Il calcolo della radice quadrata di un numero razionale.

L'area di un quadrato non è sempre espressa da un numero naturale; si potrebbe infatti avere a che fare con un quadrato di area 1,47 per esempio. Ora è noto che il suo lato sarà dato da un numero non razionale, ma come determinarlo? Una via breve è data dall'utilizzo dell'algoritmo di Erone considerando un rettangolo di area 1,47 costituito da un lato da 1 e l'altro da 1,47. Tuttavia, qui di seguito, si vuole lavorare su l'algebra dei radicali da un punto di vista geometrico perché si ritengano validi i seguenti motivi:

1) tali argomenti e i relativi esercizi rafforzano il concetto di radice quadrata $\sqrt{a}$ considerata come il lato di un quadrato di area a, molto di più a nostro avviso, di molteplici espressioni puramente numeriche;

2) è propedeutica alla trattazione più generale che s'incontrerà nelle scuole superiori;

3) se è stata costruita la spirale pitagorica che fornisca un certo numero di radici quadrate, la legge che verrà scoperta sempre geometricamente qui di seguito, $\sqrt{n^2a} = n\sqrt{a}$, permetterà di determinare le radici quadrate di particolari numeri grandi;

4) la proprietà $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$ permetterà di risolvere la questione posta inizialmente.

Premessa. E' necessario ricordare che 4 è 2^2, 9 è 3^2, 25 è 5^2, 169 è 13^2 e così via. E' importante memorizzare i primi numeri quadrati e disporre di una tavola con la quale addestrare a queste diverse rappresentazioni di uno stesso numero. Se la tavola è un grande manifesto appeso al muro della classe, questo esercizio, che potrebbe anche essere considerato propedeutico allo studio delle potenze e delle loro proprietà, renderà il tutto più semplice.

Le successive attività verranno introdotte frontalmente dal seguente argomento:

1

questo quadrato ha area 1, il suo lato è $\sqrt{1}$.

1	1
1	1

Questo quadrato ha area 4, il suo lato può essere espresso in un primo modo cioè $\sqrt{4}$ e in un secondo modo, 1 + 1 = 2, cioè come somma dei lati dei quadrati unitari. Quindi $\sqrt{4} = 1 + 1 = 2$.

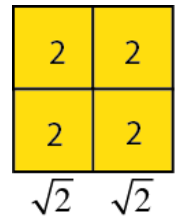
1	1	1
1	1	1
1	1	1

Questo quadrato ha area 9, il suo lato può essere espresso in un primo modo cioè $\sqrt{9}$ e in un secondo modo, 1 + 1 + 1 = 3, cioè come somma dei lati dei quadrati unitari. Quindi $\sqrt{9} = 1 + 1 + 1 = 3$.

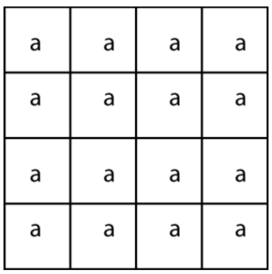
1	1	1	1
1	1	1	1
1	1	1	1
1	1	1	1

Questo quadrato ha area 16, il suo lato può essere espresso in un primo modo cioè $\sqrt{16}$ e in un secondo modo, 1 + 1 + 1 + 1 = 4, cioè come somma dei lati dei quadrati unitari. In definitiva $\sqrt{16} = 1 + 1 + 1 + 1 = 4$.

In sostanza si è voluto evidenziare che il lato di un quadrato, costituito da somme di quadrati più piccoli (in questo caso unitari), può essere ottenuto come radice quadrata della sua area ma anche come somma dei lati dei quadrati che lo compongono. Nella Tavola 4 lo studente è chiamato a ripetere lo stesso iter precedente nel quale però il quadrato piccolo ha area 2, mentre nella Tavola 5, per un lavoro dello stesso tipo, sarà lo stesso studente a scegliere l'area del quadratino più piccolo. In ogni caso verrà sempre richiesto di esprimere il lato del quadrato in due modi: questo confronto sarà utile, come si vedrà, per scoprire proprietà sull'algebra delle radici quadrate. Per esempio nella Tavola 4, si scoprirà ad un certo punto che un quadrato di area 8, è costituito da 4 quadrati di area 2 e che disposti come in figura, faranno immediatamente capire che



$\sqrt{8} = \sqrt{2} + \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$.



Svolgendo la Tavola 6 si farà vedere che $\sqrt{4^2 a} = 4\sqrt{a}$. I 16 quadrati avranno area a e quindi lato $\sqrt{a}$. Il quadrato grande avrà lato 4 volte il lato del quadrato di area a cioè $4\sqrt{a}$, pertanto

$$\sqrt{4^2 a} = 4\sqrt{a} \ .$$

Per verificare se è stato ben compreso quanto appreso dalla precedente Tavola, proporre il seguente:

Esercizio. Quale figura dimostra che $\sqrt{100a} = 10\sqrt{a}$?

Quando saranno comprese le regole generali si potrà affermare che:

Proprietà 1. Per ogni naturale n si ha che: $\sqrt{n^2 a} = n\sqrt{a}$

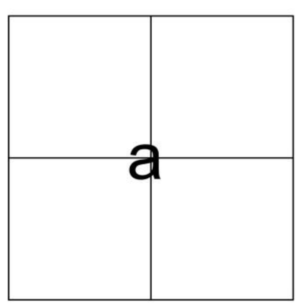
Utilizzando la grande spirale contenente le radici quadrate di più numeri, possiamo anche visualizzare particolari radici quadrate di numeri molto grandi:

Esercizio. Servendoti della grande spirale, risolvi: $\sqrt{200}, \sqrt{300}, \sqrt{1000}$.

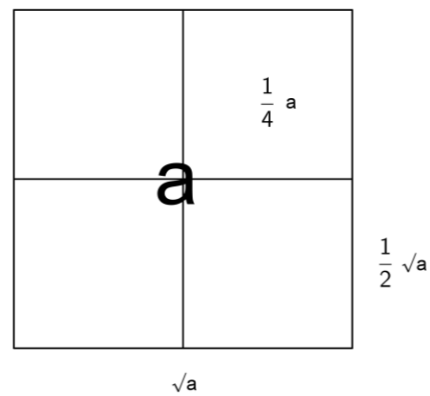
Infatti: $\sqrt{200} = 10\sqrt{2} = 14{,}14\ldots, \sqrt{300} = 10\sqrt{3} = 17{,}32\ldots, \sqrt{1000} = 10\sqrt{10} = 31{,}62\ldots$

Si farà svolgere la Tavola 7, attraverso la quale si imparerà a risolvere il seguente:

Esercizio. Il quadrato a lato, ha area a: verificare che $\sqrt{\frac{1}{4}a} = \frac{1}{2}\sqrt{a}$.

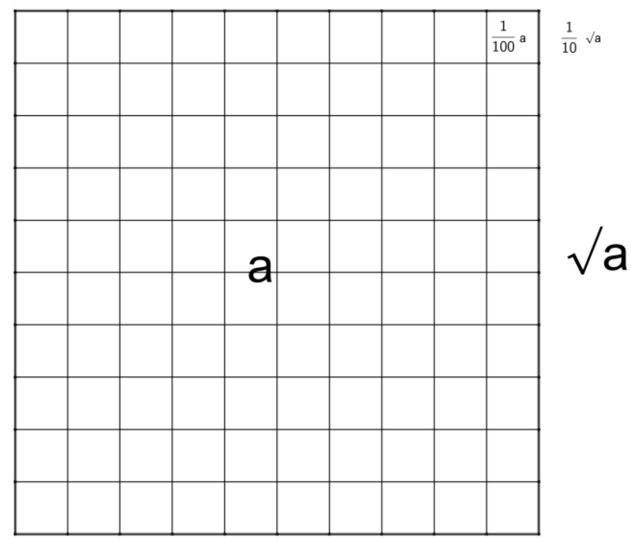


Il quadrato a avrà un lato $\sqrt{a}$, e la sua metà sarà $\frac{1}{2}\sqrt{a}$. Del resto questa metà è anche lato di uno dei quattro quadratini il cui lato è $\sqrt{\frac{1}{4}a}$.



Analogamente con considerazioni abbastanza simili si risolverà il seguente:

Esercizio. $\sqrt{\frac{1}{100}a} = \frac{1}{10}\sqrt{a}$.



La sua soluzione è evidente dalla figura a lato.
Quando saranno comprese le regole generali si potrà affermare che:

Proprietà 2.

Per ogni n naturale si ha che

$$\sqrt{\frac{1}{n^2}a} = \frac{1}{n}\sqrt{a}$$

Siamo in grado ora di rispondere alla domanda posta inizialmente.

Esempio. Calcolare $\sqrt{1{,}47}$ a meno di un decimo.

Poiché $\sqrt{1{,}47} = \sqrt{147:100}$, quindi rispetto alla notazione precedente si ha che a = 147 e n^2 = 100.

Allora per la Proprietà 2 la precedente espressione si può scrivere $\sqrt{147} : 10 \cong 12{,}1 : 10 = 1{,}2.$

Esempio. Calcolare $\sqrt{2,4}$ a meno di un centesimo.

Si ha che

$$\sqrt{2{,}4} = \sqrt{240 : 100} = \sqrt{240} : 10 \cong 15{,}4 : 10 = 1{,}54.$$

Esempio. Calcolare $\sqrt{0{,}04}$ a meno di un decimo.