



# La Legge di Titius-Bode: applicazioni in una seconda classe del Liceo Matematico

**Giuseppe R. Casale, Davide Passaro (Liceo Bertrand Russell - Roma)**  
con la collaborazione del Dip. di Matematica Università di Tor Vergata - Roma

Dall'a.s. 2017-2018 è attivo nel Liceo Bertrand Russell di Roma il percorso di Liceo Scientifico Matematico (LSM). Il progetto è stato avviato da alcuni docenti di matematica e fisica della scuola a partire dall'a.s. 2015-2016 sotto la supervisione dei referenti del Dipartimento di Matematica dell'Università di Roma Tor Vergata ed è stato presentato durante gli Open Day del Liceo Russell durante l'a.s. 2016-2017 come percorso dell'indirizzo scientifico per la formazione di una classe. Il lavoro qui presentato è stato svolto nella classe seconda dell'a.s. 2018-2019.

Il LSM nel Liceo Russell è articolato in **2 ore aggiuntive a settimana nel biennio in orario curricolare**. La progettazione dei moduli e dei relativi laboratori è stata realizzata anche attraverso attività organizzate dal Dipartimento di Matematica di Roma Tor Vergata, i cui docenti hanno tenuto alcune ore di lezione a scuola. Le due ore aggiuntive nella classe seconda per l'a.s. 2018-2019 sono state **suddivise tra matematica e fisica**, insegnate da due docenti differenti, autori del poster. Nell'ambito delle ore di fisica, durante lo studio del moto circolare uniforme, è stato riservato pò di tempo alle applicazioni astronomiche. Alcuni studenti della classe hanno anche seguito a scuola un corso extra-curricolare sui fondamenti dell'astronomia, con lezioni frontali ed attività al telescopio. Il materiale presentato nel poster è frutto del lavoro di approfondimento di questi alunni.

Esiste in astronomia una «legge empirica» che lega la distanza dal Sole degli oggetti in rivoluzione intorno ad esso, i cui limiti di applicabilità sono stati compresi da tempo. Eppure questa legge ha funzionato egregiamente in passato e sembra funzionare in parte anche oggi quando applicata agli esopianeti, per ragioni non del tutto chiare. Si tratta della legge di Titius-Bode, dai nomi del matematico, fisico e astronomo tedesco Johann Daniel Tietz, latinizzato Titius (1729-1796) e dell'astronomo anch'esso tedesco Johann Elert Bode (1747-1826). La legge dice che le distanze medie dal Sole ( $d_{T-B}$ ) dei principali oggetti del sistema solare (in unità astronomiche UA, in cui 1 UA è pari a 150 milioni di chilometri, ovvero la distanza media Terra-Sole) si trovano sommando il numero 4 a ciascuno dei termini (n) della progressione geometrica 0, 3, 6, 12, 24, 48, 96, 192, 384 e 768 (ragione 2) e dividendo per 10:  $d_{T-B}=(n+4)/10$ .

La formula fornisce il valore 1 per la Terra (terzo pianeta del sistema solare, quindi  $n=6$  nella Tab.1). Differisce dai dati al massimo per il 5% circa (in valore assoluto) fino ad Urano ma fallisce per Nettuno e Plutone, per cui ha perso di affidabilità per gli astronomi del XX secolo. **Anche con l'aiuto della formula sono stati però scoperti Cerere (1801) e Urano (1781).**

Tab.1 Principali oggetti del sistema solare identificati con la legge di Titius-Bode. La terza e quarta colonna rappresentano la distanza stimata dalla legge ( $d_{T-B}$ ) e quella media misurata ( $d_m$ ). Gli oggetti indicati con \* sono stati individuati dopo la formulazione della legge

Pianeta	n	$d_{T-B}$ (UA)	$d_m$ (UA)
Mercurio	0	0.4	0.39
Venere	3	0.7	0.72
Terra	6	1.0	1.00
Marte	12	1.6	1.56
Cerere*	24	2.8	2.77
Giove	48	5.2	5.21
Saturno	96	10.0	9.54
Urano*	192	19.6	19.18
Nettuno*	384	38.8	30.06
Plutone*	768	77.2	39.44

Applicata la legge al Sistema Solare, mediante un semplice foglio di calcolo, gli studenti hanno iniziato a cercare altri sistemi con cui cimentarsi. Un caso interessante è rappresentato dalle lune di Giove: il pianeta gigante gassoso ne possiede 53 confermate e 26 in attesa di conferma ma le 4 principali (**Io, Europa, Ganimede e Callisto**) sono ben note (Tab.2). Da notare che in tabella è riportato sulla quarta colonna il valore del semiasse maggiore dell'orbita ( $d_{max}$ ). In questo caso la differenza maggiore in valore assoluto  $d_{T-B}-d_{max}$  è circa l'11%.

Tab.2 Le 4 lune maggiori di Giove (satelliti medicei) e la legge di Titius-Bode: i simboli sono gli stessi della Tab.1 tranne che per la quarta colonna (semiasse maggiore dell'orbita); le distanze sono normalizzate alla terza luna (Ganimede)

Satellite	n	$d_{T-B}$ (UA)	$d_{max}$ (UA)
Io	0	0.4	0.39
Europa	3	0.7	0.63
Ganimede	6	1.0	1.00
Callisto	12	1.6	1.75

Alcuni oggi ritengono che la legge di Titius-Bode esprima una proprietà indicata come **risonanza orbitale**, che costringe gli oggetti in moto di rivoluzione attorno ad una stella o un pianeta a collocarsi in alcune posizioni definite per non essere espulsi dal sistema. Gli studenti hanno provato a vedere come funziona la legge nel caso di numerosi **esopianeti di recente individuazione**, tra cui **Trappist-1**, con 7 pianeti in rotazione intorno ad una nana rossa centrale.

Tab.3: I 7 pianeti del sistema Trappist-1 nella costellazione dell'Acquario e la legge di Titius-Bode: i simboli sono gli stessi della Tab.2; le distanze sono normalizzate al terzo pianeta d

Pianeta	n	$d_{T-B}$ (UA)	$d_{max}$ (UA)
b	0	0,40	0,55
c	3	0,70	0,72
d	6	1,00	1,00
e	12	1,60	1,32
f	24	2,80	1,78
g	48	5,20	2,14
h	96	10,00	2,82

Il lavoro svolto con la seconda classe del Liceo Matematico evidenzia come una semplice ed elegante relazione matematica possa servire a stimolare la riflessione sulla difficoltà di descrivere adeguatamente la natura. E' apparso chiaro agli studenti, infatti, che la «legge» di Titius-Bode, calibrata per via empirica sul sistema solare, funziona discretamente al di fuori di esso al massimo fino al quarto oggetto in moto di rivoluzione (e ciò è comunque sorprendente!) ma probabilmente non merita lo status di legge. Sono infatti altri i fattori che entrano in gioco e che la relazione stessa non coglie, tra cui l'ellitticità delle orbite. Alcuni studenti, dopo aver compreso la necessità di normalizzare le distanze ad uno dei pianeti, si sono cimentati anche con tentativi di ampliamento e generalizzazione, sperimentando di persona le difficoltà del processo induttivo coinvolto.

[1] BANFI V., Sulle leggi empiriche della distribuzione delle distanze medie planetarie, *Giornale di Astronomia* 20, 4 (1994)  
[2] GARNER F. - BUBRULLE B., Titius-Bode laws in the Solar System, *Astron. Astrophys.* 282, 262 (1994)  
[3] [https://it.wikipedia.org/wiki/Legge\\_di\\_Titius-Bode](https://it.wikipedia.org/wiki/Legge_di_Titius-Bode)