CD ad EF, sarà la quantità della proportione di A B ad E F. Sia prima A B maggiore di C D, & C D maggiore di E F; & sia A B doppia di C D, & C D tripla di EF. adunque essendo CD tripla di E F, & A B doppia di C D, sara A B sestupla di E F. percioche se doppiaremo il triplo di qualche cosa, si fara il sestuplo. & questo è propriamente compositione: ò vero in questo modo. perche AB è doppia di CD, diuidasi AB in parti vguali a C D, che siano A G G B. & perche C D è tripla di E F, & A G è vguale à C D, sarà A G tripla di E F, & però tutta la A B sarà sestupla di E F. onde la proportione di A B ad E F si congiunge per lo termine di mezo C D, composta dalla proportione di A B à C D, & dalla proportione di CD ad E F. similmente se CD sia minore dell'una & l'altra A B E F, il medesimo si concluderà. Sia A B tripla di CD, & C D la metà di E F. & perche C D è la metà di E F, & A B è tripla di C D, sarà A B sesquialtera di EF, conciosiacosa che se triplicaremo la metà di qualche cosa, la conterrà vna volta & meza. & perche A B è tripla di C D, & C D è la metà di E F, di quelle parti vguali à C D, delle quali A B è tre, sarà E F due. adunque A B è sesquialtera di E F, & perciò la proportione di AB ad E F si congiunge per lo termine di mezo C D, composta dalla proportione di A B a C D, & dalla proportione di C D ad EF. ma sia CD maggiore dell'vna & l'altra A B E F, & sia A B la meta di C D, & C D sesquiterza di E F. perche dunque di quelle parti, delle quali A B è due, C D è quattro; & di quelle parti, delle quali C D è quattro, E F è tre; sarà E F tre di quelle parti, delle quali A B è due. onde la proportione di A B ad E F si congiunge per lo termine di mezo C D, che è di due à tre. simigliantemente in più termini, & ne gli altri casi. & è manifesto che se dalla proportione composta si tragga qual si voglia de termini componenti, trattone vno de semplici, si pigliano li rimanenti.

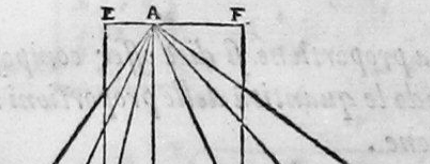
IL COMMANDINO.

Leggi Eutocio ne commentarij della quarta propositione del secondo libro d'Archimede della Sphera, & del Cylindro, & ne commentarij dell'vndecima propositione del primo libro delli Conici d'Apollonio.

THEOREMA I. PROPOSITIONE I.

I triangoli & parallelogrammi che hanno la medesima altezza sono fra loro come le basi.

Siano i triangoli A B C A C D, & parallegrammi E C C F, che habbiano la medesima altezza, cioè la perpendicolare dal punto A tirata alla B D. Dico che come la base BC alla base C D, così è il triangolo A B C al triangolo A C D, & il parallelogrammo E C al parallelogrã mo C F. prolunghisi B D dall'vna & l'altra parte alli punti HL, & pongansi quante si vogliano B G G H vguali alla base B C, & alla base C D pongansi quante si vogliano vguali D K K L: & giunganssi A G A H A K A L. perche dunque C B B G G H sono vguali, saranno i triangoli A H G A G B A B C



38. del primo. vguali fra loro. onde quante volte la base H C è moltiplice della base B C, tante

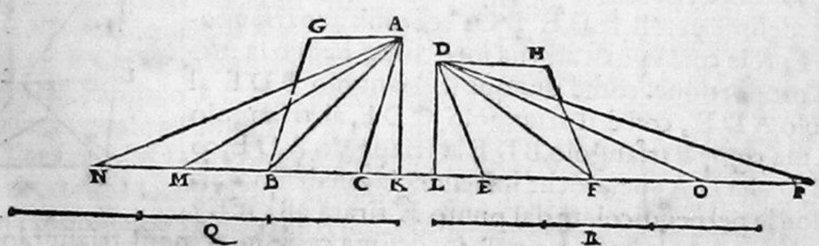
volte il triangolo A H C è moltiplice del triangolo A B C. & per la medesima ragione quante uolte la base L C è moltiplice della base C D, tante volte il triangolo A L C è moltiplice del triangolo A C D. & se la base H C è vguale alla base C L, anchora il triangolo A H C sarà vguale al triangolo A L C, & se la base HC auanza la base C L, etiandio il triangolo A H C auanzerà il triangolo A L C & se minore, minore. essendo dunque quattro grandezze, cioè le due basi B C C D, & due triangoli A B C A C D, & si sono prese le vgualmente moltiplici della base B C & del triangolo A B C, cioè la base H C, & il triangolo A H C: & della base C D & del triangolo A C D altre in qualunque modo vgualmente moltiplici, cioè la base C L & il triangolo A L C. & si è dimostrato, che se la base H C auanza la base C L, anche il triangolo A H C auanzerà il triaugolo A L C; & se è vguale, vguale; & se minore, minore. adunque è come la base B C alla base C D, cosi il triangolo A B C al triangolo A C D. & perche il parallelogrammo E C è doppio del triangolo A B C, & il parallelogrammo F C doppio del triangolo ACD, & le parti delle grandezze che sono moltiplici nel medesimo modo hanno fra loro la medesima proportione; sarà come il triangolo A B C al triangolo A C D, cosi il parallelogrammo E C al parallelogrammo C F. perche dunque si è dimostrato che come la base B C alla base C D, cosi è il triangolo A B C al triangolo A C D: & come il triangolo A B C al triangolo A C D, cosi è il parallelogrammo E C al parallelogrammo C F; sarà come la base B C alla base C D, cosi il parallelogrammo E C al parallelogrammo C F. la onde i triangoli & parallelogrammi che hanno la medesima altezza, sono fra loro come le basi. il che bisognaua dimostrare.

5. diff. del 5.
41. del primo.
15. del quinto.
11. del quinto.

IL COMMANDINO.

Quel theorema anchora è uero, qual dimostrare ho giudicato non esser fuora di proposito.

I triangoli & parallelogrammi fatti nelle basi vguali hanno la medesima proportione, che le loro altezze.



Siano due triangoli A B C D E F, & due parallelogrammi C G E H che habbiano le basi vguali BC E F: & del triangolo A B C & del parallelogrammo C G sia l'altezza A K: & del triangolo D E F & del parallelogrammo E H l'altezza D L. Dico che come la A K alla DL, cosi è il triangolo A B C al triangolo D E F, & il parallelogrammo C G al parallelogrammo EH. prolunghinsi B C E F, & ponganst quante si vogliano B M M N vguali alla base B C: & alla base E F quante si vogliano vguali F O OP, & giungansi A M A N D O DP. & quante grandezze sono nella C N vguali alla base CB, tãte si piglino nella linea Q vguali all'altezza A K: & quante sono nella EP vguali alla base E F, tante si piglino nella linea R vguali all'altezza D L. la onde perche i triangoli A N M A M B A B C sono fatti nelle basi vguali, & nell'altezza vguale; saranno anche fra loro vguali. & per la medesima ragione i triangoli D E F D F O D O P saranno fra loro vguali. quante uolte dunque la linea Q è moltiplice della A K, tante uolte ll triangolo A N C sarà moltiplice del triangolo A B C. & quante uolte la linea R è moltiplice della D L, tante uolte il triangolo D P E sarà moltiplice del triangolo D E F. & se la Q è vguale alla R, & il triangolo A N C sarà vguale al triangolo D P E per l'antecedente, percioche l'altezza AK, della quale la Q è tripla, sarà uguale all'altezza DL del

per l'antecedente.

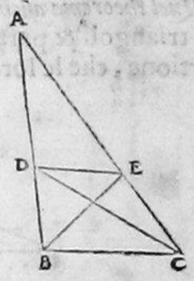
la qua-

la quale è tripla la R. ma se la Q è maggiore della R, & il triangolo A N C sarà maggiore del triangolo D T E; & se è minore, minore; percioche delli triangoli che hanno le basi vguali, quelli che sono di maggior altezza, sono anchora maggiori, altramente ne seguirebbe, che il tutto fosse vguale alla parte. essendo dunque quattro grandezze, cioè le due altezze AK DL, & i due triangoli A B C D E F, & essendosi prese le vgualmente moltiplici dell'altezza AK & del triangolo A B C; & dell'altezza D L & del triangolo D E F, altre in qualunque modo vgualmente moltiplici; & si è dimostrato che se la linea Q auanza la R, il triangolo A N C a-
5. diff. del 5. *uanzerà il triangolo D T E; & se è vguale, vguale; & se minore, minore; sarà come l'altez-*
41. del primo. *za H A all'altezza D L, cosi il triangolo A B C al triangolo D E F. ma il parallelogrammo C G è doppio del triangolo A B C; & il parallelogrammo E H doppio del triangolo D E F; &*
15. del quinto. *le parti delle moltiplici nel medesimo modo hanno la medesima proportione; sarà il parallelogrammo C G al parallelogrammo E H, come il triangolo A B C al triangolo D E F. ma si è dimostrato che come l'altezza A K all'altezza D L, cosi è il triangolo A B C al triangolo DEF. adunque come la A K alla DL, cosi è il parallelogrammo C G al parallelogrammo E H. la onde i triangoli & parallelogrammi fatti nelle basi vguali hanno la medesima proportione, che le loro altezze. il che bisognaua dimostrare.*

THEOREMA II. PROPOSITIONE II.

Se nel triangolo sia tirata vna linea retta parallela ad vn lato, quella segherà i lati di detto triangolo proportionalmente: & se i lati del triangolo siano segati proportionalmente, la linea retta che congiunge i segamenti, sarà parallela all'altro lato del triangolo.

31. del primo. Tirisi la DE parallela ad vn lato BC del triangolo ABC. Dico che come la B D alla D A, cosi è la CE alla E A. giun-
37. del primo. gansi B E C D. adunque il triangolo B D E è vguale al triangolo C D E; perche sono nella medesima base D E & nelle medesime parallele D E B C: & è un'altro triango-
7 del quinto. lo A D E; & le cose vguali ad vna medesima hanno la medesima proportione. come dunque il triangolo B D E al triangolo A D E, cosi è il triangolo C D E al triangolo
Per l'antecedente. A D E. ma come il triangolo B D E al triangolo A D E, cosi è la B D alla D A; percioche hauendo la medesima altezza cioè la perpendicolare dal punto E tirata alla A B,

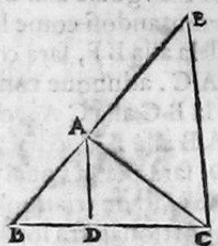


sono fra loro come le basi. & per la medesima cagione come il triangolo C D E
11. del quinto. al triangolo A D E, cosi è la C E alla E A. adunque come la B D alla D A, cosi è la C E alla E A. ma siano segati proportionalmente i lati A B A C del triangolo A B C: & come la B D alla D A, cosi sia la C E alla E A: & giungasi D E. Dico la D E essere parallela alla B C. Hauendo fatto le medesime cose, perche è come la B D alla D A, cosi la C E alla E A; ma come la B D alla D A, cosi è il triangolo B D E al triangolo A D E; & come la C E alla E A, cosi è il triangolo C D E al
11. del quinto. triangolo A D E: sarà come il triangolo B D E al triangolo A D E, cosi il triangolo C D E al triangolo A D E. & hauendo amendue li triangoli B D E C D E
9. del quinto. la medesima proportione al triangolo A D E, sarà il triangolo B D E vguale al
40. del primo. triangolo C D E: & sono nella medesima base D E. ma li triangoli vguali fatti nella medesima base sono etiandio nelle medesime parallele. adunque la D E è parallela alla B C. la onde se nel triangolo sia tirata vna linea retta parallela ad vn lato, quella segherà i lati di detto triangolo proportionamente: & se i lati del triangolo siano segati proportionalmente, la linea retta che congiunge i segamenti, sarà parallela all'altro lato del triangolo. il che bisognaua dimostrare.

THEOREMA III. PROPOSITIONE III.

Se vn'angolo del triangolo sia segato per mezo, & la linea retta che lo sega, seghi anchor la base, haueranno le parti della base la medesima proportione che gli altri lati del triangolo. & se le parti della base habbiano la medesima proportione che gli altri lati del triangolo, la linea retta che dalla cima si tira sino al segamento della base, segherà l'angolo per mezo.

Sia il triangolo ABC, & seghisi l'angolo BAC per me
zo della linea retta A D. Dico come la B D alla D C, co- 9. del primo.
si essere la B A alla A C. tirisi per C la C E parallela alla 31. del primo.
D A, & la BA prolungata concorra con essa nel punto E.
perche dunque nelle parallele AD EC cade vna linea ret
ta A C, sarà l'angolo ACE vguale all'angolo C A D. ma 29. del primo.
si pone l'angolo C A D vguale all'angolo B A D. adunque l'angolo B A D sarà vguale all'angolo A C E. oltre à ciò perche la linea retta B A E cade nelle parallele AD E C, l'angolo esteriore BAD è vguale all'interiore AEC.

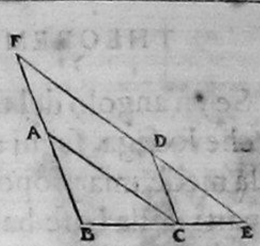


ma si è dimostrato l'angolo A C E vguale all'angolo B A D. adunque anchor l'an
golo ACE sarà vguale all'angolo A E C; & però il lato A E sarà vguale al lato 6 del primo.
A C. & perche la AD è tirata parallela ad vn lato del triangolo BCE, cioè ad EC; per l'antecedente.
sarà come la BD alla DC, cosi la B A alla AE. ma la AE è vguale alla A C. adunque 7. del quinto.
è come la B D alla DC, cosi la B A alla A C. ma sia come la B D alla D C, cosi la B A alla A C: & giungasi AD. Dico l'angolo BAC esser segato per mezo dalla linea retta AD. percioche hauẽdo fatte le medesime cose, & essendo come la BD al
la DC, cosi la BA alla AC: & come la BD alla DC, cosi la B A alla AE, cõciosiacosa,
che la AD si sia tirata parallela ad vn lato del triangolo B C E, cioè ad E C: sarà co per l'antecedente.
me la B A alla A C, cosi la B A alla A E. adunque la A C è uguale alla A E; & pe- 9. del quinto.
rò l'angolo A E C è vguale all'angolo E C A. ma l'angolo A E C è vguale all'este 6. del primo.
riore B A D, & l'angolo A C E è vguale all'alterno C A D. onde etiandio l'ango- 29. del primo.
lo B A D sarà vguale all'angolo C A D. l'angolo dunque B A C è segato per mezo dalla linea retta A D. la onde se vn'angolo del triangolo sia segato per mezo, & la linea retta che lo sega seghi anchor la base, haueranno le parti della base la medesima proportione che gli altri lati del triangolo. & se le parti della base habbiano la medesima proportione che gli altri lati del triangolo, la linea retta che dalla cima si tira sino al segamento della base, segherà l'angolo per mezo. il che bisognaua dimostrare.

THEOREMA IIII. PROPOSITIONE IIII.

I lati de triangoli equiangoli che stanno d'intorno à gli vguali angoli sono proportionali fra loro: & i lati homologhi, ò vero della medesima ragione sono quelli, che à gli angoli vguali si sottopongono.

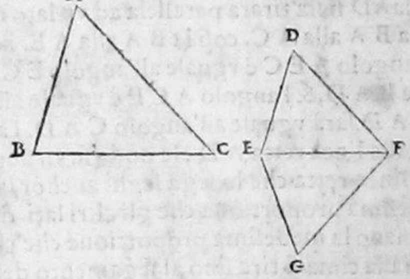
Siano i triangoli equiangoli A B C D C E, che habbiano l'angolo A B C uguale all'angolo D C E, & l'angolo A C B all'angolo D E C. & oltra questo l'angolo B A C all'angolo C D E. Dico che de triangoli A B C D C E sono proportionali i lati che stanno d'intorno à gli angoli vguali. & i lati homologhi, ò vero della medesima ragione sono quelli che si sottopongono à gli angoli vguali. pongasi



la B C per diritto alla CE. & perche gli angoli ABC
17. del primo. A C B sono minori di due retti, & l'angolo A C B è vguale all'angolo D E C, saranno gli angoli A B C
5. post. del 1. D E C minori di due retti. onde le B A E D prolungate concorreranno fra loro. prolunghinsi & concorrano nel punto F. & perche l'angolo D C E è vguale
28. del primo. all'angolo A B C, sarà la B F parallela alla D C. similmente perche l'angolo A C B è vguale all'angolo
34. del primo. D E C, la A C sarà parallela alla F E. adunque F A C D è parallelogrammo: & perciò la F A è vguale alla C D, & la A C alla F D. & perche si è tirata la A C parallela ad vn lato del triangolo F B E, cioè ad F E, sarà come le B A alla A F, cosi la B C alla C E. ma
2. di questo. 7. del quinto. la A F è vguale alla C D. adunque come la B A alla C D, cosi la B C alla C E: & permutandosi come la A B alla B C, cosi è la D C alla C E. & perche la C D è pa-
2. di questo. rallela alla B F, sarà come la B C alla C E, cosi la F D alla D E. ma la D F è vguale all'A C. adunque come la B C alla C E, cosi la A C alla E D: & permutandosi come la B C alla C A, cosi la C E alla E D. perche dunque si è dimostrato che come la A B alla B C, cosi è la D C alla C E; & come la B C alla C A, cosi la C E alla E D: sara per la vgual proportione come la B A alla A C, cosi la C D alla D E. onde i lati de triangoli equiangoli che stanno d'intorno à gli angoli vguali sono proportionali fra loro. & i lati homologhi, ò vero della medesima ragione sono quelli, che à gli angoli vguali si sottopongono. il che bisognaua dimostrare.

THEOREMA V. PROPOSITIONE V.

Se due triangoli habbiano i lati proportionali, saranno anchora equiangoli, & haueranno vguali quegli angoli, à quali i lati homologhi si sottopongono.

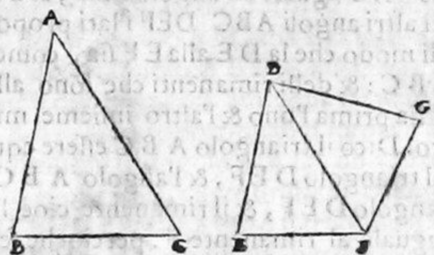


Siano due triangoli ABC DEF, che habbiano i lati proportionali, & sia come A B alla B C, cosi la DE alla E F: & come la B C alla C A, cosi la EF alla FD: & anchora come la BA alla A C, cosi la ED alla D F. Dico il triangolo A B C essere equiangolo al triangolo D E F, & hauere vguali quegli angoli, à quali si sottopongono i lati homologhi, cioè l'angolo A B C all'angolo D E F; & l'angolo B C A all'angolo E F D: & oltre à questo l'angolo B A C all'angolo E D F. constituiscasi nella linea retta E F, & ne i punti E F che sono in essa, l'angolo F E G
23. del primo. vguale all'angolo A B C, & l'angolo E F G all'angolo B C A. onde l'angolo rimanente BAC è vguale al rimanente EGF, & però il triangolo ABC è equiangolo al triangolo E G F. sono dunque i lati de triangoli A B C E G F proportiona-
Per l'antecedente. li, che stanno d'intorno à gli vguali angoli: & i lati homologhi quelli, che sono sottoposti à gli angoli vguali. onde come la A B alla B C, cosi la G E alla E F.
11. del quinto. ma come la A B alla B C, cosi è la D E alla E F. adunque come la D E alla E F, cosi la G E alla E F. & hauendo ciascuna di esse D E E G la medesima proportio
9. del quinto. ne alla E F, sarà la D E vguale alla E G. & per la medesima ragione la D F sarà vguale alla F G. & perche la D E è vguale alla E G, & la E F è commune, le due D E E F sono vguali alle due G E E F: & la base DF è vguale alla base F G. adun
8. del primo. que l'angolo D E F è vguale all'angolo G E F, & il triangolo D E F vguale al triangolo G E F: & gli altri angoli vguali à gli altri angoli, à quali i lati uguali

si sottopongano. onde l'angolo DFE è vguale all'angolo GFE, & l'angolo EDF vguale all'angolo EGF. & perche l'angolo FED è uguale all'angolo GEF, & l'angolo GEF all'angolo ABC, sarà anche l'angolo ABC uguale all'angolo FED. & per la medesima ragione l'angolo ACB uguale all'angolo DFE, & anchora l'angolo A uguale all'angolo D. adunque il triangolo ABC sarà equiangolo al triangolo DEF. la onde se due triangoli habbiano i lati proportionali saranno anchora equiangoli, & haueranno uguali quegli angoli, à quali i lati homologhi si sottopongono. il che bisognaua dimostrare.

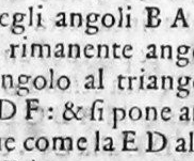
THEOREMA VI. PROPOSITIONE VI.

Se due triangoli habbiano un'angolo uguale ad un'angolo, & d'intorno à gli vguali angoli habbiano i lati proportionali; saranno detti triangoli equiangoli, & haueranno vguali quegli angoli, à quali gli ugual lati si sottopongono.



Siano due triangoli ABC DEF, che habbiano un'angolo BAC uguale ad vn'angolo EDF, & d'intorno à gli vgual'angoli i lati proportionali; & sia come la BA alla AC, così la ED alla DF. Dico il triangolo ABC essere equiangolo al triangolo DEF, & hauere l'angolo ABC uguale all'angolo DEF, & l'angolo ACB all'angolo DEF. constituiscasi nella linea retta DF & ne punti DF che sono in essa, l'angolo FDG vguale ad uno degli angoli BAC EDF, & l'angolo DFG uguale all'angolo ACB. adunque il rimanente angolo B è vguale al rimanente G; & il triangolo ABC è equiangolo al triangolo DGF. & perciò come la BA alla AC, così è la GD alla DF: & si pone an- 23.del primo.
chora come la BA alla AC, così essere la ED alla DF. adunque come la ED alla 4.di questo.
DF, così è la GD alla DF; & però la ED è vguale alla DG, & la DF è commune. on 11.del quinto.
de le due ED DF sono vguali alle GD DF, & l'angolo EDF è uguale all'angolo 9. del quinto.
GDF. la base dunque EF è uguale alla base FG: & il triangolo DEF vguale al triãgolo GDF, & gli altri angoli vguali à gli altri angoli, l'uno all'altro, à quali sono sottoposti i lati uguali. adunque l'angolo DFG è uguale all'angolo DFE, & l'angolo G all'angolo E. ma l'angolo DFG è uguale all'angolo ACB. onde l'angolo ACB è uguale all'angolo DFE. & si pone l'angolo BAC vguale all'angolo EDF. il rimanente dunque B è vguale al rimanente E; & il triangolo ABC è equiangolo al triangolo DEF. onde se due triangoli habbiano un'angolo uguale ad un'angolo, & d'intorno à gli uguali angoli habbiano i lati proportionali, saranno detti triangoli equiangoli, & haueranno uguali quegli angoli, à quali gli vgual lati si sottopongono. il che bisognaua dimostrare. 4.del primo.

IL COMMANDINO.

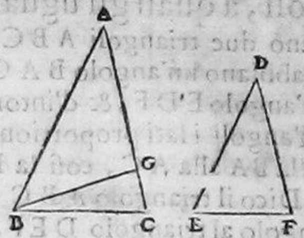


Sono alcuni che dimostrano questo anchora in altro modo, percioche posto il lato DE sopra il lato AB, caderà la DF nella AC, conciosiacosa che l'angolo D sia vguale all'angolo A. dunque la DE ò uero è uguale alla AB, ò disuguale. & se vguale, sarà anchor la DF vguale alla AC. onde la base FE sarà vguale alla base BC, 4.del primo.
& gli altri angoli vguali à gli altri angoli. ma se la DE sarà disuguale alla AB, sia maggiore una di esse, come la AB, allhora co-

me la B A alla A C, così è la E D alla D F. adunque permutandosi come la B A alla A E, così è la C A alla A F: & diuidendosi come la B E alla E A, così la C F alla F A. onde il lato E F è parallelo al lato B C: & percio l'angolo A E F è vguale all'angolo A B C, & l'angolo A F E all'angolo A C B. il che bisognaua dimostrare.

THEOREMA VII. PROPOSITIONE VII.

Se due triangoli habbiano vn'angolo uguale ad un'angolo, & d'intorno à gli altri angoli habbiano i lati proportionali, & delli rimanenti l'uno, & l'altro insieme ò sia minore, ò nō minore del retto; saranno detti triangoli equiangoli, & haueranno vguali quegli angoli; intorno à quali sono i lati proportionali.

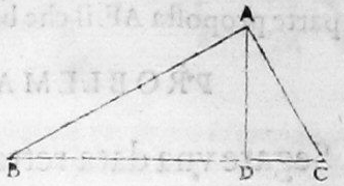


Siano due triangoli A B C D E F, che habbiano vn'angolo uguale ad un'angolo, cioè l'angolo B A C uguale all'angolo E D F, & d'intorno à gli altri angoli A B C D E F i lati proportionali, di modo che la D E alla E F sia, come la A B alla B C: & delli rimanenti che sono alli punti C F sia prima l'uno & l'altro insieme minor del retto. Dico il triangolo A B C essere equiangolo al triangolo D E F, & l'angolo A B C vguale all'angolo D E F, & il rimanente cioè l'angolo C uguale al rimanente F. percioche se l'angolo A B C sia disuguale all'angolo D E F, uno di essi sarà maggiore. sia maggiore A B C: & constituiscasi nella linea retta A B, & nel punto in essa B l'angolo A B G vguale all'angolo D E F. & perche l'angolo A è uguale all'angolo D, & l'angolo A B G all'angolo D E F, sara etiandio il rimanente A G B uguale al rimanente D F E. adunque il triangolo A B G è equiangolo al triangolo D E F, & come la A B alla B G, così è la D E alla E F. & come la D E alla E F, così si pone la A B alla B C. come dunque la A B alla B C, così la A B alla B G. & hauendo la A B la medesima proportione ad amendue B C B G, sarà la B C uguale alla B G, & percio l'angolo C sarà vguale all'angolo B G C. ma l'angolo C si pone minore del retto. adunque etiandio B G C è minore del retto. & l'angolo conseguente A G B è maggiore del retto. & si è dimostrato l'angolo A G B vguale all'angolo F. l'angolo dunque F è maggior del retto. ma si pone minore del retto. il che è inconueniente. onde l'angolo A B G non è disuguale all'angolo D E F, & però è vguale. & l'angolo A è vguale all'angolo D. adunque anchora il rimanente C è vguale al rimanente F: & il triangolo A B C è equiangolo al triangolo D E F. Ma ponghasi ciascuno degli angoli C F non minore del retto. Dico similmente il triangolo A B C essere equiangolo al triangolo D E F, perciò che hauendo fatte le medesime cose, dimostreremo etiandio B C essere vguale à B G, & l'angolo C vguale all'angolo B G C. ma l'angolo C non è minore del retto. adunque B G C non sarà minore del retto, & i due angoli del triangolo B G C non saranno minori di due retti, che è impossibile. la onde l'angolo A B C non è disuguale all'angolo D E F. ma vguale necessariamente. & l'angolo A è vguale all'angolo D. adunque il rimanente C è vguale al rimanente F, & perciò il triangolo A B C è equiangolo al triangolo D E F. se dunque due triangoli habbiano vn'angolo vguale ad vn'angolo, & d'intorno à gli altri angoli habbiano i lati proportionali, & delli rimanenti l'vno & l'altro insieme ò sia minore, ò non minore del retto, saranno detti triangoli equiangoli, & haueranno vguali quegli angoli, intorno à quali sono i lati proportionali. il che bisognaua dimostrare.

23 del primo.
4. di questo.
11. del quinto.
9. del quinto.
5. del primo.
13. del primo.
17. del primo.

THEOREMA VIII. PROPOSITIONE VIII.

Se nel triangolo rettangolo dall'angolo retto alla base sia tirata la perpendicolare, i triangoli che le stanno d'intorno, & à tutto il triangolo & fra loro sono simili.



Sia il triangolo rettangolo A B C, che habbia l'angolo retto B A C: & dal punto A tirisi la A D perpendicolare alla B C. Dico che i triangoli A B D A D C à tutto il triangolo A B C, & fra loro sono simili. perciò che essendo l'angolo B A C vguale all'angolo A D B, che l'vno & l'altro è retto, & essendo l'angolo B cõmune alli due triangoli A B C A B D; sarà il rimanente A C B vguale al rimanente B A D. adunque il triangolo A B C è equi angolo al triangolo A B D, & perciò come la B C, che è sottoposta all'angolo retto del triangolo A B C alla B A, che è sottoposta all'angolo retto del triangolo A B D, così la A B sottoposta all'angolo C del triangolo A B C alla B D sottoposta all'angolo vguale all'angolo C, cioè B A D del triangolo A B D; & anchor la A C alla A D sottoposta all'angolo B commune à due triangoli. adunque il triangolo A B C è equiangolo al triangolo A B D, & ha i lati proportionali d'intorno à gli vguali angoli. onde il triangolo A B C è simile al triangolo A B D. dimostreremo anchora per la medesima ragione il triãgolo A D C essere simile al triangolo A B C, & perciò l'vno & l'altro di essi A B D A D C è simile à tutto il triãgolo A B C. Dico oltre à ciò che i triangoli A B D A D C sono fra loro simili. perche l'angolo B D A retto è vguale al retto A D C; & si è dimostrato B A D vguale all'angolo C; sarà il rimanente B vguale al rimanente D A C. adunque il triangolo A B D è equiangolo al triangolo A D C, & come la B D sottoposta all'angolo B A D del triangolo A B D, alla D A sottoposta all'angolo C del triangolo A D C vguale all'angolo B A D, così la A D sottoposta all'angolo B del triangolo A B D, alla D C sottoposta all'angolo D A C vguale all'angolo B & anchor la B A alla A C sottoposta all'angolo retto A D C. adunque il triangolo A B D è simile al triangolo A D C. la onde se nel triangolo rettangolo dall'angolo retto alla base sia tirata la perpendicolare, i triangoli che le stanno d'intorno & à tutto il triangolo & fra loro sono simili. il che bisognaua dimostrare.

4. di questo.

la prima diff. di questo.

4. di questo.

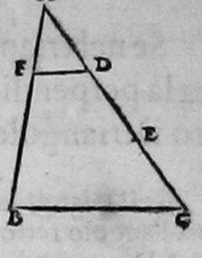
COROLLARIO.

Da questo è chiaro che se nel triangolo rettangolo dall'angolo retto alla base sia tirata la perpendicolare, quella sarà proportionale di mezo fra le parti della base, & oltre à ciò il lato che è verso ciascuna parte della base sarà proportionale di mezo fra la base & detta parte. il che bisognaua dimostrare.

PROBLEMA I. PROPOSITIONE IX.

Dalla data retta linea tagliare vna parte proposta.

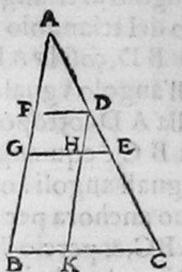
Sia la data linea retta A B. bisogna dalla A B tagliare la parte proposta. propongasi la terza parte: & tirisi dal punto A la linea retta A C, la quale con AB contenghi qual si voglia angolo: & piglisi nella A C qualunque punto D, & pōgāsi D E E C vguali alla A D. poi giungasi B C. & per D tirisi la D F parallela alla B C. & perche ad vn lato del triangolo
2. di questo. A B C cioè à B C si è tirata vna parallela F D, sarà come la C D alla D A così la B F alla F A, & la C D è doppia della D A. adunque la B F sarà doppia della F A, & la B A tripla della A F. onde dalla data retta linea A B si è tagliata la terza parte proposta AF. il che bisognaua fare.



PROBLEMA II. PROPOSITIONE X.

Segare vna data retta line a non segata, conforme ad vn'altra segata.

Sia la data linea retta non segata A B, & la segata A C. bisogna segare la linea retta AB conforme alla segata AC. Sia segata la A C nelli punti DE: & ponganſi di modo che contengano qual angolo si voglia: & congiunta la B C per li punti D E, tirinsi D F E G parallele alla B C, & per D tirisi
34. del primo. la D H K parallela alla A B. adunque l'vno & l'altro di esſi F H H B è parallelogrammo, & però la D H è vguale alla
2. di questo. F G, & la H K alla G B. & perche ad vn lato del triangolo DKC, cioè à K C si è tirata la parallela H E, sarà come la C E alla ED, così la K H alla H D: & è la K H vguale alla B G, & la H D alla G F. adunque come la C E alla E D, così è la B G alla G F. similmente perche ad vn lato del triangolo A G E cioè alla E G si è tirata la parallela F D, come la E D alla D A, così sarà la G F alla F A. ma si è dimostrato che come la C E alla E D, così è la B G alla G F. come dunque la C E alla E D, così è la B G alla G F. & come la E D alla D A, così la G F alla F A. adunque si è segata vna data retta linea non segata A B conforme ad vn'altra segata A C. il che bisognaua fare.

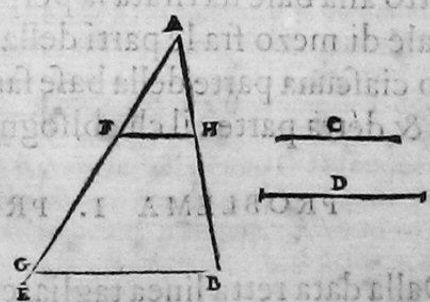


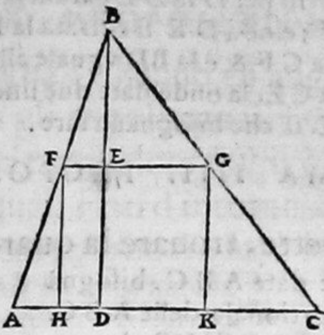
IL COMMANDINO.

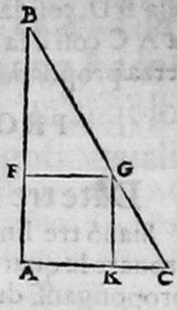
A questo non è dissimile quello che Pappo ci ha insegnato nel settimo libro delle collettioni mathematiche.

Segare vna data retta linea nella proportione data.

Sia la data linea retta A B, & la data proportione sia quella, che ha la C alla D: & bisogni segare la A B nella proportione di C alla D. inclinisi la linea retta A E in qual si voglia angolo alla A B, & taglisi la A F vguale al la C, & la F G vguale alla D, & giunta
2. di questo. la B G tirisi F H parallela ad essa. perche dunque come la AH alla H B, così è la A F alla F G, ma la A F è vguale alla C, & la F G alla D; sarà come la AH alla HB, così la C alla D. adunque la AB è segata in punto H nella proportione di C alla D. il che bisognaua fare.





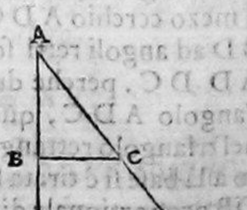


Dalle cose gia dimostrate & nel quinto libro & in questo si potrà compire vn problema. il che noi alla quarta propositione del quarto libro habbiamo promesso di fare.

Nel dato triangolo descriuere un quadrato.

Sia il triangolo dato A B C, nel quale bisogni descriuere un quadrato. adunque il dato triangolo ò uero è acutiangolo, ò rettangolo, ò ottusiangolo. sia prima acutiangolo: & dal punto B alla A C tirisi la B D perpendiculare. & per la precedente di- 12. del primo.
uidasi la B D nel punto E, di modo che la D E habbia la medesima proportione alla E B, che la A C alla B D. poi per E tirisi la F G parallela alla A C, & dalli punti F G tirinsi le F H G K parallele alla B D. perche dunque nel triangolo A B D è tirata la F E parallela alla A D, sarà 31. del primo.
l'angolo B E F uguale all'angolo B D A, & l'angolo B F E vguale all'angolo B A D. & è l'an- 29 del primo.
golo F B E commune all'uno & l'altro. adunque il triangolo F B E è equiangolo al triangolo
A B D. dimostreremo similmente il triangolo E B G essere equiangolo al triangolo D B C. co- 4 di questo.
me dunque la A D alla D B, cosi è la F E alla E B, & come la B D alla D C, cosi la B E alla 22. del quinto.
E G. onde per l'ugual proportione come la A D alla D C, cosi la F E alla E G; & componen- 18. del quinto.
dosi come la A C alla C D, cosi la F G alla G E: & conuertendosi come la D C alla C A, cosi 4. del quinto.
la E G alla G F. ma come la B D alla DC, cosi è la B E alla E G. onde per l'ugual proportione come la B D alla A C, cosi la B E alla F G. & essendo come la A C alla B D, cosi la D E alla
EB, sarà parimente per l'ugual proportione come la AC à se stessa, cosi la D E cioè la H F alla 34. del primo.
F G. la H F dunque è vguale alla F G, & però tutte H F F G G K K H fra loro sono v-
guali. & perche la F H è parallela alla B D, & l'angolo B D A è retto, etiandio l'angolo K 29 del primo.
H F sarà retto. per la medesima ragione essendo la F G parallela alla A C, sarà anchor l'an-
golo H F G retto. adunque quelli che gli sono opposti F G K G K H necessariamente saranno 34. del primo.
retti, & percio F G K H è quadrato, & è descritto nel triangolo A B C. non altramente nel triangolo rettangolo ò uero ottusiangolo descriueremo un quadrato tirando dall'angolo retto ouero ottuso una perpendicolare al lato opposto. ma se nel triangolo rettangolo uogliamo descriuere un quadrato di modo che due lati del quadrato si appoggino sopra due lati del triangolo, come nella seconda figura, ci seruiremo d'un'altra perpendicolare che è lato del triangolo, cioè di B A, & diuiderassi similmente la A B nel punto F, di modo che la A F alla F B habbia la medesima proportione, che la C A alla A B. & si tirerà la F G parallela alla A C, & la G K
parallela alla B A. & perche nel triangolo B A C si è tirata la F G parallela alla A C, dimo- 2. di questo.
streremo anchora il triangolo B F G equiangolo al triangolo B A C. onde come la BA alla AC, 4 di questo.
cosi la B F alla F G. & è come la C A alla A B, cosi la A F alla F B. adunque per l'ugual proportione come la C A à se stessa, cosi la A F alla F G, & però le AF F G sono fra loro vguali. & dalle cose poco fa dimostrate, ne seguirà che lo AFGK sia quadrato che è descritto nel triangolo A B C. & questo è quello, che bisognaua fare.

PROBLEMA III. PROPOSITIO. XI.



Date due linee rette trouare la terza proportionale.

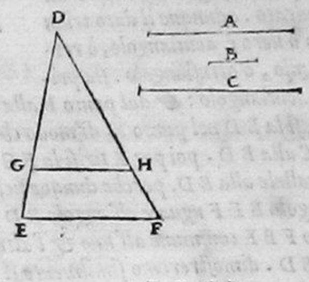
Siano due linee rette date A B A C, & ponganssi di modo che contengano qual si uoglia angolo. bisogna trouare la terza proportionale delle A B A C. prolunghinsi le A B A C alli punti D E; & pongasi la B D vguale alla

A C; & giunta la B C tirisi per D la D E parallela alla B C. perche dunque ad vn
2. di questo. lato del triangolo A D E; cioè à D E si è tirata la B C parallela, sarà come la A B alla B D, cosi la A C alla C E. & è la BD vguale alla AC. adunque come la B A alla A C cosi è la A C alla C E. la onde date due linee rette A B A C si è trouata la terza proportionale CE. il che bisognaua fare.

PROBLEMA IIII. PROPOSITIONE XII.

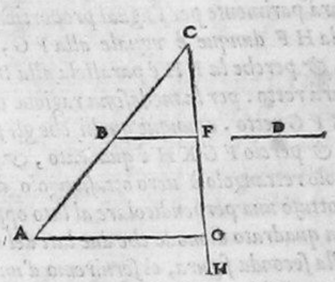
Date tre linee rette, trouare la quarta proportionale.

Siano tre linee rette date A B C. bisogna trouare la quarta proportionale delle A B C. proponganfi due linee rette DE DF, che con tengano qual si voglia angolo EDF, & ponga si la D G vguale alla A, & la G E vguale alla B, & la D H vguale alla C. & giunta GH tirisi per E la E F parallela ad essa. & perche ad vn lato del triangolo D E F, cioè ad E F si è tirata
2. di questo. la G H parallela, sarà come la D G alla G E, cosi la D H alla H F. & la D G è vguale alla A, & la G E alla B, & la D H alla C. come dunque la A alla B, cosi la C alla H F. la onde date tre linee rette A B C, si è trouata la quarta proportionale H F. il che bisognaua fare.



IL COMMANDINO DA PAPPO.

Date tre linee rette AB B C & D, troua re come la AB alla BC, cosi vn'altra alla D.
Inclinisi ad A C la linea retta C H in qual si voglia angolo: & taglisi la C F vguale alla D, & giunta la B F tirisi la A G parallela ad essa. adunque come la A B alla B C, cosi sarà la G F alla F C, cioè alla D. la onde si è trouata la F G. il che bisognaua fare.



PROBLEMA V. PROPOSITIONE XIII.

Date due linee rette, trouare la proportionale di mezo.

Siano due linee rette date A B B C. bisogna trouare la proportionale di mezo delle A B BC. ponganfi per diritto, & nella AC descriuasi il mezo cerchio A D C, & tirisi dal punto B la B D ad angoli retti sopra la A C: & giunganfi A D D C. perche dunque nel mezo cerchio è
31. del terzo. l'angolo A D C, quello sarà retto. & perche
cor. della otta nel triangolo rettangolo A D C dall'angolo ret
ua di questo. to alla base si è tirata la perpedicolare D B, sarà DB proportionale di mezo fra le parti della base AB BC. Date dunque due linee rette A B B C si è trouata la proportionale di mezo D B. il che bisognaua fare.

THEOREMA IX. PROPOSITIONE XIIII.

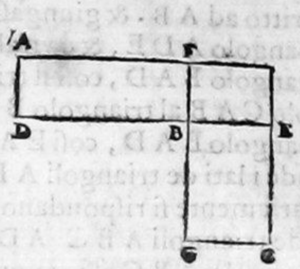
De parallelogrammi vguali c'hanno vn'angolo vguale ad un'angolo; i lati d'intorno à gli angoli uguali si rispondono fra loro contrariamente: & quei parallelogrammi c'hanno un'angolo vguale ad un'angolo, de quali i lati d'intorno à gli angoli vguali si rispondono contrariamente; sono fra loro vguali.

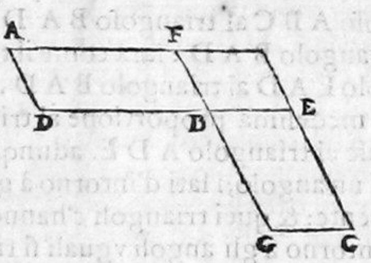
Siano parallelogrãmi vguali A B B C, che habbianogli angoli al B uguali: & ponganssi per diritto D B B E. saranno anchora per diritto F B B G. *
Dico i lati de parallelogrammi A B B C che sono d'intorno à gli angoli uguali rispondersi contrariamente fra loro, cioè come D B à B E, così essere G B à B F. compiscasi il parallelogrammo F E. & perche il parallelogrammo A B è vguale al parallelogrammo B C, & è un'altro parallelogrammo F E, sara come A B ad F E, così B C ad F E. ma come A B ad F E, così è D B à B E: & come B C ad F E, così G B à B F. come dunque D B à B E, così G B à B F. onde i lati de parallelogrammi A B B C che sono d'intorno à gli uguali angoli si rispondono fra loro contrariamente. Ma rispondansi contrariamente fra loro i lati, che sono d'intorno à gli ugual angoli, & sia come D B à B E così G B à B F. Dico il parallelogrammo A B essere uguale al parallelogrammo B C. percioche essendo come D B à B E così G B à B F, & come D B à B E così il parallelogrammo A B al parallelogrammo F E, & come G B à B F così il parallelogrammo B C al parallelogrammo F E, sarà come A B ad F E, così B C ad F E. onde il parallelogrammo A B è vguale al parallelogrammo B C. adunque de parallelogrammi uguali c'hanno un'angolo uguale ad un'angolo, i lati d'intorno à gli angoli vguali si rispondono fra loro contrariamente. & quei parallelogrammi c'hanno vn'angolo uguale ad un'angolo, de quali i lati d'intorno à gli angoli vguali si rispondono contrariamente; sono fra loro vguali. il che bisognaua dimostrare.

7 del quinto.
1. di questo.
2. di questo.

1. di questo.

11. del quinto.
9. del quinto.





IL COMMANDINO.

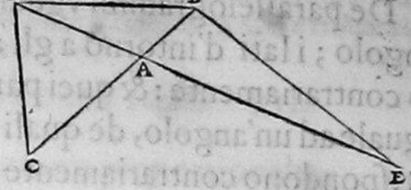
Saranno anchora per dirito F B B G] *percioche gli angoli F B D F B E sono vguali à due retti. ma l'angolo E B G si pone uguale all'angolo F B D. adunque gli angoli F B E E B G sono uguali à due retti, & però le linee F B B G saranno per diritto fra loro.* *

THEOREMA X. PROPOSITIONE XV.

De triangoli uguali c'hanno vn'angolo vguale ad vn'angolo; i lati d'intorno à gli angoli uguali si rispondono fra loro contrariamente: & quei triangoli c'hanno vn'angolo vguale ad vn'angolo, de quali i lati d'intorno à gli vguali angoli si rispondono contrariamente; sono vguali fra loro.

Siano

Siano i triangoli A B C A D E, che habbiano vn'angolo uguale ad vn'angolo, cioè l'angolo B A C all'angolo D A E. Dico i lati de triangoli A B C A D E che sono d'intorno à gli vgual'angoli contrariamente risponderſi fra loro, cioè come C A ad A D coſi eſſere E A ad A B. ponganſi di modo che C A ſia per diritto ad A D. adunque E A anchora ſarà per



14. del primo. diritto ad A B. & giungaſi B D. perche dunque il triangolo A B C è vguale al
7. del quinto. triangolo A D E, & è vn'altro triangolo A B D, ſarà come il triangolo C A B al triangolo B A D, coſi il triangolo A D E al triangolo B A D. ma come il trian-
1. di queſto. golo C A B al triangolo B A D, coſi C A ad A D: & come il triangolo E A D al
11. del quinto. triangolo B A D, coſi E A ad A B. come dunque C A ad A D, coſi E A ad A B. onde i lati de triangoli A B C A D E che ſono d'intorno à gli vgual'angoli contrariamente ſi riſpondano fra loro. ma riſpondanſi fra loro contrariamente i lati de triangoli A B C A D E, & ſia come C A ad A D, coſi E A ad A B. Dico il triangolo A B C eſſere vguale al triangolo A D E. percio che giunta ſimilmente B D eſſendo come C A ad A D, coſi E A ad A B, & come C A ad A D, coſi il tri
1. di queſto. angolo A B C al triangolo B A D, & come E A ad A B, coſi il triangolo E A D
11. del quinto. al triangolo B A D: ſarà come il triangolo A B C al triangolo B A D, coſi il triangolo E A D al triangolo B A D. onde l'uno è l'altro de triangoli A B C A D E
9. del quinto. ha la medeſima proportione al triangolo B A D, & percio il triangolo A B C è vguale al triangolo A D E. adunque de triangoli vguali c'hanno vn'angolo vguale ad un'angolo; i lati d'intorno à gli angoli vguali ſi riſpondono fra loro contrariamente: & quei triangoli c'hanno vn'angolo vguale ad un'angolo, de quali i lati d'intorno à gli angoli vguali ſi riſpondono contrariamente; ſono vguali fra loro. il che biſognaua dimoſtrare.

SCHOLIO.

A triangoli equiangoli ſolamente auuiene l'hauere i lati proportionali, non gia quelli che ſecondo la proportione ſi riſpondono fra loro contrariamente. ma à gli vguali & equiangoli è auuenuto l'hauere anchora i lati che ſi riſpondono contrariamente, perciochei lati altresi ſono vguali & la proportione dell'ugualità ſi riuolge in ſe ſteſſa, cioè dall'antecedente preſo & conſeguente è la medeſima & differente. ma a triangoli vguali & c'hanno vguale vn'angolo auuiene ſolo hauere i lati che ſi riſpondono contrariamente, non gia tutti, ma quelli che ſono poſti d'intorno à gli angoli vguali. adunque altri hanno ſolamente i lati proportionali; altri gli hanno & proportionali & che ſi riſpondono contrariamente. & ſono i primi gli equiangoli, & non vguali. i ſecondi gli vguali & c'hanno vn'angolo vguale, ma non equiangoli. gli altri ſono & vguali & equiangoli.

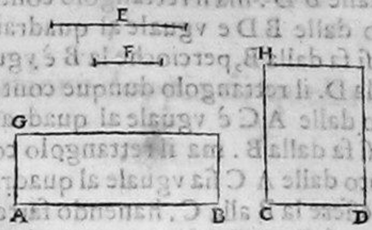
THEOREMA XI. PROPOSITIONE XVI.

Se quattro linee rette ſiano proportionali il rettangolo conte

nuto

nuto delle estreme è vguale al rettangolo che si contiene da quelle di mezo; & se il rettangolo contenuto dall'estreme sia vguale al rettangolo che si contiene da quelle di mezo, le quattro linee rette saranno proportionali.

Siano quattro linee rette proportionali A B CD E F, & sia come la A B alla CD, così la E alla F. Dico che il rettangolo contenuto dalle linee rette A B F è vguale à quello che si contiene dalle C D E. tirinsi dalli punti A C le A G C H ad angoli retti sopra le A B C D: & pongasi la A G vguale alla F, & la C H vguale alla E. & compiscansi i parallelogrammi B G D H. perche dunque come la A B alla C D, così è la E alla F, & la E è vguale alla C H, & la F alla A G; sarà come la A B alla C D, così la C H alla A G. i lati dunque de parallelogrammi B C D H che sono d'intorno à gli vguali angoli si rispondono fra loro contrariamente. & perche i lati de parallelogrammi equiangoli che sono d'intorno à gli angoli vguali si rispondono contrariamente, saranno i parallelogrammi fra loro vguali. adunque il parallelogrammo B G è vguale al parallelogrammo D H, & il parallelogrammo B G è quello che si contiene dalle linee rette A B F, essendo la A G vguale alla F. & il parallelogrammo D H quello che si contiene dalle C D E, conciosiacosa che la C H sia vguale alla E, adunque il rettangolo contenuto dalle A B F, è vguale à quello che si contiene dalle C D E. Ma il rettangolo contenuto dalle A B F sia vguale à quello che si contiene dalle C D E. Dico le quattro linee rette essere proportionali, cioè come la A B alla C D, così essere la E alla F. hauendo fatte le medesime cose perche il rettangolo contenuto dalle A B F è vguale à quello che si contiene dalle C D E, & quello che è contenuto dalle A B F è il rettangolo B G, essendo la A G vguale alla F, & il contenuto dalle C D E è il rettangolo D H, percioche la C H è vguale alla E; sarà il parallelogrammo B G vguale al parellelogrammo D H: & sono equiangoli. ma de parallelogrammi vguali & equiangoli i lati d'intorno à gli angoli vguali si rispondono fra loro contrariamente. onde come la A B alla C D, così è la C H alla A G. ma la C H è vguale alla E, & la A G alla F. come dunque la A B alla C D, così la E alla F. la onde se quattro linee rette siano proportionali, il rettangolo contenuto dalle estreme è vguale al rettangolo che si contiene da quelle di mezo: & se il rettangolo contenuto dalle estreme sia vguale al rettangolo che si contiene da quelle di mezo, le quattro linee rette saranno proportionali. il che bisognaua dimostrare.



11. del primo.

14. di questo.

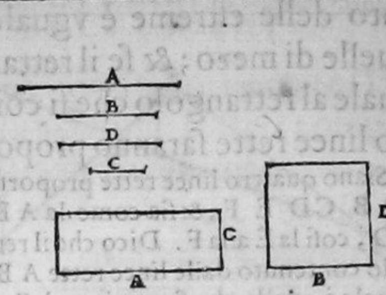
14. di questo.

THEOREMA XII. PROPOSITIONE XVII.

Se tre linee rette siano proportionali, il rettangolo contenuto dalle estreme è vguale al quadrato che si fa da quella di mezo: & se il rettangolo contenuto dalle estreme sia vguali al quadrato che si fa da quella di mezo, le tre linee rette saranno proportionali.

Siano tre linee rette proportionali A B C & sia come la A alla B, così la B alla C. Dico che il rettangolo contenuto dalle A C è vguale al quadrato che si fa da quella di mezo, cioè dalla B. pongasi la D vguale alla B. & perche come la A alla B, così è la B alla C, & la B è vguale alla D, sarà come la A alla B, così la D alla 7 del quinto.

la C. ma se siano quattro linee rette
per l'antecedente. proportionali, il rettangolo contenuto dalle estreme è vguale al rettangolo che si contiene da quelle di mezo. adunque il rettangolo contenuto dalle A C è vguale a quello che si contiene dalle B D. ma il rettangolo contenuto dalle B D e vguale al quadrato che si fa dalla B, percioche la B è vguale alla D. il rettangolo dunque contenuto dalle A C è vguale al quadrato che si fa dalla B. ma il rettangolo con

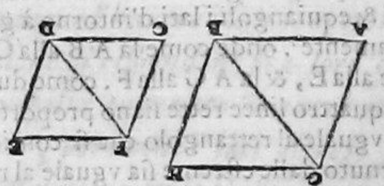


tenuto dalle A C sia vguale al quadrato che si fa dalla B. Dico come la A alla B, cosi essere la B alla C. hauendo fatte le medesime cose, perche il rettangolo contenuto dalle A C è vguale al quadrato che si fa dalla B, & il quadrato che si fa dalla B è il rettangolo contenuto dalle B D, essendo la B vguale alla D; sarà il rettangolo contenuto dalle A C vguale à quello che si contiene dalle B D. ma se il
per l'antecedente. rettangolo contenuto dalla estreme sia vguale al rettangolo che si contiene da quelle di mezo, saranno le quattro linee rette proportionali. adunque come la A alla B, cosi è la C alla D. ma la B è vguale alla D. onde come la A alla B, cosi la B alla C. se dunque tre linee rette siano proportionali il rettangolo contenuto dalle estreme è vguale al quadrato che si fa da quella di mezo: & se il rettangolo contenuto dalle estreme sia vguale al quadrato che si fa da quella di mezo, le tre linee rette saranno proportionali. il che bisognaua dimostrare.

PROBLEMA VI. PROPOSITIONE XVIII.

Dalla data retta linea descriuere vn rettilineo simile & similmente posto ad vn rettilineo dato.

Sia la data retta linea A B, & il dato rettilineo C E. bisogna dalla linea retta A B descriuere vn'rettilineo simile& similmente posto al rettilineo
23. del primo. C E. giungasi D F, & nella linea retta A B& ne punti che sono in essa cio è A B, constituiscasi l'angolo G A B vguale all'angolo C, & l'angolo A B G vguale all'angolo C D F. adunque



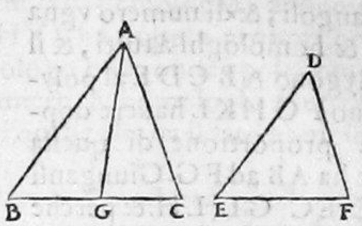
l'angolo rimanente C F D è uguale al rimanente A G B, & il triangolo F C D è
4. di questo. equiangolo al triangolo G A B, & percio come la F D alla G B, cosi è la F C alla G A, & la C D alla A B. similmente constituiscasi nella linea retta B G & ne punti che sono in essa B G l'angolo B G H vguale all'angolo D F E, & l'angolo G B H
4. di questo. vguale all'angolo F D E. il rimanente dunque E è vguale al rimanente H. onde il triangolo F D E è equiangolo al triangolo G B H, & pero come la F D alla G B cosi è la F E alla G H, & la E D alla H B. ma si è dimostrato che come la F D alla G B, cosi la F C alla G A, & la C D alla A B. come dunque la F C alla A C, cosi la C D alla A B, & la F E alla G H. & anchor la E D alla H B. & perche l'angolo C F D è vguale all'angolo A G B, & l'angolo D F E all'angolo B G H, sara tutto l'angolo C F E vguale à tutto l'angolo A G H. & per la medesima ragione l'angolo C D E è vguale all'angolo A B H. & oltre à questo l'angolo C uguale all'angolo A & l'angolo E all'angolo H. adunque il rettilineo A H è equiangolo al ret

tilineo

tilineo C E, & d'intorno à gli uguali angoli ha i lati proportionali. adunque il rettilineo A H sarà simile al rettilineo C E. la onde dalla data retta linea A B si è descritto un rettilineo A H, simile & similmente posto al rettilineo dato C E. il che bisognaua fare. 1. diff. di que.

THEOREMA XIII. PROPOSITIONE XIX.

I triangoli simili sono in proportione doppia di quella c'hanno i lati homologhi fra loro.



Siano i triangoli A B C D E F simili, che habbiano l'angolo B vguale all'angolo E: & sia come la A B alla B C, così la D E alla EF, di modo che il lato BC sia homologo al lato EF. Dico il triangolo A B C al triangolo D E F hauere doppia proportione di quella, che ha la B C alla E F. piglisi la terza proportionale B G delle B C E F, di modo che come la B C alla E F, così sia la E F alla BG, & giungasi G A. perche dunque come la AB alla B C, così è la D E alla E F, sara permutandosi come la A B alla D E, così la B C alla E F. ma come la B C alla E F, così è la E F alla B G. come dunque la A B alla D E, così la E F alla B G. onde i lati de triangoli A B G D E F che sono d'intorno à gli vguali angoli, si rispondono contrariamente fra loro. ma quei triangoli c'hanno vn'angolo vguale ad vn'angolo, de quali i lati d'intorno à gli vguali angoli si rispondono contrariamente, sono fra loro vguali. il triangolo dunque A B G è vguale al triangolo D E F. & perche come la B C alla E F, così la E F alla B G, & se tre linee rette siano proportionali la prima alla terza ha doppia proportione di quella che ha alla seconda, hauerà la B C alla B G doppia proportione di quella che ha la B C alla E F. ma come la B C alla B G, così il triangolo A B C al triangolo A B G. adunque etiandio il triangolo A B C al triangolo A B G ha doppia proportione di quella, che ha la B C alla E F. & è il triangolo A B G vguale al triangolo D E F. la onde il triangolo A B C al triangolo DEF, ha doppia proportione di quella che ha la B C alla E F. adunque i triangoli simili sono in proportione doppia di quella c'hanno i lati homologhi fra loro. il che bisognaua dimostrare.

11. di questo.
11. del quinto.
15. di questo.
diff. 10. quinti
la prima di questo.

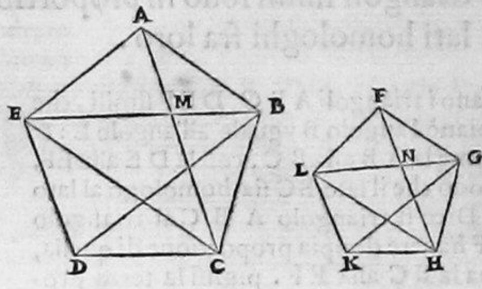
COROLLARIO.

Dalle cose dette disopra è manifesto, che se tre linee rette siano proportionali, come la prima alla terza, così sarà il triangolo fatto dalla prima al triangolo fatto dalla seconda, simile & similmente descritto, percioche è stato dimostrato come la C B alla B G, così essere il triangolo A B C al triangolo A B G, cioè al triangolo D E F. il che bisognaua dimostrare.

THEOREMA XIIII. PROPOSITIONE XX.

I polygoni ſimili ſi diuidono in ſimili triangoli, & vguali di numero, & homologhi à tutti; & il polygono al polygono ha proportione doppia di quella che ha il lato homologo al lato homologo.

Siano polygoni ſimili A B C D E F G H K L: & ſia il lato A B homologo al lato F G. Dico i polygoni A B C D E F G H K L diuiderſi in ſimili triangoli, & di numero vguali, & homologhi à tutti, & il polygono A B C D E al polygono F G H K L hauere doppia proportione di quella che ha A B ad F G. Giunganſi B E E C G L L H. & perche



il polygono A B C D E è ſimile al polygono F G H K L, l'angolo B A E è vguale all'angolo G F L. & è come B A ad A E, coſi G F ad F L. perche dunque ſono due triangoli A B E F G L che hanno vn'angolo vguale ad vn'agolo, & d'intor-
6. di queſto. no à gli vguali angoli i lati proportionali, ſarà il triangolo A B E equiangolo al triangolo F G L, & percio etiandio ſimile. l'angolo dunque A B E è vguale all'angolo F G L, & è tutto l'angolo A B C vguale à tutto l'angolo F G H per la ſimilitudine de polygoni. onde il rimanente E B C è vguale al rimanente L G H. & perche per la ſimilitudine de triangoli A B E F G L è come la E B alla B A, coſi la L G alla G F, & per la ſimilitudine anchora de polygoni, come la A B alla B C, coſi è la F G alla G H; ſarà per l'vgual proportione come la E B alla B C, coſi la L G alla G H: & d'intorno à gli angoli vguali E B C L G H i lati ſono proportionali. adunque il triangolo E B C è equiangolo al triangolo L G H. onde anchor è ſimile, & per la medeſima ragione il triangolo E C D è ſimile al triangolo L H K. adunque i polygoni ſimili A B C D E F G H K L ſi diuidono in ſimili triangoli, & di numero vguali. Dico anche homologhi à tutti, cioè che i triangoli ſiano proportionali, & antecedenti eſſere A B E E B C E C D, & i conſeguenti loro F G L L G H L H K; & il polygono A B C D E al polygono F G H K L hauere doppia proportione di quella che ha il lato homologo al lato homologo, cioè A B ad F G. giunganſi A C F H. & perche per la ſimilitudine de polygoni l'angolo A B C è vguale all'angolo F G H; & è come la A B alla B C, coſi la F G
6. di queſto. alla G H, ſarà il triangolo A B C equiangolo al triangolo F G H. è dunque vguale l'angolo B A C all'angolo G F H, & l'angolo B C A all'angolo G H F. oltre à ciò perche l'angolo B A M è vguale all'angolo G F N, & ſi è dimoſtrato l'angolo A B M vguale all'angolo F G N, ſarà anchora il rimanente A M B vguale al rimanente F N G. è dunque il triangolo A B M equiangolo al triangolo F G N. dimoſtreremo parimente il triangolo B M C eſſere equiangolo al triangolo G N H. come dunque la A M alla M B, coſi è la F N alla N G, & come la B M alla M C, coſi la G N alla N H. onde per l'vgual proportione come la A M alle M C, coſi la
1. di queſto. F N alla N H. ma come la A M alla M C, coſi il triangolo A B M al triangolo M B C,
12. del quinto. & il triangolo A M E al triangolo E M C, percioche ſono fra loro come le baſi: & come vno de gli antecedenti ad vno de conſeguenti, coſi tutti gli antecedenti à tutti i conſeguenti. come dunque il triangolo A M B al triangolo B M C, coſi il
1. di queſto. triangolo A B E al triangolo C B E. ma come A M B à B M C, coſi la A M alla M C.

onde

onde come la A M alla M C, così il triangolo ABE al triangolo E B C. & per la
medesima ragione come la F N alla NH, così il triangolo FGL al triãgolo GHL,
& è come la AM alla M C, così la F N alla N H. adunque come il triangolo
A B E al triangolo B E C, così il triangolo F G L al triangolo G H L. &
permutandosi come il triangolo A B E al triangolo FGL, così il triangolo EBC
al triangolo GHL. dimostreremo similmente giunte che siano B D G K, come il
triangolo BEC al triãgolo LCH, così essere il triangolo ECD al triangolo LHK.
& perche come il triangolo A BE al triangolo FGL, così il triangolo EBC al trian
golo LGH, & anchor il triangolo ECD al triangolo LHK, sarà come vno de gli an 12. del quinto.
tecedenti ad vno de conseguenti, così tutti gli antecedenti à tutti i conseguenti.
adunque come il triangolo A B E al triangolo F G L, così il polygono A B C D E
al polygono F G H K L. ma il triangolo ABE al triangolo F G L ha doppia pro- per l'antecedente.
portione di quella, che ha il lato homologo A B al lato homologo F G, percio-
che i triangoli simili sono in doppia proportione de lati homologhi. adunque
etiandio il polygono A B C D E al polygono F G H K L ha doppia proportione
di quella, che ha il lato homologo A B al lato homologo F G. onde i polygoni si
mili si diuidono in simili triangoli, & vguali di numero, & homologhi à tutti, &
il polygono al polygono ha proportione doppia di quella che ha il lato homolo-
go al lato homologo. il che bisognaua dimostrare.

Al medesimo modo anchora ne simili quadrilateri si dimostrerà quelli essere in doppia proportione de lati homologhi, & si è dimostrato etiandio ne triãgoli.

COROLLARIO PRIMO.

Adunque vniuersalmente le figure rettilinee simili fra loro sono in proportione doppia di quella che hanno i lati homologhi: & se delle A B F G piglieremo la terza proportionale, che sia X, hauerà la A B alla X doppia proportione di quella, che ha la A B al la F G. ma anche il polygono al polygono & il quadrilatero al quadrilatero ha proportione doppia di quella, che ha il lato homologo al lato homologo, cioè A B à F G. & questo ne triangoli anchora è stato dimostrato.

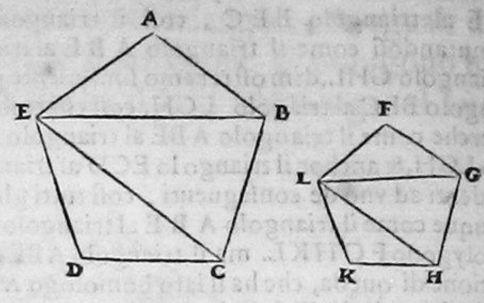
COROLLARIO. II.

La onde è manifesto vniuersalmente, che se tre linee rette siano proportionali, come la prima alla terza, così sarà la figura fatta dalla prima alla figura fatta dalla seconda, simile & similmente descritta. il che bisognaua dimostrare.

Dimostreremo anchora in altro modo, & piu ispeditamente i triangoli essere homologhi.

Siano i polygoni A B C D E F G H K L & giungansi B E E C G L L H. Dico che come il triangolo A B E al triangolo F G L, così essere il triangolo E B C al triangolo L G H, & il triangolo C D E al triangolo H K L. percioche essendo il triangolo A B E simile al triangolo F G L, hauerà il triangolo A B E al triango

lo F G L doppia proportione di quella che ha la B E alla G L. & per la medesima ragione il triangolo B E C al triangolo G L H ha doppia proportione di quella
11. del quinto. che ha B E alla G L. è dunque come il triangolo A B E al triangolo F G L, cosi il triangolo B E C al triangolo G L H. parimente perche il triangolo E B C è simile al triangolo L G H, hauerà il triangolo E B C al triangolo L G H doppia proportione di quella che ha la linea retta CE al la retta H L. & per la medesima ragione il triangolo E C D al triangolo L H K ha doppia proportione di quella che ha la C E alla H L. adunque come il triangolo B E C al triangolo L G H, cosi è il triangolo C E D al triangolo L H K: & si è dimostrato come il triangolo E B C al triangolo L G H, cosi essere il triangolo A B E al triangolo F G L. la onde come il triangolo A B E al triangolo F G L cosi è il triango-

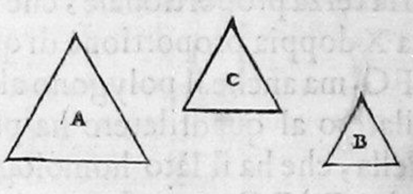


12. del quinto. lo B E C al triangolo G L H, & il triangolo E C D al triangolo L H K. come dunque vno de gli antecedenti ad vno de conseguenti, cosi tutti gli antecedenti sono à tutti i conseguenti & rimanenti come nella prima dimostratione. il che bisognaua dimostrare.

THEOREMA XV. PROPOSITIONE XXI.

I rettilinei simili ad vn medesimo rettilineo, sono anchora simili fra loro.

Sia l'vno & l'altro delli rettilinei A B simile al rettilineo C. Dico il rettilineo A essere simile al rettilineo B; percioche essendo il rettilineo A simile al rettilineo C, sarà anchor equiangolo, & d'intorno à gli uguali angoli angoli hauerà i lati proportionali. oltre à cio perche il rettilineo B è simile al rettilineo C, sarà etiandio equiãgolo ad esso, & hauerà d'intorno à gli vgual'angoli i lati proportionali. adunque 'uno & l'altro de rettilinei A B è equiangolo al C, & ha intorno à gli angoli vguali i lati proportionali. onde il rettilineo A è equiangolo al B, & ha i lati proportionali intorno à gli vguali angoli: & però il rettilineo A è simile al rettilineo B. il che bisognaua dimostrare.

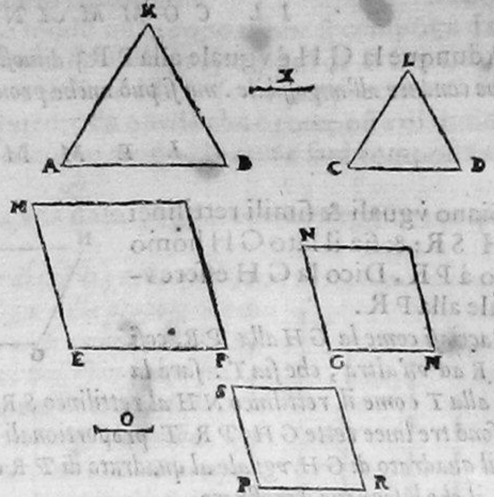


THEOREMA XVI. PROPOSITIONE XXII.

Se quattro linee rette sian o proportionali, i rettilinei anchora che si fanno da esse, simili & similmente descritti, saranno proportionali: & se i rettilinei, che si fanno da esse, simili & similmente descritti siano proportionali, le linee rette anchora saranno proportionali.

Siano quattro linee rette proportionali A B C D E F G H: & sia come la A B
18. di questo. alla C D, cosi la E F alla G H: & descriuansi dalle A B C D rettilinei simili & si-

milmente posti K A B L C D: & dalle E F G H descriuansi rettili nei simili & similmente posti MF N H. Dico che come il rettilineo K A B al rettilineo L C D, cosi è il rettilineo MF al rettilineo NH. piglisi delle AB CD la terza pro portionale X: & delle E F G H la terza proportionale O. & perche come la A B alla C D, cosi è la E F alla G H, & come la CD al la X, cosi la G H alla O; sarà per l'vgual proportione come la AB alla X, cosi la E F alla O. ma come la A B alla X, cosi è il rettilineo K A B al rettilineo L C D, & come la E F alla O, cosi il rettilineo M F, al rettilineo N H. adunque come il rettilineo K A B al rettilineo L C D, cosi è il rettilineo M F al rettilineo N H. Ma sia come il rettilineo K A B al rettilineo L C D, cosi il rettilineo MF al rettilineo N H. Dico come la A B alla C D, cosi essere la E F alla G H. facciasi come la A B alla C D, cosi la E F alla P R, & descriuasi dalla P R il rettilineo S R simile ad vno de rettilinei M F N H, & similmente posto. Perche dunque è come la A B alla C D, cosi la E F, alla P R: & sono descritti dalle A B C D rettilinei & similmente posti K A B L C D; & dalle E F P R rettilinei M F S R simili & similmente posti; sarà come il rettilineo K A B al rettilineo L C D, cosi il rettilineo M F al rettilineo R S: & si pone come il rettilineo K A B al rettilineo L C D, cosi il rettilineo M F al rettilineo N H. adunque come il rettilineo MF al rettilineo N H, cosi il rettilineo M F al rettilineo S R. & hauendo il rettilineo M F la medesima proportione all'vno & l'altro di essi N H S R; sarà il rettilineo N H vguale al rettilineo S R, ma è anchor simile & similmente posto. adunque la GH è vguale alla P R. & perche come la A B alla C D, cosi è la E F alla P R, & è la P R vguale alla G H; sarà come la A B alla C D, cosi la E F alla G H. adunque se quattro linee rette siano proportionali i rettilinei anchora che si fanno da esse simili & similmente descritti saranno proportionali: & se i rettilinei che si fanno da esse simili & similmente descritti siano proportionali; le linee rette anchora saranno proportionali. il che bisognaua dimostrare.



11. di questo.

Corol. 20. di questo.

11. del quinto.

12. di questo.

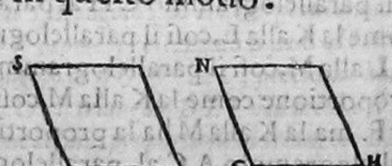
9. di quinto.

*

LEMMA.

Ma se li rettilinei siano vguali & simili i lati loro homologhi essere vguali fra loro, dimostreremo in questo modo.

Siano N H S R rettilinei vguali & simili, & sia come la H G alla G N, cosi la R P alla P S. Dico la R P essere vguale alla H G. percioche se siano disuguali, vna di esse sarà maggiore. sia la R P maggiore della H G. & perche come la RP alla PS, cosi è la HG alla GN, anchor permutandosi come la R P alla H G, cosi la P S alla G N. ma la P R è maggiore della H G. adunque etiandio la P S sarà maggiore della G N. onde il rettilineo R S è maggiore del rettilineo HN. ma è vguale. il che è impossibile. adúque la PR non è disuguale alla GH, & perciò è necessario che sia uguale. il che bisognaua dimostrare.

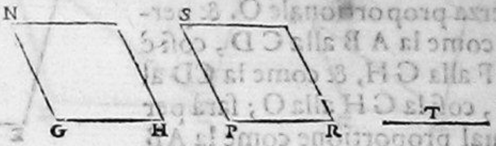


IL COMMANDINO.

※ Adunque la G H è vguale alla P R] *dimostra questo il lēma antecendete con argomento che conduce all'impossibile. ma si può anche prouare con dimostratione retta à questo modo.*

LEMMA A.

Siano vguali & simili rettilinei N H S R: & sia il lato G H homologo à P R. Dico la G H essere vguale alla P R.



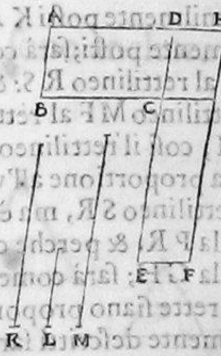
12. di questo. Corol. 20. di questo. *Facciasi come la G H alla P R, così la P R ad vn'altra, che sia T. sarà la G H alla T come il rettilineo N H al rettilineo S R. adunque la G H è vguale alla T. ma perche sono tre linee rette G H P R T proportionali, sarà il rettangolo contenuto dalle G H T*

17. di questo. *cioè il quadrato di G H vguale al quadrato di P R & per ciò la linea retta G H è vguale alla P R. il che bisognaua dimostrare.*

THEOREMA XVII. PROPOSITIONE XXIII.

I parallelogrammi equiangoli hanno fra loro la proportion composta da i lati.

Siano i parallelogrammi equiangoli A C C F, che habbiano l'angolo B C D vguale all'angolo E C G. Dico il parallelogrammo A C al parallelogrammo C F hauere proportione composta da i lati, cioè composta dal la proportione che ha la B C alla C G, & dalla proportione che ha la D C alla C E. pongasi la B C per diritto



14. del primo. alla C G. sarà dunque la D C per diritto alla C E. & compiscasi il parallelogrammo D G. & proposta la linea retta K, facciasi come la B C alla C G, così la K alla L: &

12. di questo. come la D C alla C E, così la L alla M. adunque le proportioni de K ad L & di L ad M sono le medesime che le proportioni de lati cioè B C à C G, & D C à C E. ma la proportione della K alla M è composta dalla proportione della K alla L & dalla proportione della L alla M: onde etiandio la K alla M ha proportione composta da i lati. & perche come la B C alla C G, così è il parallelogrammo A C al parallelogrammo C H, & come la B C alla C G, così la K alla L,

1. di questo. 11. del quinto. sarà come la K alla L, così il parallelogrammo A C al parallelogrammo C H. similmente perche come la D C alla C E, così è il parallelogrammo C H al parallelogrammo C F. & come la D C alla C E, così la L alla M, sarà come la L alla M così il parallelogrammo C H al parallelogrammo C F. & essendosi dimostrato che

11. del quinto. come la K alla L, così il parallelogrammo A C al parallelogrammo C H, & come la L alla M, così il parallelogrammo C H al parallelogrammo C F, sarà per l'ugual proportione come la K alla M così il parallelogrammo A C al parallelogrammo C F. ma la K alla M ha la proportione composta da i lati. adunque anchora il parallelogrammo A C al parallelogrammo C F hauerà la proportione composta da i lati. onde i parallelogrammi equiangoli hanno fra loro la proportion composta da i lati. il che bisognaua dimostrare.

IL COMMANDINO.

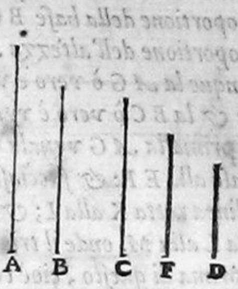
COROLLARIO. Dalle cose gia dimostrate, si raccoglie i triangoli c'hanno

no vn'angolo vguale ad un'angolo hauer la proportione composta da i lati, per-
cioche sono la metà de parallelogrammi equiangoli. 15. del quinto.

Si raccoglie oltre à questo, in che modo una proportione si compōga da due proportioni date, ò uero da piu, percioche dalle proportioni di B C à Ç G & di D C à C E è composta la proportione di K ad M: & se la proportione si debba comporre da tre proportioni, similmente da quella che è composta di due & del la terza comporremo vn'altra nel medesimo modo, la quale sarà composta di tre & cosi nelle altre.

Ma la proportion data si trarrà da vna data proportione maggiore in questo modo.

Siano le proportioni date di A à B, & di C à D; delle quali la proportione di C à D sia maggiore, & bisogni dalla proportione di C à D trarre la proportione di A à B. facciasi come la A alla B, 12. di questo.
cosi la C ad un'altra, cioè ad F, che si constituischi in mezo fra la C & la D. Dico la proportione di A à B gia esser tratta dalla pro portione di C à D: & la proportione che rimane essere quella, che ha la F alla D. percioche essendo la proportione di C à D composta dalla proportione di C ad F, & dalla proportione di F à D. se l'una delle dette proportioni, come di C ad F, che è di A à B, sarà tratta, resterà la proportione di F à D. & questo è quello che bisognaua fare.

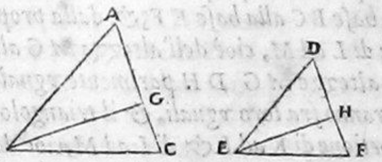


Ma in che modo le proportioni de numeri & si compongono & si traggono facilmente si potrà comprendere dalle cose gia dette, & da quello che dimostra il Turbachio, ò uero il Regiomontano nell'epitome della gran construttione di Ptolomeo alla proportione XVIII del primo libro. ma ci è piacciuto di porre qui alcuni Theoremi fatti da noi che non si scostano molto da questi, & possono essere in luogo di elementi.

THEOREMA I.

I triangoli de quali vn'angolo è vguale ad vn'angolo, hanno fra loro la medesima proportione, che i rettangoli contenuti da i lati, che sono d'intorno à gli angoli vguali.

Siano i triangoli A B C D E F: & sia l'angolo A vguale all'angolo D. Dico il triangolo A B C hauere la medesima proportione al triangolo D E F, che hà il rettangolo B A C al rettangolo E D F. tirinsi le B G E H perpendicolari. sarà il triangolo B A G simile al triangolo E D H, percioche l'angolo A è vguale all'angolo D, & l'angolo B G A retto è vguale al retto E H D. adunque il rimanente è vguale al rimanente, & come la G B alla B A, cosi la H E alla E D. ma come la 4. di questo.
G B alla B A, cosi il rettangolo, che si fa da B G & A C al rettangolo B A C, hauendo la me- 1. di questo.
desima altezza, cioè la linea retta A C. & similmente come la H E alla E D, cosi il rettangolo fatto dalla E H & D F al rettangolo E D F. adunque il rettangolo di B G & A C al ret 11. del quinto.
tangolo B A C è come il rettangolo di E H & D F al rettangolo E D F. & permutandosi, il rettangolo di B G & A C al rettangolo di E H & D F, come il rettangolo B A C al rettangolo E D F. ma il triangolo A B C è la metà del rettangolo di B G & A C, percioche hanno 41. del primo.
la medesima base A C, & la medesima altezza B G: & il triangolo D E F è la metà del triangolo di E H & D F. onde il triangolo A B C ha la medesima proportione al triangolo DEF, 15. del quinto.
che il rettangolo B A C al rettangolo D E F. adunque i triangoli de quali vn'angolo è vguale ad vn'angolo hanno fra loro la medesima proportione, che i rettangoli contenuti da i lati che sono d'intorno à gli angoli vguali. il che bisognaua dimostrare.



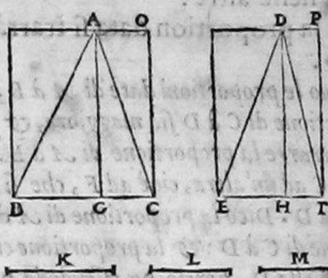
COROLLARIO.

Da questo segue i parallelogrammi equiangoli etiandio hauere fra loro la me 15. del quinto.

desima proportione che i rettangoli contenuti da i lor lati, conciosiacosa che siano doppij de cosi fatti triangoli.

THEOREMA II.

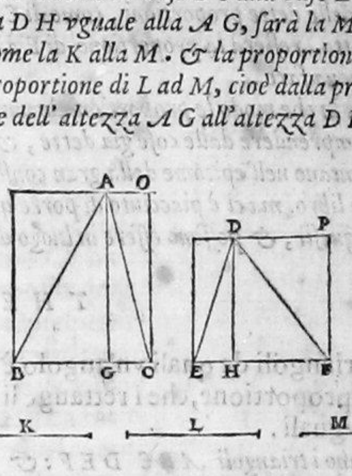
I triangoli & parallelogrammi hanno fra loro la proportion composta dalla proportione delle basi & dalla proportione delle altezze.



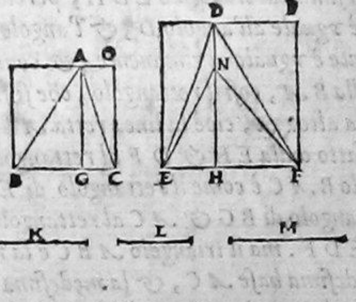
Siano i triangoli A B C D E F, & tirinsi le A G D H perpendicolari. Dico il triangolo ABC al triangolo D E F hauere la proportione composta dalla proportione della base B C alla base E F, & dalla proportione dell'altezza A G all'altezza D H. adunque la A G ò vero è vguale alla D H, ò disuguale; & la B C ò vero è vguale alla E F, ò disuguale. sia prima la A G vguale alla D H, & la B C disuguale alla E F: & facciasi come la B C alla E F, così la linea retta K alla L; & come la A G alla D H, così la L alla M. onde il triangolo A B C al triangolo D E F è come la base B C alla base E F per la prima di questo, cioè come la K ad L: & essendo la D H vguale alla A G, sarà la M vguale alla L, & il triangolo A B C al triangolo D E F, come la K alla M. & la proportione di K ad M è cōposta dalla proportione di K ad L & dalla proportione di L ad M, cioè dalla proportione della base B C alla base E F, & dalla proportione dell'altezza A G all'altezza D H.

12. di questo.

7. del quinto.



Nel medesimo modo si dimostrerà se la base B C sia vguale alla base E F essendo le altezze A G D H, disuguali, percioche saranno le K L fra loro vguali. & da quelle cose che habbiamo dimostrate nella prima di questo il triangolo A B C hauerà la medesima proportione al triangolo D E F, che la L alla M, cioè la K alla M. onde il triangolo A B C al triangolo D E F ha la proportion composta dalla proportione di K ad L, cioè del la base B C alla base E F, & dalla proportione di L ad M, cioè dell'altezza A G all'altezza D H. & se le basi B C E F siano vguali, & le altezze A G D H parimente vguali, il medesimo nondimeno ne seguirà, percioche K L M saranno fra loro vguali, & il triangolo al triangolo hauerà la proportione composta dalla proportione di K ad L & di L ad M, cioè dalla proportione delle basi & dell'altezze. & finalmēte se le basi B C E F siano disuguali & similmente le altezze A G D H disuguali, ponganſi la A G minore della D H & dalla D H taglisi H N vguale alla A G, & giunganſi E N N F. & similmente facciasi come la base B C alla base E F, così la K alla L: & come la N H alla H D cioè come la A G alla H D, così la L alla M. perche dunque i triangoli A B C N E F hanno la medesima altezza, saranno fra loro come le basi. onde il triangolo A B C al triangolo N E F è come la B C alla E F, cioè come la K alla L. ma il triangolo N E F al triangolo D E F è come l'altezza N H ò vero A G all'altezza D H, cioè come la L alla M. adunque per l'vgual proportione il triangolo A B C al triangolo D E F è come K ad M; & K ad M ha proportione composta dalla proportione di K ad L & dalla proportione di L ad M. onde il triangolo A B C al triangolo D E F ha proportione composta dalla proportione di K ad L & dalla proportione di L ad M, cioè dalla proportione



1. di questo.

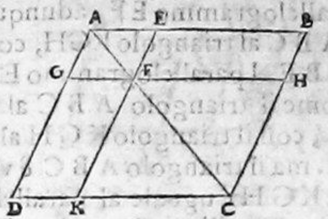
per le cose dimostrate nella prima di questo.

della

della base B C alla base E F & dalla proportione dell'altezza A G all'altezza D H. ma essen do il parallelogrammo B O doppio del triangolo A B C, & il parallelogrammo E P doppio del triangolo D E F, hauerà il parallelogrammo B O al parallelogrammo E P proportione composta dalla proportione della base B C alla base E F, & dalla proportione dell'altezza A G all'altezza D H. adunque i triangoli & parallelogrammi hanno fra loro la proportion composta dalla proportione delle basi & dalla proportione dell'altezze. il che bisognaua dimostrare. 15. del quinto.

THEOREMA XVIII. PROPOSITIONE XXIIII.

D'ogni parallelogrammo i parallelogrammi che sono d'intorno al diametro & al tutto & fra loro sono simili.



Sia il parallelogrammo A B C D, il cui diametro A C, & d'intorno al diametro A C siasiano i parallelogrammi E G H K. Dico i parallelogrammi E G H K & al tutto A B C D & fra loro essere simili. & perche ad vno de lati del triangolo A B C cioè à B C si è tirata la E F parallela, sarà come la B E alla E A, così la C F alla F A. similmente perche ad vn lato del triãgolo A C D, cioè à C D si è tirata F G paralle la, come la C F alla F A, così sarà la D G alla G A. ma come la C F alla F A, così si è dimostrata la B E alla E A. onde come la B E alla E A, così la D G alla G A. & componendosi come la B A alla A E, così la D A alla A G. & permutandosi come la B A alla A D, così la E A alla A G. adunque de parallelogrammi A B C D E G i lati d'intorno all'angolo commune B A D sono proportionali. & perche la G F è parallela alla D C, l'angolo A G F è vguale all'angolo A D C, & l'angolo G F A vguale all'angolo D C A, & l'angolo D A C è commune alli due triangoli A D C A G F; sarà il triangolo A D C equiangolo al triangolo A G F. & per la medesima ragione il triangolo A C B è equiangolo al triangolo A F E. adunque tutto il parallelogrammo A B C D è equiangolo al parallelogrammo E G. onde come la A D alla D C, così la A G alla G F: & come la D C alla C A, così la G F alla F A: & come la A C alla C B, così la A F alla F E. oltre à ciò come la C B alla B A, così la F E alla E A. perche dunque si è dimostrato che come la D C alla C A, così è la G F alla F A, & come la A C alla C B, così la A F alla F E, sarà per l'vgual proportione come la D C alla C B, così G F alla F E. adunque de parallelogrammi A B C D E G i lati sono proportionali, quelli che sono d'intorno à gli vgual angoli. & però il parallelogrammo A B C D è simile al parallelogrammo E G. & per la medesima ragione il parallelogrammo A B C D è simile al parallelogrammo K H. adunque l'vno & l'altro di essi parallelogrammi E G K H è simile al parallelogrammo A B C D. ma quelli che sono simili al medesimo rettilineo sono simili anchora fra loro. onde il parallelogrammo E G è simile al parallelogrammo H K. adunque d'ogni parallelogrammo i parallelogrammi che sono d'intorno al diametro & al tutto & fra loro sono simili. il che bisognaua dimostrare.

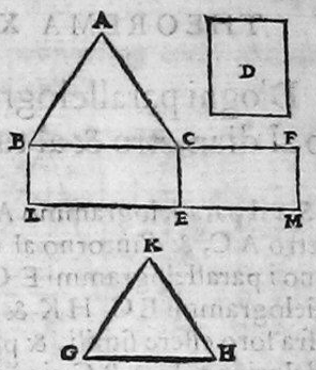
* 2. di questo. 11. del quinto. 29. del primo. 4. di questo. 21. di questo.

PROBLEMA VII. PROPOSITIONE XXV.

Constituire vn rettilineo simile ad vn dato rettilineo & vguale ad vn'altro dato.

Sia il rettilineo dato A B C, al quale bisogni constituire vn simile, & sia il rettilineo D al quale bisogni constituire vno vguale. adunque bisogna constituire vn

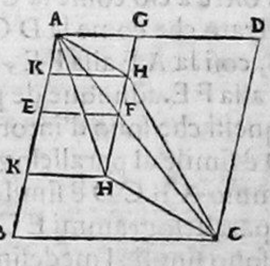
44. del primo. rettilineo simile allo A B C, & il medesimo vguale al D. adattisi alla linea retta B C il parallelogrammo B E vguale al triangolo A B C, & alla retta C E adattisi il parallelogrammo C M vguale al D nell'angolo F C E, che è vguale all'ango-
14. del primo. 13. di questo. 18. di questo. lo C B L. la B C dunque è per diritto alla C F, & la L E alla E M. piglisi delle B C C F la proportionale di mezo G H. & dalla G H descriuasi il triangolo K G H simile & similmente posto al triangolo A B C. & perche come la B C alla G H, così è la G H alla C F. & se tre linee rette siano proportionali come la prima
Corol. della 20. di questo. alla terza, così è la figura che si fa dalla prima à quella che si fa dalla seconda, simile & similmente descritta; sarà come la B C alla C F, così il triangolo A B C al triangolo K G H. ma come la B C alla C F, così il parallelogrammo B E al parallelogrammo E F. adunque come il triango-
11. del quinto. lo A B C al triangolo KGH, così il parallelogrammo B E al parallelogrammo E F: & permutando sì come il triangolo A B C al parallelogrammo B E, così il triangolo K G H al parallelogrammo E F. ma il triangolo A B C è vguale al parallelogrammo B E. il triangolo dunque K G H è uguale al parallelogrammo E F. ma il parallelogrammo E F è vguale al rettilineo D. onde etiandio il triangolo K G H è uguale al D: & K G H è simile al triangolo A B C. adunque si è constituito un rettilineo K G H simile ad vn dato rettilineo A B C, & uguale ad un'altro dato. il che bisognaua fare.



THEOREMA XIX. PROPOSITIONE XXVI.

Se da un parallelogrammo si tragga un parallelogrammo simile al tutto, & similmente posto, che habbia un'angolo commune con esso; quello sarà d'intorno al medesimo diametro col tutto.

Dal parallelogrammo A B C D traggasi il parallelogrammo A F, simile allo A B C D, & similmente posto, che habbia l'angolo D A B commune con esso. Dico il parallelogrammo A B C D essere d'intorno al medesimo diametro col parallelogrammo A F. non gia, ma se egli è possibile, sia il loro diametro A H C; & prolunghisi la G F fino al punto H, & tirisi per H ad vna di esse A D B C la parallela H K. perche dunque il parallelogrammo A B C D è d'intorno al medesimo diametro col paral-

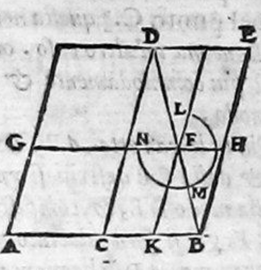


24 di questo. lelogrammo K G, sarà il parallelogrammo A B C D simile al parallelogrammo
prima diff. di questo. K G. adunque come la D A alla A B, così la G A alla A K: & è per la similitudine de parallelogrammi A B C D E G come la D A alla A B, così la G A alla
11 del quinto. A E. onde come la G A alla A E, così è la G A alla A K: & hauendo la G A la me-
9. del quinto. desima proportione all'una & l'altra delle A K A E, sarà la A E vguale alla A K. la minore alla maggiore. il che non è possibile. adunque il parallelogrammo A B C D non è d'intorno al medesimo diametro col parallelogrammo A H, & perciò sarà d'intorno al medesimo diametro con A F. se dunque da un parallelogrammo si tragga un parallelogrammo simile al tutto & similmente posto, che habbia vn'angolo commune con esso, quello sarà d'intorno al medesimo diametro col tutto. il che bisognaua dimostrare.

THEOREMA XX. PROPOSITIONE XXVII.

De parallelogrammi adattati alla medesima linea retta & che mancano di figure parallelogramme simili & similmente poste à quella che si descriue dalla metà, il maggiore di tutti è il parallelogrammo adattato alla metà, essendo simile al mancamento.

Sia la linea retta A B & seghisi per mezo nel punto C; & alla linea retta A B adattisi il parallelogrammo A D, che manchi della figura parallelogramma D B, simile & similmente posta à quella che è descritta dalla metà di A B, cioè dalla C B. Dico de parallelogrammi adattati alla linea retta A B, che mancano di figure parallelogramme simili & similmente poste alla D B, il maggior di tutti essere il parallelogrammo A D. adattisi alla linea retta A B il parallelogrammo A F, che manchi della figura parallelogramma F B, simile & similmente posta alla D B. Dico il parallelogrammo A D essere maggiore del parallelogrammo A F, percioche essendo il parallelogrammo D B simile al parallelogrammo F B, sono d'intorno al medesimo diametro. tirisi il lor diametro D B: & descriuasi la figura. perche dunque il parallelogrammo C F è vguale al parallelogrammo F E, pongasi commune lo F B. adunque tutto C H è vguale à tutto K E. ma C H è vguale à C G, percioche la linea retta A C è vguale alla C B. onde il parallelogrammo G C sarà vguale al parallelogrammo E K. pongasi C F commune. adunque tutto il parallelogrammo A F è vguale al gnomone L M N, & percio il parallelogrammo D B cioè A D è maggiore del parallelogrammo A F. adunque de parallelogrammi adattati alla medesima linea retta che mancano di figure parallelogramme simili & similmente poste à quella che si descriue dalla metà, il maggior di tutti è il parallelogrammo adattato alla metà. il che bisognaua dimostrare.



A

B

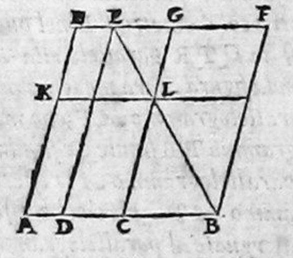
per l'antecedente.

43. del primo.

36. del primo.

IN ALTRO MODO.

Sia parimente la retta linea A B segata per mezo nel punto C: & sia adattato il parallelogrammo A L che manchi della figura L B, & alla linea retta A B adattisi il parallelogrammo A E, che manchi della figura E B, simile & similmente posta à quella che si descriue dalla metà di A B, cioè ad L B. Dico il parallelogrammo A L che è adattato alla metà esser maggiore del parallelogrammo A E, percioche essendo E B simile ad L B, sono d'intorno al medesimo diametro. sia il diametro loro E B, & descriuasi la figura. & perche il parallelogrammo L F è vguale al parallelogrammo L H, essendo la F G vguale alla G H, sarà il parallelogrammo L F maggiore di E K. ma L F è vguale ad L D. adunque D L è maggiore di E K. pongasi K D commune. la onde tutto A L è maggiore di tutto A E. il che bisognaua dimostrare.



per l'antecedente.

36 del primo.

43. del primo.

IL COMMANDINO.

Et alla linea retta A B adattisi il parallelogrammo A D, che manchi della figura parallelogramma D B. A

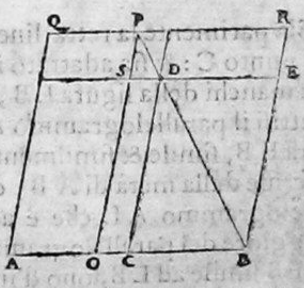
Descriuasi dalla linea retta C B qual si voglia parallelogrammo D B, & compiscasi tutto il parallelogrammo A B E. sarà alla linea retta A B adattato il parallelogrammo A D, che manca della figura parallelogramma D B, simile & similmente posta à quella che è descritta dalla metà di A B.

B Adattisi alla linea retta A B il parallelogrammo A F, che manchi della figura parallelogramma F B simile & similmente posta alla D B.

Piglisi nella linea retta A B fra C B qual si voglia punto K, & dalla K B descriuasi vn parallelogrammo simile & similmente posto a D B, che sia K B H F, & prolunghisi la H F nel punto G. sarà alla linea retta A B adattato il parallelogrammo A F, che manca della figura parallelogramma F B simile & similmente posta alla DB.

C Sia parimente la retta linea segata A B per mezo nel punto C.] *questa non pare essere vn'altra demostratione ma vn'altro caso. onde il theorema forse si spiegarà piu commodamente & piu manifestamente in questo modo.*

Sia la linea retta A B, & seghisi per mezo nel punto C: & dalla C B descriuasi vn parallelogrammo in qual si voglia modo D B, & compiscasi tutto il parallelogrammo A E F. già si sarà adattato alla linea retta A B il parallelogrammo A D, che manca della figura parallelogramma D E simile & similmente posta à quella che è descritta dalla metà di A B, cioè dalla C B. Dico de parallelogrammi adattati alla linea retta A E & che mancano delle figure simili & similmente poste alla D B, il maggiore di tutti essere A D. giungasi D B diametro del parallelogrammo D B. sarà la linea retta alla quale si debbono adattare altri parallelogrammi ò maggiore della metà di A C, ò minore. piglisi prima maggiore: & sia A K; & dal punto K tirisi la K F parallela alla B E che seghi il diametro D E nel punto F: & per F tirisi la G F H parallela alla A B, & compiscasi la figura. sarà adattato ad A B vn'altro parallelogrammo A F, che manca della figura parallelogramma F B simile & similmente posta alla D B, come quella che è d'intorno al medesimo diametro. Dico dunque il parallelogrammo A D essere mag-
43 del primo. *giore del parallelogrammo A F. percioche essendo il supplemento C F vguale al supplemento*
36. del primo. *F E, posto FB commune, sarà tutto C H vguale à tutto K E. ma C H è vguale à G C, percioche la linea A C è vguale alla C B. adunque etiandio il parallelogrammo G C è vguale al parallelogrammo K E. pongasi C F commune all'vno & l'altro. onde tutto A F è vguale al gnomone L M N, & percio il parallelogrammo D B cioè A D sarà maggiore del parallelogrammo A F.*

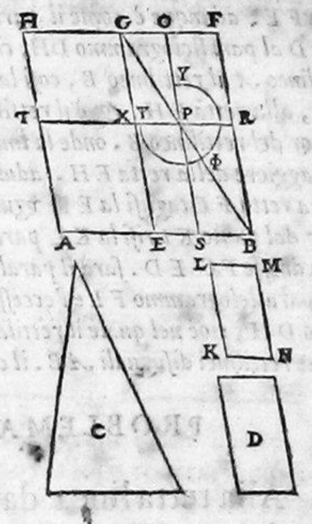


Piglisi poi A O minore della metà di A C, & per O tirisi la O P parallela alla B E, quale prolungata concorra col diametro E D nel punto P. finalmente per P tirisi la Q P R parallela alla A B, & compiscasi la seconda figura. sarà medesimamente adattato alla A B il parallelogrammo A P, che manca dalla figura parallelogramma P E simile & similmente posta alla D B. Dico il parallelogrammo A D essere maggiore del parallelo-
35. del primo. *grammo A P. percioche essendo il parallelogrammo D R vguale al parallelogrammo D Q, sarà il parallelo-*
43. del primo *grammo D R maggiore di S Q. ma il supplemento O D è vguale al supplemento D R. onde O D è maggiore di S Q. ponganси A S commune. adunque tutto A D sarà maggiore di tutto A P, & percio de parallelogrammi adattati alla medesima linea retta & che mancano di figure parallelogramme simili & similmente poste à quella che si descriue dalla metà, il maggiore di tutti è il parallelogrammo adattato alla metà. il che bisognaua dimostrare.*

PROBLEMA VIII. PROPOSITIONE XXVIII.

Alla retta linea data adattare vn parallelogrammo vguale advn dato rettilineo, che manchi d'vna figura parallelogramma, simile ad vn'altra data. ma bisogna che'l dato rettilineo al quale si deue adattare vn parallelogrammo vguale, non sia maggior di quello che si adatta alla metà, essendo simili i mancamenti & quello che si fà dalla metà, & quello, al quale deue essere simile il mancamento.

Sia la data linea retta A B, & il dato re ttilineo, al quale bisogni adattare vn parallelogrãmo vguale alla data linea A B sia C, non maggiore di quello che è adattato alla metà, essendo li mancamenti simili: & quello al quale deue esser simile il mancamento, sia D. bisogna alla data linea retta A B adattare vn parallelogrammo vguale al dato rettilineo C che manchi della figura parallelogramma simile à D. seghisi per mezo la A B nel punto E & dalla E B descriuasi vn parallelogrammo simile & similmente posto à D, che sia E B F G: & cõpiscasi il parallelogrammo A G. adunque A G ò vero è vguale à C, ò vero è maggiore di esso per la determinatione, & se A G sia vguale à C, già sarà fatto ciò che si proponeua, percioche alla linea retta A B si è adattato vn parallelogrammo A G vguale al dato rettilineo C, che manca della figura parallelogramma G B, simile à D. Ma se non è vguale, sarà H E maggiore di C: & è H E vguale à G B. onde G B è maggior di C. constituiscasi un parallelogrammo K L M N vguale all'eccesso, nel quale G B auanza C, & simile & similmente posto à D. ma D è simile à G B. onde etiandio K M sarà simile à G B. sia dunque la retta linea K L homologa alla G E, & la L M homologa alla G F. & perche il parallelogrammo G B è vguale a C, & à K M, sarà G B maggiore di K M. adunque la linea retta G E è maggior della K L, & la G F della L M. pongasi la G X vguale alla K L, & la G O vguale alla L M, & compiscasi il parallelogrammo X G O P. onde il parallelogrammo G P è vguale & simile a K M. ma K M è simile a G B. adunque anchora G P e simile à G B: & per tal cagione G P e d'intorno al medesimo diametro con G B. sia il lor diametro G P B. & descriuasi la figura. perche dunque G B e vguale à C & K M, de quali G P e vguale à K M, sarà il gnomone ϒΦΤ vguale al rimanẽte C. & perche O R e vguale ad X S, pongasi P B cõmune. sarà tutto O B vguale à tutto X B. ma X B e vguale à T E, conciosiacosa che il lato A E sia vguale al lato E B. onde anchor T E ò vguale ad O B. pongasi X S commune. adunque tutto T S e vguale à tutto il gnomone ϒΦΤ. ma il gnomone ϒΦΤ e dimostrato vguale à C, & perciò T S sarà vguale à C. la onde alla retta linea data A B si è adattato vn parallelogrammo T S vguale al dato rettilineo C, che manca della figura parallelogramma P B, simile à D, perche etiandio P B è simile à G P. il che bisognaua fare.



18. di questo.
*
21. di questo.
26. di questo.
43. del primo.
36. del primo.

IL COMMANDINO.

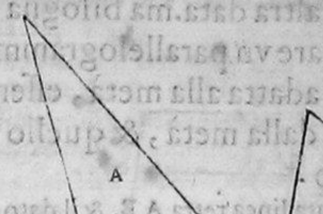
Constituiscasi vn parallelogrammo K L M N vguale all'eccesso nel quale G B *

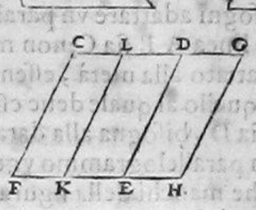
auanza

auanza C, & simile & similmente posto à D] *per la 25 di questo. Ma perche si possa trouare facilmente l'eccesso nel quale vn rettilineo auanza l'altro, ci è piacciuto porre il seguente problema.*

Di due rettilinei disuguali trouare l'eccesso nel quale il maggiore auanza il minore.

Siano due rettilinei disuguali A B: & sia A il maggiore. bisogna trouare l'eccesso, nel quale il rettilineo A auanza il B. constituisca
45. del primo *si il parallelogrammo C D E F in qual si voglia angolo, vguale al dato rettilineo A: & nel-*
44. del primo. *la linea retta D E & nell'angolo vguale à D C F adattisi il parallelogrammo D G H E v-*
14. del primo. *guale al rettilineo B. sarà la linea retta D G per diritto alla C D, & la E H per diritto alla F E. adunque è come il parallelogrammo F D al parallelogrammo D H, cioè come il rettilineo A al rettilineo B, così la linea retta F E, alla retta E H. & è il rettilineo A maggior del rettilineo B. onde la linea retta F E è maggiore della retta E H. adunque dalla linea retta F E taglisi la E K vguale alla E H, & dal punto K tirisi la K L parallela à ciascuna di esse F C E D. sarà il parallelogrammo K D vguale al parallelogrammo D H, & però il parallelogrammo F L è l'eccesso, nel quale il parallelogrammo F D auanza il parallelogrammo D H, cioè nel quale il rettilineo A auanza il rettilineo B. adunque si è trouato l'eccesso di due rettilinei disuguali A B. il che bisognaua fare.*

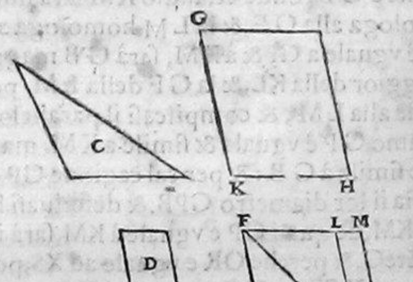




PROBLEMA IX. PROPOSITIONE XXIX.

Alla retta linea data adattare vn parallelogrammo vguale ad vn dato rettilineo, che ecceda d'una figura parallelogramma simile ad vn altra data.

Sia la retta linea data A B, & il rettilineo dato, al quale bisogni adattare vn parallelogramo vguale alla linea retta A B, sia C: & quello al quale l'eccesso deue essere simile sia D. adunque bisogna alla linea retta A B adattare un parallelogrammo vguale al dato rettilineo C che ecceda d'una figura parallelogramma simile à D. seghisi la A B
18. di questo. per mezo nel punto E: & dalla E B
25. di questo. descriuasi il parallelogrammo B F simile à D, & similmente posto: & constituiscasi il parallelogrammo G H vguale all'uno & l'altro B F C & simile à D, & similmente posto. adunque il parellelogrammo G H è simile ad F B, & sia K H il lato rispondente ad F L & K G rispondente ad F E, & perche il parallelogrammo G H è maggiore di F B, sarà la linea retta K H maggiore di F L, & K G maggiore di F E. prolunghisi F L F E: & à K H sia vguale F L M, & à K G vguale F E N: & compiscasi il parallelogrammo M N: adunque il parallelogrammo



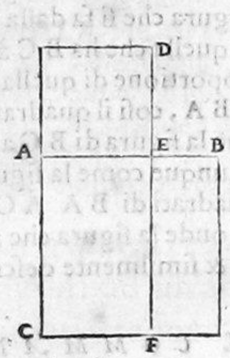
logrammo M N è vguale & ſimile à G H . ma G H è ſimile ad EL. adunque etian- 21. di queſto.
dio MN ſarà ſimile ad E L,& perciò EL è d'intorno al medeſimo diametro con M 26. di queſto.
N . tiriſi il loro diametro F X, & deſcriuaſi la figura . & perche G H è vguale al-
l'uno & l'altro E L C, & anchora è vguale ad M N, ſara M N vguale all'uno &
l'altro E L C . traggaſi E L che è commune. adunque il gnomone rimanente
ΤΥΦ è vguale à C. & perche la linea A E è vguale alla E B, ſarà il parallelogram-
mo A N vguale al parallelogrammo N B, cioè ad L O. pongaſi E X commune.
adunque tutto A X è vguale al gnomone ΦΥΤ. ma il gnomone ΦΥΤ è vguale à C.
& percio A X è vguale à C . la onde alla retta linea data A B ſi è adattato vn pa-
rallelogrammo A X vguale al dato rettilineo C, che eccede d'una figura paralle
logramma F O, ſimile à D, perche O P è ſimile ad E L. il che biſognaua fare. 24. di queſto.

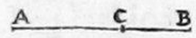
PROBLEMA X. PROPOSITIONE. XXX.

Segare una data linea retta terminata ſecondo l'eſtrema & meza proportione.

Sia la data linea retta terminata A B. biſogna ſegare la A B ſecondo l'eſtrema & meza proportione. deſcriuaſi dalla A B il quadrato B C, & alla A C adattiſi il parallalogrammo C D, vguale à B C, che ecceda della figura A D, ſimile à B C. ma B C è quadrato. adunque etiandio A D ſarà quadrato. & perche B C è vguale à C D, traggaſi C E, che è commune. il rimanente dunque BF è vguale al rimanente A D, & è equiangolo ad eſſo. il perche i lati di B F A D che ſono d'intorno à gli vguali angoli, ſi riſpondono fra loro contrariamente :& perciò come F E ad E D coſi è A E ad E B : & è F E vguale ad A C, cioè ad A B, & E D ad A E. onde come A B ad A E, coſi A E ad E B. ma A B è maggiore di A E. adunque A E è maggiore di E B. la onde la linea retta A B è ſegata nel punto E ſecondo l'eſtrema & meza proportione. il che biſognaua fare.

45. del primo. per l'antecedente.





14. di queſto. 34 del primo. per quel che ſi è aggiunto al la 16 del 5.

IN ALTRO MODO. Sia la data linea retta A B. biſogna ſegare la A B ſecondo l'eſtrema & meza proportione. ſeghiſi la A B nel punto C di modo che il rettangolo contenuto dalle A B B C ſia vguale al quadrato di A C. perche dunque il rettangolo A B C è vguale al quadrato di A C, ſarà come la B A alla A C, coſi la A C alla C B. onde la linea retta AB e ſegata ſecondo l'eſtrema & meza proportione. il che biſognaua fare.

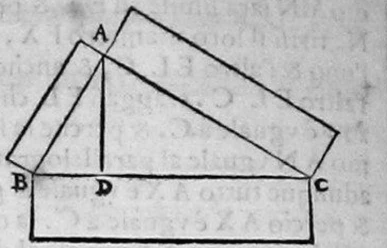
11. del ſecōdo. 17. di queſto.

THEOREMA XXI. PROPOSITIONE XXXI.

Ne triangoli rettangoli la figura che ſi fa dal lato ſottopoſto all'angolo retto è vguale alle figure fatte da i lati, che l'angolo retto contengono, ſimili & ſimilmente deſcritte.

Sia il triangolo rettangolo A B C, che habbia l'angolo retto B A C. Dico la figura che ſi fa da B C eſſere vguale à quelle che ſi fanno da B A A C, ſimile & ſimilmente deſcritte. tiriſi la A D perpendicolare. perche dunque nel triangolo rettangolo A B C dall'angolo retto A ſi è tirata la A D perpendicolare alla baſe B C, ſaranno i triangoli A B D A D C che ſono alla perpendicolare ſimili al tutto A B C & fra loro. & perche il triangolo A B C è ſimile al triangolo A B D, ſarà come la C B alla B A, coſi la A B alla B D. & eſſendo tre linee rette proportio 8. di queſto.

Corol. della 20. di questo. nali, come la prima alla terza, così sarà la figura che si fa dalla prima à quella che si fa dalla seconda, simile & similmente descritta. adunque come la C B alla B D, così la figura che si fa dalla C B à quella che si fa dalla B A simile & similmente descritta. & per la medesima ragione come la B C alla C D, così la figura che si fa dalla B C à quella che si fa dalla C A. onde



A come la B C alle B D D C, così è la figura che si fa dalla B C à quelle che si fanno dalle B A A C simili & similmente descritte: ma la B C è vguale alle B D D C. adunque la figura che si fa dalla BC è vguale à quelle che si fanno dalle B A A C simili & similmente descritte, la onde ne triangoli rettangoli la figura che si fa dal lato sottoposto all'angolo retto è vguale alle figure fatte da i lati che l'angolo retto contengono simili & similmente descritte. il che bisognaua dimostrare.

IN ALTRO MODO Perche le figure simili sono in doppia proportione

20. di questo. de lati homologhi, la figura che si fa dalla B C à quella che si fa dalla B A, hauerà doppia proportione di quella che ha B C à B A, & il quadrato di B C al quadra-

11. del quinto. to di B A ha doppia proportione di quella che ha B C à B A. come dunque la figura di B C a quella di B A, così il quadrato di B C al quadrato di B A. & per la medesima ragione come la figura di B C a quella di C A, così il quadrato di B C

B al quadrato di C A. adunque come la figura di B C a quelle di B A A C, così il

47. del primo. quadrato di B C alli quadrati di B A A C. ma il quadrato di B C è vguale alli quadrati di B A A C. onde la figura che si fa da B C è vguale a quelle che si fanno da B A A C, simili & similmente descritte. il che bisognaua dimostrare.

IL COMMANDINO.

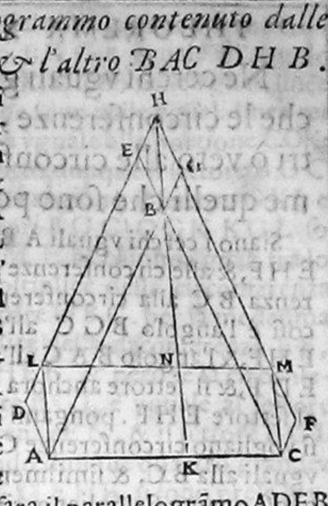
A Onde come la B C alle B D D C, così la figura che si fa dalla BC a quelle che si fanno dalle B A A C simili & similmente descritte] *perche essendo come la C B alla B D, così la figura di C B à quella di B A simile & similmente descritta, sarà conuertendosi come la D B alla B C così la figura di B A à quella di B C simile & similmente descritta. oltre à cio essendo come la B C alla C D, così la figura che si fa da B C à quella di C A, & conuertendosi come la D C alla C B, così sarà la figura di A C à quella di C B. sia dunque la figura di B A la prima grandezza, la figura di B C la seconda, la linea retta D B la terza, la retta B C la quarta, la figura che si fa da A C la quinta, & la linea retta D C la sesta. onde la prima grandezza alla seconda è come la terza alla quarta, & la quinta alla seconda, come la sesta alla quarta. adunque per la vigesima quarta del quinto libro, composta la prima & la quinta alla seconda sarà come la terza & la sesta composta alla quarta, cioè le figure che si fanno da B A A C à quella di B C saranno, come le linee rette B D D C alla retta B C. & similmente conuertendosi la figura che si fa da B C alle figure di B A A C sarà come la linea retta B C alle rette B D D C.*

B Adunque come la figura di B C a quelle di B A A C, così il quadrato di B C alli quadrati di B A A C.

Et questo similmente concluderemo come poco fa si è detto per la 24 del quinto, percioche sarà la figura di B A la prima grandezza, la figura di B C la seconda, il quadrato di B A la terza, il quadrato di B C la quarta, la figura di A C la quinta, & il quadrato di A C la sesta. ma di questo theorema è molto piu vniuersale quello che è dimostrato da Pappo nel quarto libro delle collettioni mathematiche.

Sia il triangolo A B C, & dalle A B B C descriuansi quai si vogliano parallelogrammi A B E D B C F G, & le linee D E F G prolunghinsi nel punto H, & giungasi H B. si faranno i parallelogram-

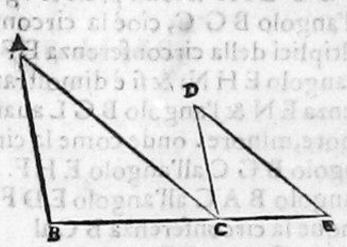
mi ABED BCFG vguali al parallelogrammo contenuto dalle AC HB nell'angolo che sia vguale all'uno & l'altro BAC DHB.



Prolunghisi la H B nel punto K, & per A C tirinsi le A L C M parallele alla K H. & giungasi L M. & per che A L H B è parallelogrammo, le A L B H saran no eguali & parallele. 34 del primo. similmente saranno vguali & parallele M C H B. 30 del primo. adunque è necessario che L A M C siano vguali & parallele. 33 del primo. & medesimamente L M A C. adunque A L M C è parallelogrammo nell' angolo L A C, cioe nell'angolo vguale all'uno & l'altro B A C D H B, cóciosia cosa che l'angolo D H B sia vguale all'angolo L A B. 34. del primo. & perche il parallelogrammo D A B E è vguale al parallelogrammo L A B H, 35. del primo. essendo nella medesima base A B & nelle medesime parallele A B D H, & il parallelogrammo L A B H è vguale al parallelogrãmo L A K N, fermãdosi nella medesima base L A & nelle medesime parallele L A H K: sara il parallelogrãmo A D E B vguale al parallelogrammo L A K N. & per la medesima cagione il parallelogrammo B G F C al parallelogrammo K N M C. adunque i parallelogrammi D A B E B G F C sono vguali al parallelogrammo L A C M. cioè à quello che si contiene dalle A C H B nell'angolo L A C che è vguale à l'uno & l'altro B A C B H L. & questo è molto piu vniuersale di quello che si dimostra ne gli elementi delli quadrati nel triangolo rettangolo.

THEOREMA XXII. PROPOSITIONE XXXII.

Se due triangoli siano composti ad un'angolo, & habbiano due lati proportionali à due lati, talmente che i lati loro rispondenti siano anchor paralleli, saranno gli altri lati de triangoli posti per diritto fra loro.

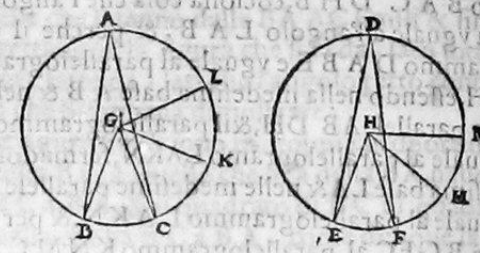


Siano due triangoli A B C D C E, che habbiano due lati B A A C proportionali à due lati C D D E, & sia come B A ad A C, cosi C D à D E, & la A B sia parallela alla D C, & la A C alla D E. Dico la B C essere per diritto alla C E, percioche essendo la A B parallela alla D C & cadendo in esse vna linea retta A C, saranno gli angoli alterni B A C A C D fra loro vguali; 29. del primo. & per la medesima ragione l'angolo C D E è vguale all'angolo A C D. onde altresi B A C è vguale à C D E. & perche sono due triangoli A B C D C E che hanno vn' angolo A vguale ad vn'angolo D, & d'intorno à gli vgual angoli i lati proportionali, che come B A ad A C cosi è C D à D E, sara il triangolo A B C equiangolo al triangolo D C E. 6. di questo. adunque l'angolo A B C è vguale all'angolo D C E: & si è dimostrato l'angolo A C D vguale all'angolo B A C. & però tutto A C E è vguale alli due A B C B A C. pongasi l'angolo A C B commune. gli angoli dunque A C E A C B sono vguali à gli angoli B A C A C B C B A. ma B A C A C B C B A sono vguali à due retti. onde etiandio gli angoli A C E A C B saranno vguali à due retti. adunque ad una linea retta A C & al punto C in essa due linee rette B C C E che non sono poste dalle medesime parti fanno gli angoli da i lati A C E A C B vguali à due retti: & perciò B C sarà per diritto à C E. 14. del primo. onde se due triangoli siano composti ad vn'angolo, & habbiano due lati proportionali à due lati, talmente che i lati loro rispondenti siano anchor paralleli, saranno gli altri lati de triangoli posti per diritto fra loro. il che bisognaua dimostrare.

THEOREMA XXIII. PROPOSITIONE XXXIII.

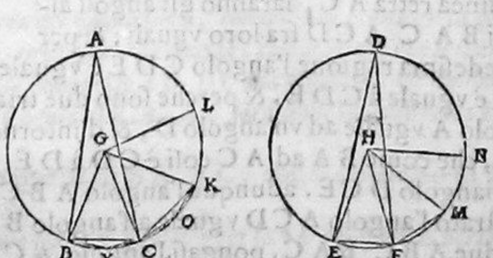
Ne cerchi vguali gli angoli hanno la medesima proportione che le circonferenze, sopra le quali si fermano, ò siano alli centri ò vero alle circonferenze: & oltre à cio i settori anchora, come quelli che sono posti alli centri.

Siano i cerchi vguali A B C DEF, & alli loro centri G H siano gli angoli BGC E H F, & alle circonferenze gli angoli B A C E D F. Dico che come la circonferenza B C alla circonferenza E F così è l'angolo B G C all'angolo E H F, & l'angolo B A C all'angolo E D F, & il settore anchora B G C al settore E H F. ponganſi quante si vogliano circonferenze C K K L vguali alla B C, & similmente ponganſi quante si vogliano circonferenze F M M N vguali alla E F, & giunganſi G K G L H M H N. perche dunque le circonferenze



27. del terzo. B C C K K L sono fra loro vguali, saranno altresi gli angoli B G C C G K K G L vguali fra loro. adunque quante volte la circonferenza L B è moltiplice della circonferenza BC, tante volte l'angolo B G L è moltiplice dell'angolo B G C. per la medesima ragione quante volte la circonferenza N E è moltiplice della circonferenza E F, tante volte l'angolo E H N è moltiplice dell'angolo E H F, se dunque la circonferenza B L è vguale alla circonferenza E N, & l'angolo B G L sara vguale all'angolo E H N. & se la circonferenza B L è maggiore della circonferenza E N, & l'angolo B G L sara maggiore dell'angolo E H N; & se minore, minore. essendo dunque quattro grandezze cioè due circonferenze B C E F, & due angoli B G C E H F si sono prese le vgualmente moltiplici della circonferenza B C & dell'angolo B G C, cioè la circonferenza B L & l'angolo BGL, & le vgualmente moltiplici della circonferenza E F & dell'angolo E H F, cioè la circonferenza E N & l'angolo E H N: & si è dimostrato che se la circonferenza B L auanza la circonferenza E N & l'angolo B G L auanzera l'angolo E H N; & se vguale, vguale; & se minore, minore. onde come la circonferenza B C alla circonferenza E F, così è

5. diff. del 5. 15 del quinto, 20. del terzo. l'angolo B G C all'angolo E H F. ma come l'angolo B G C all'angolo E H F così è l'angolo B A C all'angolo E D F, essendo ciascuno doppio di ciascuno. come dunque la circonferenza B C al la circonferenza E F, così è anchor l'angolo BGC all'angolo E H F, & l'angolo B A C all'angolo E D F. onde ne cerchi vguali gli angoli hanno la medesima proportione che le circonferenze, sopra le quali si fermano ò siano alli centri, ò vero alle circonferenze. Dico oltre a



cio come la circonferenza B C alla circonferenza E F, così essere il settore G B C al settore H E F, giunganſi B C C K, & presi nelle circonferenze B C C K i punti X O, giunganſi B X X C C O O K. & perche le due B G G C sono vguali alle due C G G K, & contengono gli angoli vguali, sara anchor la base B C vguale alla base C K. onde il triangolo G B C è vguale al triangolo G C K. & perche

4. del primo. la circonferenza B C e vguale alla circonferenza C K, etiandio la rimanente cir-

conferenza

conferenza che compisce tutto il cerchio A B C e vguale alla rimanente che compisce il medesimo cerchio. adunque anchor l'angolo B X G e vguale all'angolo C O K & la portione B X C e simile alla portione C O K, & sono nelle vguali linee rette B C C K. ma quelle portioni simili de cerchi che sono nelle vguali linee rette sono fra loro vguali. adunque la portione B X C e vguale alla portione COK: & e il triangolo B G C vguale al triangolo C G K. tutto dunque il settore B G C sara vguale a tutto'l settore C G K. & per la medesima ragione il settore G K L e vguale all'vno & l'altro G K C G C B. onde i tre settori B G C C G K K G L sono fra loro vguali. & parimente i settori H E F H F M H M N sono vguali fra loro. quante volte dunque la circonferenza L B e moltiplice della circonferenza C B, tante volte il settore G B L e moltiplice del settore G B C. per la medesima ragione quante volte la circonferenza N E e moltiplice della circonferenza E F, tante volte il settore H E N e moltiplice del settore H E F. & però se la circonferenza B L e vguale alla circonferenza E N, & il settore B G L è vguale al settore E H N: & se la circonferetza B L auanza la circonferenza E N, & il settore B G L auanza 'l settore E H N; & se minore, minore. essendo dunque quattro grandezze le due circonferenze B C E F & i due settori B G C E H F, si sono prese le vgualmente moltiplici & della circonferenza B C & del settore B G C, la circonferenza B L & il settore B G L; & della circonferenza E F & del settore EHF vgualmente moltiplici la circonferenza E N & il settore E H N; & si è dimostrato che se la circonferenza B L auanza la circonferenza E N, & il settore B G L auanza il settore E H N, & se è vguale, vguale; & se minore, minore. adunque come la circonferenza B C alla circonferenza E F, così è il settore B G C al settore E H F. il che bisognaua dimostrare.

27. del terzo.
11. diff. del 3.
24. del terzo.
5. diff. del 5.

COROLLARIO.

E manifesto anchora che come il settore al settore, così è l'angolo all'angolo. 11. del quinto.

IL FINE DEL SESTO LIBRO.