Incommensurabilità: la radice quadrata

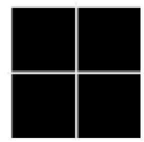
Con questa attività si vuole arrivare a far capire agli studenti che non esiste alcun numero razionale x tale che $x^2 = 2$. Questo fatto fu scoperto dai Pitagorici, pertanto l'attività vuole seguire i passi salienti del racconto presente in Punti Critici Anno II, n.3 oppure in http://www.mat.uniroma2.it/mep/Articoli/Pitag/Pitag.html.

Premesse

Considerato un qualunque segmento come **unità** di misura, il quadrato costruito su tale segmento sarà detto **quadrato unità** indicato con **q oppure con ■**.

Quale sarà il quadrato successivo costruibile a partire da ■?

Il quadrato successivo si ottiene "sommando" al precedente e in modo opportuno, 3 quadrati unità, per ottenere dunque un quadrato di **4 unità:** riprendendo una definizione dei Pitagorici, sarà chiamato **Primo Quadrato** e lo si indicherà con **Q** oppure con  . **Naturalmente questo quadrato avrà un lato costituito da 2 unità** (dunque un numero pari di unità)**.**

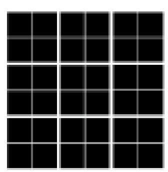


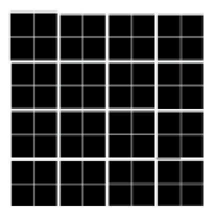
ATTIVITA': I primi quadrati

Si mettono a disposizione dello studente un certo numero di  e si pongono loro le seguenti domande:

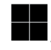
Usando solo primi quadrati, costruisci nuovi quadrati: riesci ad ottenere quadrati di lato un numero dispari di unità?

I ragazzi si dovrebbero accorgere che con tale quadrato si possono costruire solo quadrati aventi lato pari, cioè costituito da un numero pari di unità e analogamente costituito da un numero pari di ■ (che sono in un numero multiplo di 4).

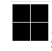


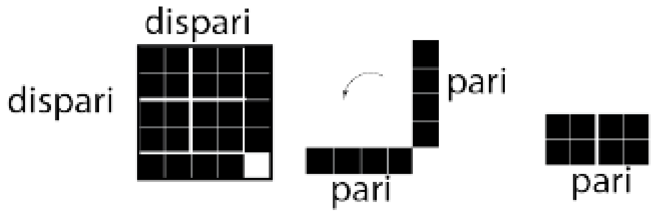


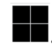
Da questa attività dovrebbe emergere che con  non è possibile costruire quadrati di lato dispari, ossia costituito da un numero dispari di unità. A conferma di questo fatto, si fornirà la Tavola 2 con disegni di quadrati vari aventi lato pari e dispari chiedendo:

1) Dividi questi quadrati mediante .

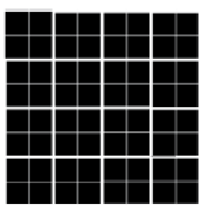
2) *Tale suddivisione è sempre "esatta"? Cioè, può capitare che ci siano ■ di resto*?

Si osserverà che può capitare che ci siano dei quadratini ■ di resto; questi a volte però potranno formare altri ;

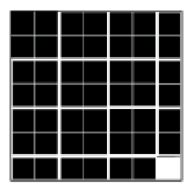


Ma non è sempre così: in particolar maniera ci si accorgerà che a volte si può avere un solo quadratino ■ di resto. I ragazzi debbono scoprire che ciò accade quando il lato del quadrato è dispari. Inoltre, debbono realizzare che i due unici casi possibili sono questi, cioè è **impossibile che dopo aver suddiviso il quadrato dato in** **, rimangano due o tre ■.**

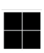
Premessa 1: Se un quadrato, diviso in  ha lato pari allora avrà zero resti ■, mentre se ha lato dispari avrà un solo resto ■.



Quadrato di lato pari
non ha resto



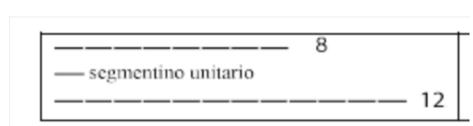
Quadrato di lato dispari
ha resto 1

Questa proprietà caratterizza i quadrati lato pari e dispari: infatti, se si ha un quadrato qualunque e comincio a dividerlo in  ottenendo zero resti ■, posso concludere che il suo lato sia pari? Facilmente si, perché se tale lato fosse dispari sappiamo che avrebbe dovuto lasciare un resto ■. Conclusione opposta, per i quadrati per i quali si ottiene un resto ■.

Far eseguire un certo numero di esercizi analoghi a quelli proposti nella Tavola 2.

Procediamo ora con l'approfondimento di un altro aspetto che abbia sempre il ruolo di premessa per arrivare a comprendere l'"incommensurabilità" della diagonale del quadrato. Di fatto è già un argomento noto ai ragazzi, che probabilmente è stato presentato loro in ambito aritmetico anche se, anche questo, potrebbe essere presentato prendendo spunto da aspetti geometrici: ci si sta riferendo al concetto di MCD tra due o più numeri.

Supponiamo di avere due segmenti che abbiano una certa lunghezza rispetto ad una determinata unità di misura, 8 e 12. Le domande sono queste

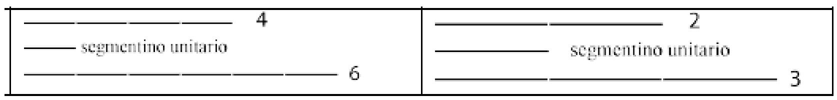


1) Dividi, se possibile, i due segmenti mediante altre unità;

Tra queste ci sono quelle che sono sottomultipli di quella data, attraverso le quali le lunghezze dei due segmenti saranno espresse da due numeri maggiori di 8 e 12; però ci sono anche quelle che sono multipli dell'unità data. Rispetto a queste, la lunghezza dei due segmenti è esprimibile con numeri più piccoli di 8 e 12.

2) Trova una unità comune ai due segmenti che permetta di scrivere la loro lunghezza con <u>*numeri più piccoli*</u>*.*

Queste le soluzioni:



Naturalmente si vuole arrivare a dire che qualora, dati due segmenti, si riesce a trovare un segmento divisore comune che sia il più grande possibile, allora si è trovato il segmento Massimo Comun Divisore tra i due segmenti.

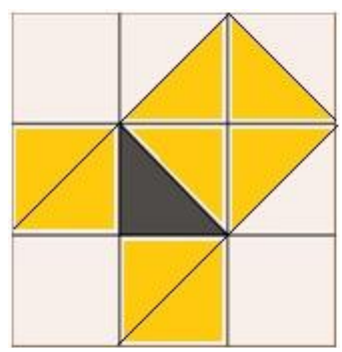
Uno dei due segmenti può essere espresso, rispetto al segmento MCD scelto come unità, di lunghezza dispari mentre l'altro di lunghezza pari. Sarà sempre così? Naturalmente no: se la lunghezza di due segmenti , rispetto ad un certo segmento unitario, è esprimibile rispettivamente mediante 10 e 14, mediante il segmento MCD scelto come unità, sarà espressa mediante 5 e 7, ossia due numeri dispari. **Deve essere ovvio a tutti invece, che non potranno mai essere espressi mediante due numeri pari, una volta divisi per il loro MCD**!

La precedente frase costituisce la **premessa 2.**

Anche in questo caso, far eseguire un certo numero di esercizi.

Incommensurabilità lato e diagonale del quadrato

Si riparte da un triangolo rettangolo isoscele qualsiasi (visibile anche come metà quadrato) e si evidenziano i quadrati rispettivamente su un suo cateto e sulla sua ipotenusa. Sappiamo che il quadrato costruito sull'ipotenusa (anche diagonale del quadrato iniziale) ha area doppia di quello sul cateto (lato del quadrato iniziale).



Si legge la storia dei pitagorici presente in Punti Critici Anno II - n.3 oppure in rete in http://www.mat.uniroma2.it/LMM/BCD/mep/Articoli/Pitag/Pitag.html e i particolar maniera il punto in cui Deonono chiede a Brontino "*Ma dimmi, pensi che esistano due numeri sui quali costruire tali quadrati?*

La domanda significa sostanzialmente **trovare una certa unità di misura mediante la quale esprimere la lunghezza di lato e diagonale del quadrato iniziale**. Questa domanda apparirà "strana" agli occhi degli studenti, non essendosi mai posti un problema del genere. Quindi sarà abbastanza normale che loro si aspettino che tale unità esista.

Una cosa è certa: le possibilità sono due e si escludono a vicenda (*principio di non contraddizione*).

1. esiste una unità comune a cateto o ipotenusa (lato e diagonale del quadrato);

2. non esiste una unità comune contemporaneamente a cateto e ipotenusa (lato e diagonale del quadrato).

Consegniamo quindi la **Tavola 3** e chiediamo ai ragazzi di rispondere alle domande presenti: se diamo per scontato che tale unità ci sia, rispetto a questa unità, è possibile che cateto ed ipotenusa sia esprimibili rispetto ad un numero pari o dispari di queste unità. Più specificatamente:

a) cateto e ipotenusa pari (lato pari, diagonale pari)

b) cateto e ipotenusa dispari (lato e diagonale dispari)

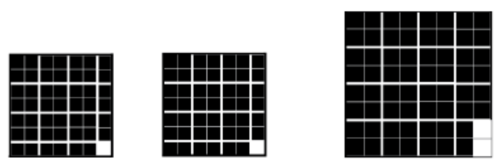
c) cateto dispari e ipotenusa pari (lato dispari, diagonale pari)

d) cateto pari, ipotenusa dispari (lato pari, diagonale dispari)

Perché il caso a) si può subito escludere?

Dovrebbe essere chiaro da quanto fatto in precedenze con i segmenti 8 e 12 che il caso a) è riconducibile agli altri casi.

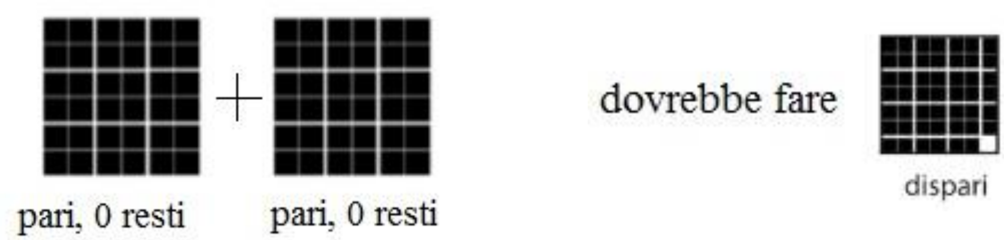
Casi b) e c)



dispari + dispari ???

Si ha una assurdità dovuta alla Premessa 1. Quindi i casi con il cateto dispari sono da escludersi immediatamente. Rimane un ultimo caso.

Caso d)



Ora i 4 casi sono tutti impossibili! Questo fatto dovrebbe un po' destabilizzare i ragazzi per i motivi già detti. Vistosi che il caso 1 è da escludersi in ogni sua possibilità, non rimane che il caso 2: non esiste un segmento unità con i quali lato e diagonale del quadrato possano essere espresse entrambe da una lunghezza data dal numero di volte che contengono quel segmento unità.

Bisogna infine anche **dedicare del tempo a "tradurre" questo linguaggio** in un forma presumibilmente più diffusa nella scuola: cioè in sostanza se il lato del quadrato lo indico con 1, non riesco ad indicare la sua diagonale con un altro numero fino ad ora conosciuto (ossia razionale). Pertanto, la lunghezza di tale diagonale, non sarà esprimibile né come un numero decimale finito, né periodico e né tantomeno con una frazione. Deve essere espressa da un altro tipo di numero che quindi non potrà essere interno, né avere un numero finito di cifre dopo la virgola, né tantomeno avere un numero infinito di cifre che si ripetono. **Rimane, come unica possibilità che abbia, dopo la virgola, infinite cifre diverse.**

Definizione. Il numero irrazionale x tale che $x^2 = 2$ s'indicherà con $x = \sqrt{2}$ e si leggerà *radice quadrata di 2*.

Pertanto $$x^2 = \left(\sqrt{2}\right)^2 = 2.$$

Ci si vuole assicurare che la procedura appena introdotta sia una vera e propria operazione. A tal proposito deve essere ben posta, nel senso che deve ammettere un unico risultato. Cioè deve essere vero che la radice quadrata di un numero non abbia più di un risultato. Per questo motivo **si limita il risultato ai soli valori positivi**. Questo vuol dire che $\sqrt{2}$ deve essere quel numero positivo che elevato alla seconda dia 2. E' vero anche che $\left(-\sqrt{2}\right)^2 = 2$, ma non viene preso in considerazione, se si vuole che l'operazione di estrazione di radice quadrata sia ben posta.

Riassumendo:

$$2 \xrightarrow{\text{Elevamento a potenza}} 2^2 \xrightarrow{\text{Estrazione di radice quadrata}} \sqrt{2^2} = 2$$

e viceversa

$$2 \xrightarrow{\text{Estrazione di radice quadrata}} \sqrt{2} \xrightarrow{\text{Elevamento al quadrato}} \left(\sqrt{2}\right)^2 = 2$$

Data $x^2 = 2$, **l'operazione** inversa che permetta di avere x, si chiama **estrazione di radice quadrata.** Pertanto avere 2 e trovare il numero irrazionale che al quadrato dia proprio 2, cioè $x = \sqrt{2}$, è una nuova operazione matematica inversa dell'elevamento alla potenza di due.

Più in generale data $x^2 = a$ con $(a \geq 0)$, l'operazione inversa che permetta di avere x dato un numero generico *a* si chiama **estrazione di radice quadrata;** analogamente, tale numero si indicherà con $x = \sqrt{a}$.