

## 2° GRUPPO

Il lavoro proposto dal secondo gruppo è risultato essere una buona sintesi degli argomenti introdotti nella presentazione precedente + spunti per introdurre:

- ✓ Significato dell'operatore logaritmo di un numero
- ✓ Sintesi per caratterizzare e rappresentare i numeri complessi

$\pi, i$  ed  $e$

In questa presentazione parleremo delle tre costanti matematiche  $\pi, i$  ed  $e$ . Questi tre valori analitici sono tra loro legati per mezzo di una formula che introdurremo successivamente.



Prof.ssa Franca Donato  
L.S. «Tullio Levi Civita»

# 2° GRUPPO

## $\pi$ , $i$ ed $e$

In questa presentazione parleremo delle tre costanti matematiche  $\pi$ ,  $i$  ed  $e$ .

Questi tre valori analitici sono tra loro legati per mezzo di una formula che infodurremo successivamente.



1

## L'esperimento di Archimede

Archimede notò che il perimetro del poligono inscritto alla circonferenza ( $p_1$ ) era minore alla circonferenza stessa ( $c$ ), la quale, a sua volta era minore del perimetro del poligono in cui era circoscritta ( $p_2$ ).

Inoltre capì che raddoppiando i lati sia di  $p_1$  che di  $p_2$  i poligoni si avvicinavano verso uno stesso valore. Aumento via via il numero di lati, da 6 lati per poligono fino ad arrivare a 96 lati, ottenendo per il perimetro interno un valore pari a 3.14084 e per quello esterno un valore di 3.142858.

Quindi arrivò alla conclusione che  $\pi$  è compreso tra questi due valori.



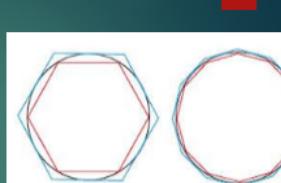
4

2

Inoltre capì che raddoppiando i lati sia di  $p_1$  che di  $p_2$  i poligoni si avvicinavano verso uno stesso valore.

Aumento via via il numero di lati, da 6 lati per poligono fino ad arrivare a 96 lati, ottenendo per il perimetro interno un valore pari a 3.14084 e per quello esterno un valore di 3.142858.

Quindi arrivò alla conclusione che  $\pi$  è compreso tra questi due valori



5

$$\pi = \frac{\text{area}}{r=1}$$

- Il pi greco è indicato con la lettera greca  $\pi$  (pi) viene visto come il rapporto tra la lunghezza di una circonferenza ed il suo diametro o anche come l'area di un cerchio di raggio 1.
- Il pi greco è detto anche costante di Archimede, numero di Ludolph o costante di Ludolph, esso è un numero composto da infinite cifre decimali.
- Il pi greco è un numero irrazionale quindi non può essere scritto come quoziente di due interi.
- È definito come numero trascendente, ciò fa sì che non vi siano polinomi con coefficienti razionali di cui  $\pi$  è radice, è altrettutto impossibile esprimerelo usando un numero finito di interi, di frazioni e di loro radici.

3

## storia del $\pi$

I primi a calcolare il  $\pi$  furono gli Egizi e i Babilonesi che si avvicinarono di molto al suo vero valore (3.160 e 3.120 rispettivamente).



Secoli dopo, Archimede riuscì a ottenere un valore molto più preciso (3.14).

3

## Il secondo esperimento

Il secondo esperimento che Archimede condusse consisteva nel prendere un sistema di riferimento (retta orientata) e la divise in unità pari al diametro di un ipotetico cerchio. Prese un punto di riferimento su di esso e notò che dopo una rotazione completa il diametro batteva sulla retta ad un valore di circa 3,14.



6

Prof.ssa Franca Donato  
L.S. «Tullio Levi Civita»

## 2° GRUPPO

### $i$ (unità immaginaria)

Il valore « $i$ » (unità immaginaria) rappresentata a volte dalla lettera greca iota permette di estendere il campo dei numeri reali al campo dei numeri complessi.  
Esso è caratterizzato dall'essere in numero il cui valore al quadrato è -1. La necessità di ampliare il campo dei numeri reali nasce dal fatto di non poter calcolare la radice quadrata di un numero negativo, e più in generale che non tutte le funzioni polinomiali  $f(x)=0$  hanno una soluzione nell'insieme dei numeri reali.



7

In particolare la funzione  $x^2+1=0$  che non ha soluzioni reali ha soluzione  $x=i$ .

$$\begin{aligned}x^2+1 &= 0 \\x^2 &= -1 \\X &= \sqrt{-1} \\X &= i\end{aligned}$$

$i$  è utilizzata in generale per dimostrare operazioni come le radici di numeri negativi che non hanno soluzioni tra i numeri reali.

$$\text{Es. } \sqrt{-4}=2i$$

La definizione del numero di Nepero può avvenire in vari modi, ad esempio con le formule:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \quad \text{oppure} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

10

8

### Identità di Eulero

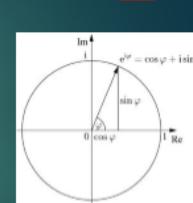
L'identità di Eulero, pubblicata per la prima volta nella sua *Introduzione* (1748), mette in relazione queste tre costanti:  $\pi$ ,  $i$ ,  $e$  attraverso la formula  $e^{i\pi}+1=0$  cioè  $e^{i\pi}=-1$

Essa equivale a  $e^{i\pi} = \cos \pi + i \sin \pi$

$$\cos \pi = -1$$

$$\sin \pi = 0$$

Ciò equivale a  $e^{i\pi} = -1 + 0$



11

### $e$ (numero di Nepero o di Eulero)

La terza costante di cui vi parleremo è « $e$ ». È un numero irrazionale e trascendente, viene chiamato nell'ambito internazionale numero di Eulero ma in Italia è anche detto numero di Nepero. È la costante alla base della funzione esponenziale  $e^x$  e del logaritmo naturale insieme al pi greco è una delle costanti matematiche più importanti per via della sua presenza in molte formule apparentemente non correlate.



$e=2.71828\dots$

9

Prof.ssa Franca Donato  
L.S. «Tullio Levi Civita»

## 2° GRUPPO numero $\pi$

- Caratteristiche fisiche del numero
- Varie definizioni di  $\pi$

### storia del $\pi$

I primi a calcolare il  $\pi$  furono gli Egizi e i Babilonesi che si avvicinarono di molto al suo vero valore (3.160 e 3.120 rispettivamente).



Secoli dopo, Archimede riuscì a ottenere un valore molto più preciso (3.14).



- Problema della sua determinazione

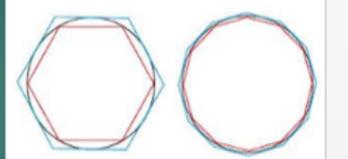
### L'esperimento di Archimede

Archimede notò che il perimetro del poligono inscritto alla circonferenza ( $p_1$ ) era minore alla circonferenza stessa ( $c$ ), la quale, a sua volta era minore del perimetro del poligono in cui era circoscritta ( $p_2$ ). Inoltre capì che raddoppiando i lati sia di  $p_1$  che di  $p_2$  i poligoni si avvicinavano verso uno stesso valore. Aumento via via il numero di lati, da 6 lati per poligono fino ad arrivare a 96 lati, ottenendo per il perimetro interno un valore pari a 3.14084 e per quello esterno un valore di 3.142858. Quindi arrivò alla conclusione che  $\pi$  è compreso tra questi due valori.



3,140 <  $\pi$  < 3,142

Inoltre capì che raddoppiando i lati sia di  $p_1$  che di  $p_2$  i poligoni si avvicinavano verso uno stesso valore. Aumento via via il numero di lati, da 6 lati per poligono fino ad arrivare a 96 lati, ottenendo per il perimetro interno un valore pari a 3.14084 e per quello esterno un valore di 3.142858. Quindi arrivò alla conclusione che  $\pi$  è compreso tra questi due valori



Prof.ssa Franca Donato  
L.S. «Tullio Levi Civita»

## 2° GRUPPO

- Caratteristiche del numero  $i$

### $i$ (unità immaginaria)

Il valore « $i$ » (unità immaginaria) rappresentata a volte dalla lettera greca iota permette di estendere il campo dei numeri reali al campo dei numeri complessi.  
Esso è caratterizzato dall'essere in numero il cui valore al quadrato è -1. La necessità di ampliare il campo dei numeri reali nasce dal fatto di non poter calcolare la radice quadrata di un numero negativo, e più in generale che non tutte le funzioni polinomiali  $f(x)=0$  hanno una soluzione nell'insieme dei numeri reali.



- Necessità dell'introduzione

in particolare la funzione  $x^2+1=0$  che non ha soluzioni reali ha soluzione  $x=i$ .

$$\begin{aligned}x^2+1 &= 0 \\x^2 &= -1 \\x &= \sqrt{-1} \\x &= i\end{aligned}$$

$i$  è utilizzata in generale per dimostrare operatori come le radici di numeri negativi che non hanno soluzioni tra i numeri reali.

$$\text{Es. } \sqrt{-4} = 2i$$

Prof.ssa Franca Donato  
L.S. «Tullio Levi Civita»

## 2° GRUPPO

- Caratteristiche del numero  $e$

- Modi diversi per definire  $e$

$e$ (numero di Nepero o di Eulero)

La terza costante di cui vi parleremo è «  $e$  ».

è un numero irrazionale e trascendente, viene chiamato nell'ambito internazionale numero di Eulero ma in Italia è anche detto numero di Nepero.

È la costante alla base della funzione esponenziale  $e^x$  e del logaritmo naturale insieme al pi greco è una delle costanti matematiche più importanti per via della sua presenza in molte formule apparentemente non correlate.

$e$

$e=2.71828\dots$

La definizione del numero di Nepero può avvenire in vari modi, ad esempio con le formule:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \quad \text{oppure} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Questo è stato lo spunto per introdurre e discutere sul significato del logaritmo di un numero

Prof.ssa Franca Donato  
L.S. «Tullio Levi Civita»

## • Identità di Eulero

### Identità di Eulero

L'identità di Eulero, pubblicata per la prima volta nella sua *Introduzione* (1748), mette in relazione queste tre costanti:  $\pi$ ,  $i$ ,  $e$  attraverso la formula  $e^{i\pi} + 1 = 0$  cioè  $e^{i\pi} = -1$

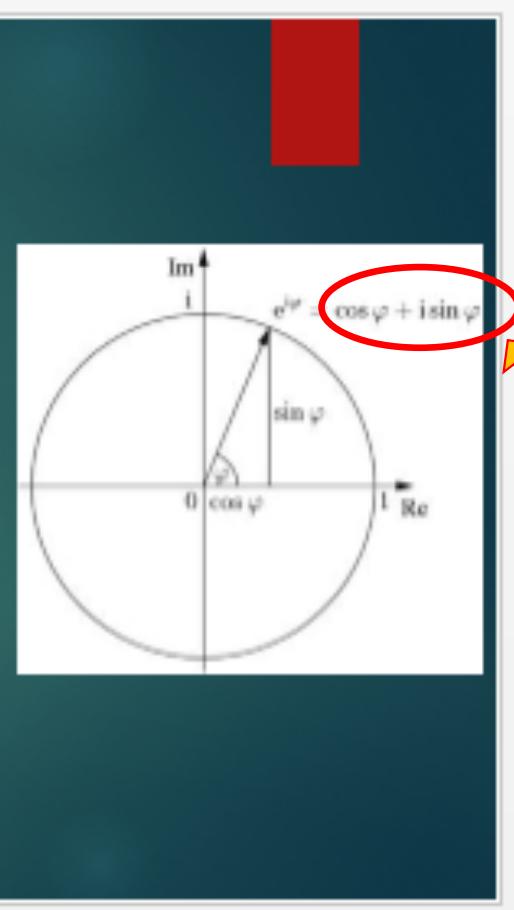
Essa equivale a  $e^{i\pi} = \cos \pi + i \sin \pi$

$$\cos \pi = -1$$

$$\sin \pi = 0$$

Ciò equivale a  $e^{i\pi} = -1 + 0$

$$e^{i\pi} = -1$$



La rappresentazione di un numero complesso che ha modulo 1: forma trigonometrica.

## Spunto di discussione

La rappresentazione geometrica dei numeri complessi ci offre l'occasione di riflettere:

- ✓ l'insieme dei numeri reali, è rappresentabile su una retta orientata
- ✓ l'insieme dei numeri complessi, è rappresentabile su un piano (piano di Gauss)

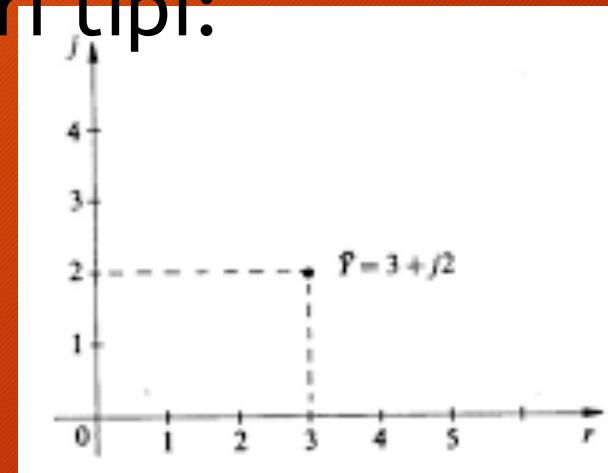
- è un insieme ordinato, nel senso che in esso è possibile definire le relazioni di “essere maggiore” e di “essere minore”
- è un insieme ordinato? In esso è possibile definire le relazioni di “essere maggiore” e di “essere minore”?

Prof.ssa Franca Donato  
L.S. «Tullio Levi Civita»

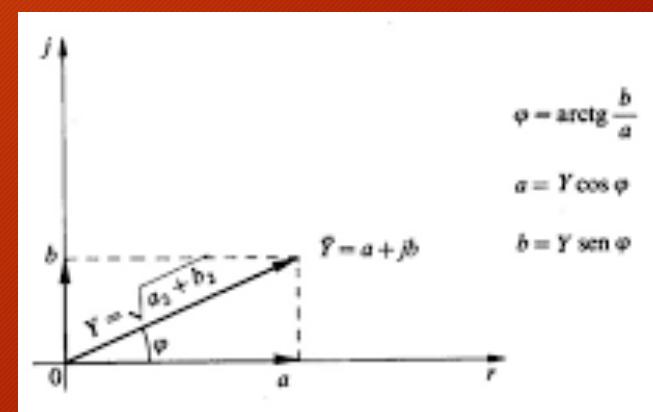
## Spunto di discussione

La rappresentazione dei numeri complessi nel piano di Gauss può essere di vari tipi:

- ✓ Un numero complesso qualunque  $z=a+ib$  può essere rappresentato da un punto P (l'ascissa è la  $a$  e l'ordinata  $b$  è il coefficiente della parte immaginaria)



- ✓ Un numero complesso qualunque  $z$  può essere rappresentato da un vettore (un modulo e una direzione)



# Spunto di discussione

## La rappresentazione analitica dei numeri complessi può essere di vari tipi

- ✓ Un numero complesso qualunque  $z$  può essere scritto in forma algebrica



$$z = a + i b$$

- ✓ Un numero complesso  $z$  (con modulo unitario) può essere scritto in forma trigonometrica



$$z = \cos\varphi + i \sin\varphi$$

- ✓ l'insieme dei numeri complessi, può essere scritto in una terza modalità utile per operare con i complessi (non abbiamo i mezzi matematici per dimostrare)



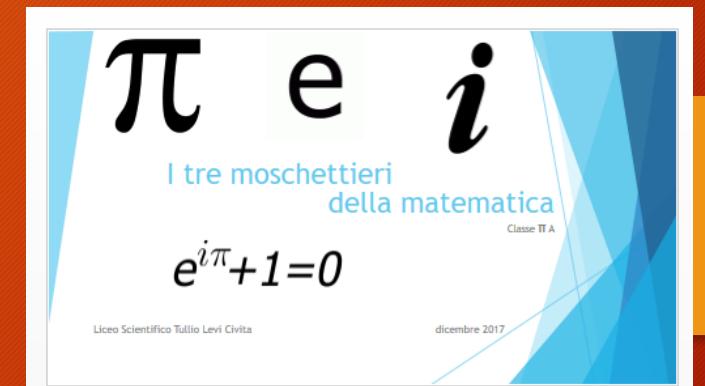
$$e^{i\vartheta} = \cos\varphi + i \sin\varphi$$

Prof.ssa Franca Donato  
L.S. «Tullio Levi Civita»

## 3° GRUPPO

Il lavoro proposto dal terzo gruppo è risultato essere interessante in quanto contiene:

- ✓ Proposta e realizzazione di una “**attività laboratoriale**” per verificare l’idea di Archimede per determinare approssimazione di  $\pi$
  
- ✓ Proprietà ciclica dell’unità immaginaria



Prof.ssa Franca Donato  
L.S. «Tullio Levi Civita»

# 3° GRUPPO

**I tre moschettieri della matematica**

$e^{i\pi} + 1 = 0$

Liceo Scientifico Tullio Levi Civita

dicembre 2017

Classe II A

1

## Indice

- ▶ Introduzione Storica
- ▶ Le osservazioni di Archimede
- ▶ Introduzione al numero di Nepero
- ▶ L'unità immaginaria
- ▶ La sintesi di Eulero

2

## PI GRECO ( $\pi$ )

▶ DEFINIZIONE: costante matematica definita come rapporto tra una circonferenza ed il suo diametro oppure l'area di un cerchio di raggio 1. Indipendente da misure di carattere fisico, è un numero irrazionale cioè decimale illimitato non periodico.

▶ Ha il valore di circa 3,1415926535898

A diagram of a circle centered at O. The radius OB is labeled  $r=1$ . The diameter AB is shown. The area of the circle is shaded in blue.

3

## STORIA DI $\pi$

Il numero è stato scoperto da Archimede di Siracusa, ma era già stato calcolato dai babilonesi e dagli egiziani, per i quali era rispettivamente 3,125 e 3,160. Archimede l'ha scoperto senza trigonometria, decimali, notazione posizionale e numeri arabi, anticipando il calcolo differenziale ed intuendo che si potevano costruire buone approssimazioni di  $\pi$  con il livello di approssimazione adeguato.

Reperto babilonese

Reperto egizio

4

## ARCHIMEDE

Archimede di Siracusa è nato nel 287 a.C. a Siracusa è stato un matematico, fisico e inventore. È considerato uno dei più grandi scienziati e matematici della storia in quanto ha studiato il galleggiamento dei corpi, la sfera e le leve.

▶ Ha studiato anche il  $\pi$  utilizzando la circonferenza inscritta e circoscritta ad un poligono trovando delle approssimazioni di questo che furono circa 3,1429 e circa 3,1408.

A portrait of Archimedes and a bust of him. Below are diagrams showing a circle with an inscribed hexagon and a circumscribed hexagon, illustrating his method for approximating pi.

5

## OSSERVAZIONE DI ARCHIMEDE

Archimede notò anche che un poligono costruito intorno ad una circonferenza ha un perimetro più grande della circonferenza stessa e che aumentando il numero di lati di questo poligono il suo perimetro si avvicinava di più a quello della circonferenza. Quindi questa poteva essere vista come un poligono di infiniti lati

Two diagrams showing a circle with an inscribed polygon (hexagon) and a circumscribed polygon (hexagon). The inscribed polygon is labeled with vertices a, b, c, d, e, f and sides a'b', b'c', c'd', d'e', e'f', f'a'. The circumscribed polygon is labeled with vertices a, b, c, d, e, f and sides ab, bc, cd, de, ef, fa. Diameters are also shown.

6

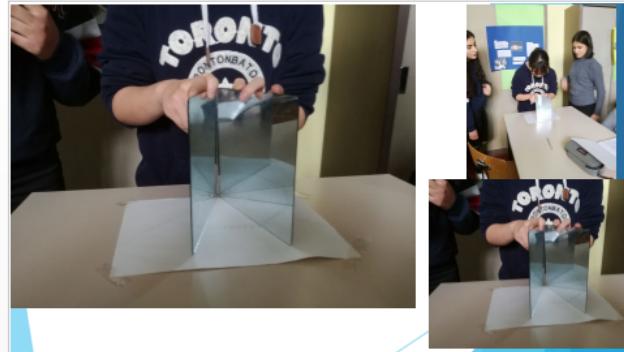
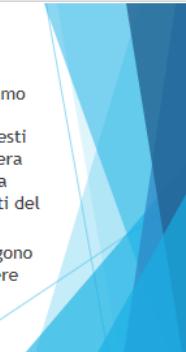
Prof.ssa Franca Donato  
L.S. «Tullio Levi Civita»

# 3° GRUPPO

## ESPERIMENTO

- ▶ Per verificare l'osservazione di Archimede abbiamo costruito un apparato formato da due specchi rettangolari che avevano un lato in comune. Questi specchi erano posizionati su un foglio sul quale era disegnato un triangolo equilatero inscritto in una circonferenza. Gli specchi coincidevano con i lati del triangolo.
- ▶ Stringendo gli specchi il numero di lati del poligono aumentava e la circonferenza andava a coincidere sempre di più con il poligono.

7



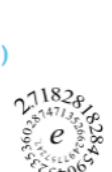
8

## COSTANTE DI NEPERO (e)

Il numero  $e$  è una costante matematica e un numero irrazionale, cioè illimitato non periodico, e trascendente, cioè non è soluzione di nessuna equazione polinomiale.



Merchiston Castle, 1550  
- Edimburgo, 4 aprile  
1617



Il numero di Nepero è detto anche numero di Euler perché è stato scoperto da quest'ultimo ma in Italia è chiamato numero di Nepero in onore del "matematico" Nepero che ha lavorato per vari anni ai logaritmi. Il numero ha un valore circa di 2,71828...

10

## COME SI DEFINISCE:

Questo numero o, per meglio dire, costante si può definire in due modi:

- ▶ Come valore del limite:

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

11

## EULERO

Euler è stato un matematico e fisico svizzero. È considerato il più importante matematico dell'Illuminismo ed è noto per essere tra i più prolifici di tutti i tempi e ha fornito contributi storicamente cruciali in svariate aree: analisi infinitesimale, funzioni speciali, meccanica razionale, meccanica celeste, teoria dei numeri, teoria dei grafi.

Buona parte della simbologia matematica tuttora in uso venne introdotta da Euler, per esempio  $i$  per l'unità immaginaria,  $\Sigma$  come simbolo per la sommatoria,  $f(x)$  per indicare una funzione e la lettera  $\pi$  per indicare pi greco e definì anche la costante matematica  $e$ .



Basilea, 1707 -  
San Pietroburgo,  
1783

★

9

## COME SI DEFINISCE:

- ▶ Come la sommatoria:

$$e := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots$$

12

Prof.ssa Franca Donato  
L.S. «Tullio Levi Civita»

# 3 ° GRUPPO

## STORIA DI $e$

Fu Eulero, nel 1750, a dimostrare che la successione  $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$  all'infinito tende al numero di Nepero. Ne calcolò le prime 18 cifre e lo chiamò  $e$ : un numero irrazionale che non ha un'interpretazione geometrica, al contrario di  $\pi$ . Si sostiene che  $e$  fu usata dai greci per il Partenone e dagli Egizi per la grande piramide perché in queste strutture si trovano due valori tipici il cui rapporto tende ad  $e$ .



Partenone



Grande piramide

13

## SIMBOLO $e$

Probabilmente la lettera  $e$  fu scelta perché iniziale della lettera "esponenziale" oppure perché era la prima lettera dell'alfabeto latino non ancora utilizzata ma è da escludere la possibilità che si chiami in questo modo a causa di Eulero.



14

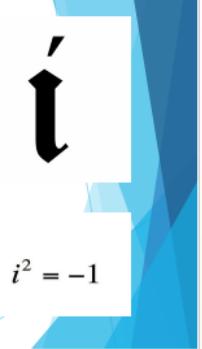
## UNITÀ IMMAGINARIA ( $i$ )

L'unità immaginaria o numero  $i$  può essere definita come il numero che elevato al quadrato da come risultato -1 e come soluzione dell'equazione:

$$x^2 + 1 = 0$$

Il numero  $i$  permette di estendere al campo dei numeri complessi.

I numeri complessi sono dei numeri che hanno sia la parte reale sia la parte immaginaria come ad esempio  $3+5i$ .



$$i^2 = -1$$

15

## STORIA DI $i$

Il numero  $i$  fa la sua prima apparizione nel XVI secolo nelle formule risolutive di equazioni di 3° e 4° grado.

Non erano però considerati veri e propri numeri, poiché non potevano essere rappresentati sulla retta dei numeri reali pertanto si introdusse l'asse degli immaginari e in seguito il piano dei numeri complessi costituiti da una parte reale e da una parte immaginaria.

Furono accettati come numeri solo nel XVIII secolo, grazie al tedesco Gauss. Oggi i numeri complessi sono molto utilizzati



$$i = \sqrt{-1}$$

16

## NUMERI IMMAGINARI E NUMERI COMPLESSI

Immaginiamo di dover determinare la radice di -4.

Sappiamo, per le proprietà delle radici, che la radice quadrata di un prodotto è uguale al prodotto delle radici quadrate. Quindi  $\sqrt{-4}$  è uguale alla radice di 4 per la radice di -1, cioè  $2i$ .

$2i$  è un numero immaginario. È possibile operare con i numeri immaginari: se sommassi un numero immaginario ad un numero reale (per esempio  $2i + 3$ ) otterrei un numero complesso. Si può operare con i numeri complessi tenendo conto delle regole del calcolo letterale.

$$\sqrt{-4} = \sqrt{4} \times \sqrt{-1} = 2i$$

17

## PROPRIETÀ DI $i$

Il numero  $i$  è il ciclico di ordine 4 rispetto alla moltiplicazione cioè si ripete con periodo 4 dopo un certo numero di passaggi

$$\begin{aligned} i &= \sqrt{-1} \\ i^2 &= i \times i = \sqrt{-1} \times \sqrt{-1} = -1 \\ i^3 &= i^2 \times i = -1 \times i = -i \\ i^4 &= i^2 \times i^2 = (-1) \times (-1) = 1 \\ i^5 &= i^4 \times i = i \\ i^6 &= i^5 \times i = i^2 = -1 \\ i^7 &= (-1) \times i = -i \\ i^8 &= i^4 \times i = 1 \\ i^9 &= i \end{aligned}$$

18

Prof.ssa Franca Donato  
L.S. «Tullio Levi Civita»

# 3° GRUPPO

## LA SINTESI DI EULERO

La seguente formula, definita da molti come «la più bella della matematica», riunisce tutti e tre i “moschettieri”

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$



# ATTIVITA' LABORATORIALE

**SCOPO-** l'attività si propone di visualizzare l'idea di Archimede: all'aumentare dei lati di un poligono regolare circoscritto ad un circonferenza esso tenderà a coincidere con la circonferenza.

**MATERIALI-** 2specchi piani rettangolari; Foglio di carta

**PROCEDURA-** Sul foglio di carta, si disegna una grande circonferenza (la misura del raggio non deve superare la misura del lato dello specchio) con all'interno un triangolo equilatero.

I due specchi vengono posizionati perpendicolari al foglio poggiato sul tavolo, in modo da formare un angolo. Essi vengono posti con i lati di base coincidenti con i lati del triangolo inscritto.

Se si guarda l'immagine riflessa negli specchi si individua un poligono regolare circoscritto alla circonferenza

- ✓ Conta i lati del poligono circoscritto che vedi riflesso negli specchi
- ✓ Cosa succede se l'angolo tra gli specchi diminuisce?

Prof.ssa Franca Donato  
L.S. «Tullio Levi Civita»

# ATTIVITA' LABORATORIALE

SCOPO- l'attività si propone di visualizzare l'idea di Archimede: all'aumentare dei lati di un poligono regolare circoscritto ad un circonferenza esso tenderà a coincidere con la circonferenza.

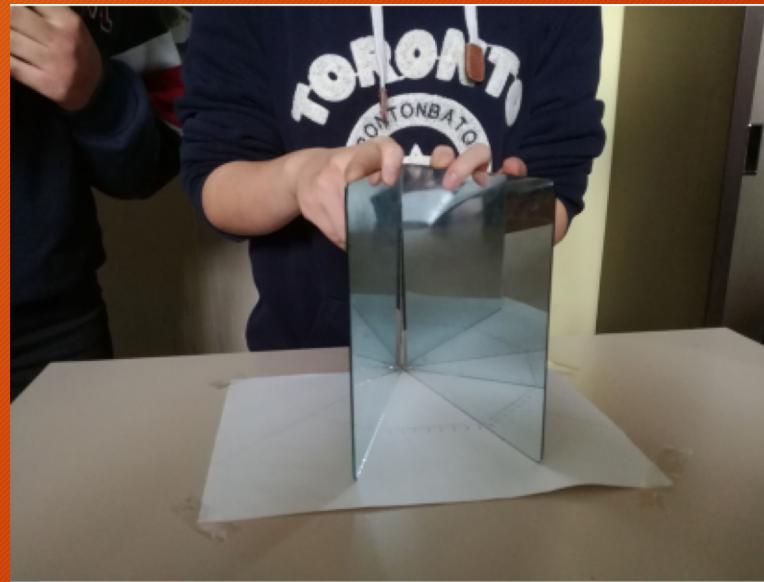
MATERIALI-2specchi piani rettangolari  
Foglio di carta

PROCEDURA- Sul foglio di carta, si disegna una grande circonferenza (la misura del raggio non deve superare la misura del lato dello specchio) con all'interno un triangolo equilatero.

I due specchi vengono posizionati perpendicolari al foglio poggiato sul tavolo, in modo da formare un angolo. Essi vengono posti con i lati di base coincidenti con i lati del triangolo inscritto. Se si guarda l'immagine riflessa negli specchi si individua un poligono regolare circoscritto alla circonferenza

Conta i lati del poligono circoscritto che vedi riflesso negli specchi

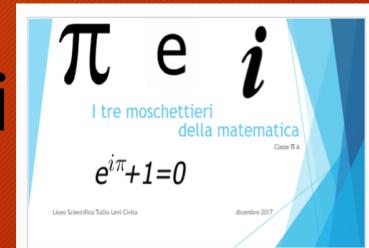
## 3° GRUPPO



OSSERVAZIONE: Stringendo gli specchi il numero di lati del poligono aumenta e il poligono tende a coincidere sempre di più con circonferenza.

Prof.ssa Franca Donato  
L.S. «Tullio Levi Civita»

## 3° GRUPPO



### Spunti di discussione

La potenza del numero  $i$  ci offre l'occasione di riflettere:

#### PROPRIETÀ DI $i$

Il numero  $i$  è il **ciclico di ordine 4** rispetto alla moltiplicazione cioè si ripete con periodo 4 dopo un certo numero di passaggi

$$i = \sqrt{-1}$$

$$i^2 = i \times i = \sqrt{-1} \times \sqrt{-1} = -1$$

$$i^3 = i^2 \times i = -1 \times i = -i$$

$$i^4 = i^2 \times i^2 = (-1) \times (-1) = 1$$

$$i^5 = i^4 \times i = i$$

$$i^6 = i^5 \times i = i^2 = -1$$

$$i^7 = (-1) \times i = -i$$

$$i^8 = i^4 \times i = 1$$

$$i^9 = i$$

✓ Cosa significa applicare l'operatore di potenza dell'unità immaginaria

Prime operazioni con l'unità immaginaria  $i$

Individuare ricorsioni e significato di periodo

Prof.ssa Franca Donato  
L.S. «Tullio Levi Civita»

## 4° GRUPPO

Il lavoro proposto dal quarto gruppo ha permesso spunti per introdurre:

- ✓ Come realizzare una presentazione ‘accattivante’ con figure, transizioni e animazioni che coinvolgono lo spettatore
  - ✓ Analizzare alcune delle formule note in cui compare il numero  $\pi$
- ✓ Relazioni di interdisciplinarietà che coinvolgono i numeri: poesie in varie lingue,...
  - ✓ Ripercorrere il processo storico che ha portato alle stime dei numeri irrazionali  $\pi$  ed  $e$
- ✓ Relazione tra il coefficiente angolare di una tangente ad una curva e la caratteristica di crescenza o decrescenza della curva stessa: crescenza e decrescenza
  - ✓ Relazione tra gli insiemi dei numeri complessi, immaginari e reali

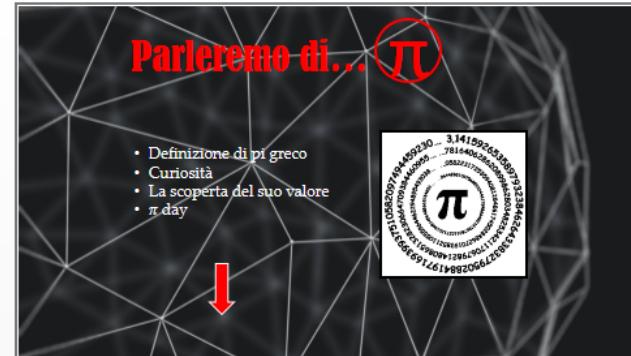


Prof.ssa Franca Donato  
L.S. «Tullio Levi Civita»

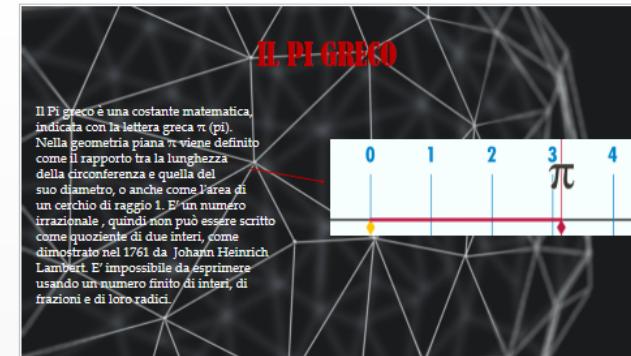
# 4° GRUPPO



1



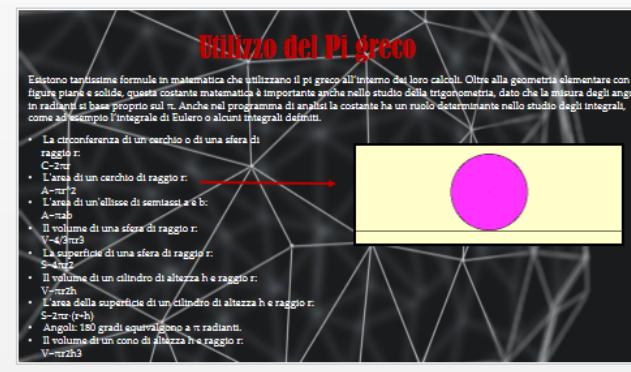
2



3



4



5



6

Prof.ssa Franca Donato  
L.S. «Tullio Levi Civita»

# 4° GRUPPO

## La scoperta del suo valore

E' utilizzato in moltissime formule, ma come si è arrivati a stabilirne il valore che noi oggi diamo per scontato ( $3,14\dots$ )? I primi che cercarono di dare un valore a questo numero furono egizi e babilonesi che con dei metodi antiquati ma ingegnosi ci andarono molto vicino;



I babilonesi utilizzavano per esprimere il pi greco il rapporto  $\frac{25}{8}$  che corrisponde al rapporto tra la circonferenza e il perimetro di un esagono inscritto. Che da come risultato il valore 3,125



Secondo gli egizi un cerchio con diametro 9 unità è uguale ad un quadrato di lato 8. Ottienendo così il valore di  $(\frac{16}{9})^2 = 3,160$

## Più tardi però...

Archimede calcolò il  $\pi$  attraverso il metodo della compressione utilizzando un poligono di 96 lati ottenne un risultato di 3,14163...



Euclide pur non avendo compreso a pieno la funzione del  $\pi$ , attraverso "gli elementi" ha fornito informazioni per far capire ai futuri matematici l'uso del  $\pi$ .



## Archimede



Archimede nacque nel 287 a.C. a Siracusa, compie però i suoi studi di matematica ad Alessandria.

Tornato in patria, Archimede acciuffò rapporti molto stretti con il re Geron, che lo sollecitò ad applicare la sua scienza alle cose di tutti i giorni. E le occasioni non mancarono.

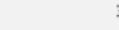
Si racconta, tuttavia, che un soldato romano, durante un saccheggio, s'imbatté in Archimede, così concentrato nello studio di alcune figure geometriche da non accorgersi nemmeno di quello che stava accadendo. Il soldato gli ordinò di seguirlo e quando Archimede gli diede di aspettare perché doveva prima risolvere un problema, il legionario, infastidito, rucche.

Di Archimede tutti hanno sentito parlare, spesso per il suo comportamento un po' bizzarro, per le sue eccezionali leggi di inventazione per le strade di Siracusa grande di "Eurialo" ("Elio trovato e discorsi platonici sulla saggezza"). Di questo architetto si sa poco, ma il suo nome è famosissimo, le sue opere oggi sono spesso sconosciute. Archimede, infatti, non scriveva lunghi trattati, ma brevi testi, dove la dimostrazione di molte cose (anche difficili) veniva lasciata al lettore. Si occupava di argomenti che riassumono dei matematici greci suoi contemporanei: aveva osato affrontare il volume della sfera, l'area compresa fra una parabola e una retta; l'equilibrio dei corpi appesi e di quelli immersi nell'acqua ecc.



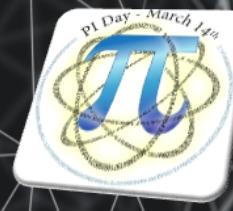
## DAL 600 AD OGGI

- Nel 1610 Ludolph Van Ceulen calcola le prime 35 cifre decimali di  $\pi$  utilizzando poligoni con più di 2 milioni di lati.
- Nel 1699 il matematico William Jones utilizza per la prima volta il simbolo  $\pi$  in onore di Pitagora.
- Nel 1761 Johann Heinrich Lambert dimostra che si tratta di un numero irrazionale, ovvero che non esiste tangente di un qualunque numero razionale è irrazionale.
- Nel 1882 Ferdinand von Lindemann dimostra che il  $\pi$  è un numero irrazionale, ossia non è radice di nessun polinomio a coefficienti razionali.
- Nel 1897 Edwin J. Goodwin, propone un disegno di legge con l'intenzione di estendere la legge di governo in un valore più semplice, che era possibile permettere la quadratura del cerchio. La proposta viene però rifiutata grazie alla resistenza degli scienziati.
- Ad oggi le cifre di  $\pi$  sono oltre 12.000.000.000.000.



## Pi greco day

Il giorno 14 Marzo alle ore 15.00 viene festeggiato il pi greco day e fu istituito nel 1800, e tale festa viene riconosciuta in tutti i paesi europei e statunitensi. Cade il 14 Marzo ovvero 14.13 in notazione anglosassone, 3,14.



10

11

9

12

## Costante matematica: e

- Il numero di Nepero o di Euler o costante matematica, è un numero moderno che viene spesso usato nella vita quotidiana e può essere espresso in molte forme.
- Questo numero è molto importante perché costituisce la base dei logaritmi naturali o neperiani (introdotti da Nepero che pubblicò nel 1614 la prima tavola di logaritmi).
- Si dice logaritmo in base  $a$  di un numero  $b$  l'esponente  $c$  che si deve dare ad  $a$  per avere  $b$ . In simboli si scrive  $c = \log_a b$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Prof.ssa Franca Donato  
L.S. «Tullio Levi Civita»

# 4° GRUPPO

### La storia...

Questo numero fu scoperto dal matematico scozzese John Napier (in italiano Napier); il quale però non lo utilizzò come base per i logaritmi.



Successivamente Leonhard Euler (1701-1783) in italiano Euler, utilizzò il numero e per definire le potenze con esponente immaginario.



13

### ...E il suo valore

- Si definisce numero e, il valore che assume l'espressione:  $(1+1/n)^n = 2,71\dots$ . Nel 1737 si dimostrò che questa costante è un numero irrazionale, e quindi non è possibile determinarne la sua parte decimali senza ricorrere a un'approssimazione.
- Inoltre nel 1873 Charles Hermite dimostrò che questo numero è anche trascendente, ovvero che non può essere ottenuto attraverso la risoluzione di un'equazione algebrica.
- Attualmente, si conoscono le prime mille miliardi di cifre dello sviluppo decimali di e.
- Inoltre Euler identificò con la lettera e la somma della serie infinita



14

### Un esempio pratico

Il gioco della «guerra» è un gioco di carte in cui i giocatori si dividono il mazzo, ogni giocatore butta la prima carta del mazzo e chi ha la carta più alta vince. In caso di parità si continua fino a quando non c'è un vincitore.

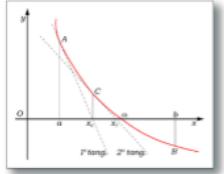
Con due mazzi di carte la probabilità che le due carte siano diverse è che quindi non ci sia una situazione di parità è pari a  $1/e$ .



15

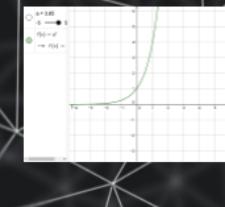
### Una particolare funzione esponenziale

- La funzione esponenziale ha per grafico una curva che cresce prima in modo lento e poi più rapidamente al crescere di x quando  $a>1$  oppure decresce dapprima in modo rapido, poi più dolcemente al crescere di x quando  $0<a<1$ .
- La rapidità con cui cresce o decresce una curva può essere misurata attraverso la pendenza delle rette tangenti.



16

- In generale sappiamo che esisterà sempre un valore di a per cui il coefficiente angolare della tangente sarà 1: questo numero si indica con la lettera e.
- La funzione  $y=e^{ax}$  ha un grafico del tipo:



la sua simmetrica invece avrà equazione  $y=e^{-x}$  e il suo grafico ha la caratteristica che la retta tangente nel punto preso in considerazione ha coefficiente angolare -1.

17

### Unità immaginaria

- Introduzione;
- Unità immaginaria;
- I numeri immaginari;
- I numeri complessi;
- La storia;



18

Prof.ssa Franca Donato  
L.S. «Tullio Levi Civita»

# 4° GRUPPO

**I numeri immaginari e complessi**

Qual è il numero reale  $x$  il cui quadrato è uguale a  $-4$ ?  
Il problema non ammette soluzioni perché non esiste alcun numero reale che al quadrato fornisca un numero negativo.

L'insieme dei numeri reali ha una "struttura" matematica che permette di risolvere moltissimi problemi, ma è insufficiente nella risoluzione di equazioni del tipo:  $x^2 + 1 = 0$ .

In effetti, quando dobbiamo risolvere un problema reale, il fatto di non trovare le soluzioni di una tale equazione ci spaventa perché troviamo un riferito a questa situazione anche dal punto di vista geometrico: la parabola  $y = x^2 + 1$  non ha intersezioni con l'asse delle ascisse e quindi accettiamo il fatto che l'equazione  $x^2 + 1 = 0$  non abbia soluzioni.

Le cose si complicano quando cerchiamo di risolvere un'equazione di terzo grado.

Questo fu il motivo principale che spinse i matematici di quel periodo ad ampliare l'insieme  $\mathbb{R}$  in modo da compiere agevolmente anche le operazioni seguenti dalla formula vista. Essi ammettevano anche l'esistenza di numeri il cui quadrato è negativo, tuttavia provavano diffidenza per questi oggetti poiché non indicavano quantità tangibili. Solo più tardi questi numeri trovarono la giusta collocazione nel mondo della matematica.

Perché non possono stare insieme? È complesso!

$\sqrt{-1} = -1$

19

**Numeri immaginari.....Matematica reale o immaginaria?**

Fu **Giambattista Cardano** (*Ars Magna*, 1545), verso la metà del XVI secolo, poliedrica figura del Rinascimento italiano, riconosciuto anche come il fondatore principale della teoria sulla probabilità, il primo a trattare esplicitamente questi numeri (senza ancora usare il simbolo  $i$ ) tentando di risolvere un problema di algebra.

Nei secoli successivi, numerosi equazioni algebriche portarono a soluzioni "immaginarie". Ma fu grazie ad **Euler** che lo studio di tale materia trovò pieno compimento con l'introduzione dell'unità immaginaria  $i$ , tale che  $i^2 = -1$  che permise di rendere matematicamente coerente l'interpretazione di  $\sqrt{-1}$  (che si può scrivere  $i$  per indicare  $\sqrt{-1}$  che però fu adottata appena verso la fine della sua vita in una memoria del 1777, pubblicata sugli Atti della Accademia di San Pietroburgo).

A Euler siamo anche debitori di molti simboli ancora oggi usati in matematica. Fu lui infatti a introdurre il simbolo  $\pi$  per indicare la costante pi greco,  $\pi$ , dove simbolo  $\pi$  per sommatoria e  $f(x)$  per indicare una funzione. Nella tesi di dottorato di **Gauss**, del 1798, è contenuta la dimostrazione del famoso teorema fondamentale dell'algebra, che afferma che ogni polinomio a coefficienti complessi ammette almeno una radice complessa.

L'interpretazione geometrica fu dovuta alle tesi di **Gauss** (1799) e **Argand** (1806) e alla introduzione del piano complesso, che oggi porta il loro nome. Nel 1836 Lo studio delle funzioni complesse viene proseguito da **Cauchy**.

Cronaca dei matematici

Giambattista Cardano

Euler

Argand

Gauss

Cauchy

20

**Unità immaginaria:  $i$**

L'ostacolo del calcolo della radice quadrata di un numero negativo si può superare introducendo quella che si chiama unità immaginaria  $i$ , cioè un simbolo che sta ad indicare un "qualcosa" che, elevato al quadrato, da per risultato  $-1$ .

$i^2 = -1$ , cioè  $i = \sqrt{-1}$

- Le potenze di  $i$  sono cicliche di periodo quattro:

$i^0 = 1$   
 $i^1 = i$   
 $i^2 = -1$   
 $i^3 = -i$   
 $i^4 = 1$   
 $i^5 = i$   
 $i^6 = -1$   
 $i^7 = -i$   
 $i^8 = 1$

Cioè le quattro potenze di  $i$  si riproducono indefinitamente nello stesso ordine.

21

**I numeri immaginari**

Con l'introduzione dell'unità immaginaria, è possibile calcolare la radice quadrata di un qualsiasi numero negativo:

$\sqrt{-16} = \sqrt{16} \times \sqrt{-1} = -4i$

$\sqrt{-3} = \sqrt{3}i$

Numeri come  $\pm 4i$ ,  $\sqrt{3}i$  si dicono numeri immaginari.

Un numero immaginario è dunque il prodotto di un numero reale per l'unità immaginaria.

**Insieme  $C$  dei numeri complessi**

Definiamo  $R$  l'insieme reale non nullo,  $I$  l'insieme immaginari puri con l'introduzione di  $i$  come radice di  $-1$  e  $C$  l'insieme dei numeri complessi, cioè l'insieme  $R + iI$ .

Il numero complesso  $a + bi$  è composto da due parti: la parte reale  $a$  e la parte immaginaria  $b$ .

Il numero complesso  $a + bi$  si rappresenta sul piano cartesiano come un vettore che ha origine nell'origine e che ha per componenti le coordinate  $(a, b)$ .

Indichiamo con  $C$  l'insieme dei numeri complessi.

22

**I numeri complessi**

La somma e differenza di due numeri immaginari è ancora un numero immaginario; il prodotto e quoziente di due numeri immaginari è un numero reale;

La somma e la differenza di un numero reale e un numero immaginario non dà origine né ad un numero reale né immaginario.

Chiamiamo numero complesso ogni espressione del tipo  $a+bi$  con  $a, b \in \mathbb{R}$ .

Il numero  $a$  costituisce la parte reale del numero complesso, il numero  $b$  il coefficiente della parte immaginaria.

Indichiamo con  $C$  l'insieme dei numeri complessi.

Complessi  
Immaginari  
Reali

L'insieme dei numeri Reali e l'insieme dei numeri Immaginari sono dei sottosettemi dell'insieme dei numeri Complessi.  $R$  ed  $I$  hanno un elemento in comune, il numero 0.

23

**Rappresentazione grafica:**

- **Rappresentazione mediante punti del piano:**  
In un riferimento cartesiano ortogonale:  
Punto A...  
Sull'asse delle ascisse: I numeri reali;  
Sull'asse delle ordinate: I numeri immaginari;

... si facciano corrispondere ai numero complessi  $a+bi$  i punti  $P_A$  e  $P_B$ : il punto  $P_A$  (a, 0) il numero complesso  $a+0i$  (vettore parallelo all'asse delle ascisse); il punto  $P_B$  (0, b) il numero complesso  $0+bi$  (vettore parallelo all'asse delle ordinate); chiameremo questi vettori **sezze immaginari**. Il punto  $P_A$  si dice **parte reale** del numero complesso viene chiamato piano di Gauss o piano complesso.

**Esempio:**  
Nella figura 2 un esempio di rappresentazione di numeri complessi:  $z_1=1+2i$ ,  $z_2=-2-3i$ ,  $z_3=2+4i$  corrispondentemente ai punti  $P_1(1,2)$ ,  $P_2(-2,-3)$ ,  $P_3(2,4)$  sul piano di Gauss.

- **Rappresentazione mediante vettori:**  
Considerando sempre il piano complesso precedente possiamo creare un vettore  $\overrightarrow{OP}$  essendo  $P$  il punto immagine di  $z$ . Nel grafico qui sotto sono rappresentati i numeri complessi corrispondenti ai punti  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$  e gli incidenti vettori sul piano di Gauss.

Fig. 1

Fig. 2

Fig. 3

24

Prof.ssa Franca Donato  
L.S. «Tullio Levi Civita»

# 4° GRUPPO

# I numeri immaginari

Con l'introduzione dell'unità immaginaria, è possibile calcolare la radice quadrata di un qualsiasi numero negativo:

$$\sqrt{-16} = \sqrt{16} \times \sqrt{-1} = 4i$$

Numeri come  $\pm 4i$ ,  $\sqrt{3}i$  si dicono numeri immaginari.

Un numero immaginario è dunque il prodotto di un numero reale per l'unità immaginaria.

**Insieme C dei numeri complessi!**

Mettiamo R che numeri reali non il piano cartesiano con l'immaginaria, perché non si finisce di dire, e d'individuando  $i \neq 0$ .

E' necessario ancora l'insieme R che numeri immaginari, appunto, I.

22



23

The diagram shows a unit circle centered at the origin of a Cartesian coordinate system. A point on the circle is labeled  $e^{ix}$ , representing a complex number in polar form. The angle  $x$  is measured from the positive real axis. The horizontal component of the vector is labeled  $\cos x$  and the vertical component is labeled  $i \sin x$ . The text "Il punto e^{ix} è sulla circonferenza unitaria" is written near the circle.

25

**Rappresentazione grafica:**

- **Rappresentazione mediante punti del piano:**  
In un referenziale cartesiano ortogonale:  
Punto:  $z = x + iy$
- Sull'asse delle ascisse: Sull'asse delle coordinate:
  - I numeri reali;
  - I numeri immaginari;
- ...e facciamo corrispondere al numero complesso  $z = x + iy$  il punto  $P(z)$ :  
2) In un referenziale cartesiano **Fig. 1** il numero complesso  $z = x + iy$  è rappresentato dall'asse  $x_1$  e dall'asse  $x_2$ , e i quadrati della distanza, e corrispondono i numeri immaginari, fissa a 0 l'asse  $x_1$  e versando ripetutamente classifichiamo reale e aless immaginario.
- Il punto  $P(z)$  così rappresentato viene chiamato piano di Gauss o piano complesso.

**Esempio:**  
Nella figura 2 un esempio di rappresentazione di numeri complessi:  
 $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$ ;  $z_2 = -2 + i\sqrt{3}$ ;  $z_3 = -2 - 2i$ ;  $z_4 = 1 + 2i$  rispettivamente corrispondenti ai punti  $P_1(1,0)$ ;  $P_2(2, \pi/2)$ ;  $P_3(2, -\pi/2)$ ;  $P_4(1, 3\pi/2)$ .

- **Rappresentazione mediante vettori:**  
Considerando sempre il piano cartesiano precedente:

2

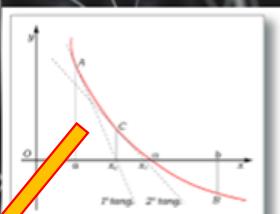
Prof.ssa Franca Donato  
L.S. «Tullio Levi Civita»

# Spunti di discussione

## 4° GRUPPO

### Una particolare funzione esponenziale

- La funzione esponenziale ha per grafico una curva che cresce prima in modo lento e poi più rapidamente al crescere di  $x$  quando  $a > 1$  oppure decresce dapprima in modo rapido, poi più dolcemente al crescere di  $x$  quando  $0 < a < 1$ .
- La rapidità con cui cresce o decresce una curva può essere misurata attraverso la pendenza delle rette tangenti.



- In generale sappiamo che esisterà sempre un valore di  $a$  per cui il coefficiente angolare della tangente sia 1, questo numero si indica con la lettera  $e$ .
- La funzione  $y = e^{Ax}$  ha un grafico del tipo:



la sua simmetrica invece avrà equazione  $y = e^{-Ax}$  e il suo grafico ha la caratteristica che la retta tangente nel punto preso in considerazione ha coefficiente angolare -1.

Definizione intuitiva di funzioni crescenti e decrescenti;  
Caratteristica dei coefficienti angolari delle tangenti ad una curva crescente e decrescente

Caratteristiche di crescenza della funzione esponenziale con base  $a > 1$

Caratteristiche di decrescenza della funzione esponenziale con base  $0 < a < 1$

Rivisti i due tipi di grafici funzione esponenziale  $y = ax$

Prof.ssa Franca Donato  
L.S. «Tullio Levi Civita»

# 4° GRUPPO

## Spunti di discussione

Alcune caratteristiche delle operazioni tra numeri immaginari e introduzione dei numeri complessi

### I numeri complessi

- La somma e differenza di due numeri immaginari è ancora un numero immaginario;
- Prodotto e quoziente di due numeri immaginari è un numero reale;
- La somma e la differenza di un numero reale e un numero immaginario non dà origine né ad un numero reale né immaginario;

Chiamiamo numero complesso ogni espressione del tipo  $a+ib$  con  $a, b \in \mathbb{R}$ .

Il numero  $a$  costituisce la parte reale del numero complesso, il numero  $b$  il coefficiente della parte immaginaria.

Indichiamo con  $C$  l'insieme dei numeri complessi.



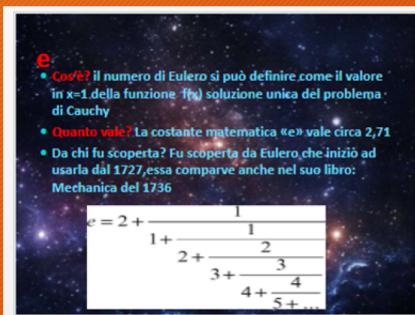
Relazioni tra gli insiemi numerici:

- Insieme dei complessi,
- insieme degli immaginari
- l'insieme dei reali

## 5° GRUPPO

Il lavoro proposto dal quinto gruppo ha permesso:

- ✓ Determinare con il calcolo il ragionamento di Archimede per vedere le cifre che costituiscono l'approssimazione di  $\pi$



- ✓ Sintesi per caratterizzare e rappresentare i numeri complessi



Prof.ssa Franca Donato  
L.S. «Tullio Levi Civita»

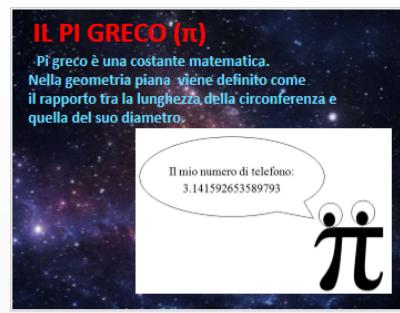
# 5° GRUPPO



1



2



3

Il Pi Greco ( $\pi$ )  
Pi greco è una costante matematica. Nella geometria piana viene definito come il rapporto tra la lunghezza della circonferenza e quella del suo diametro.

Il Pi greco non assomiglia a un numero "normale", infatti viene indicato con una lettera ( $\pi$ ); è un numero che ha infinite cifre dopo la virgola. Il Pi greco è un numero che, in teoria, non doveva esistere secondo la concezione pitagorica. Per la quale ogni numero era una frazione. Il Pi greco non rispetta questa regola poiché è un numero irrazionale.  
Oggi questo numero sembra una banalità, ma per gli egiziani e per i babilonesi era molto importante. Essi ci sono arrivati molto vicino. Ma fu un genio della matematica a trovare una soluzione:  
Archimede di Siracusa.



4

**CHE RAGIONAMENTO HA FATTO ARCHIMEDE?**

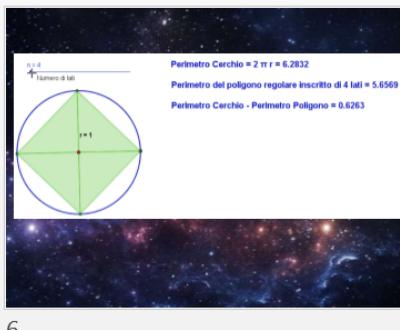
Un poligono regolare inscritto in una circonferenza ha il perimetro più piccolo della lunghezza della circonferenza. Ma un poligono regolare costruito intorno ad una circonferenza ha il perimetro più grande della circonferenza stessa. Aumentando i lati del poligono inscritto e circoscritto i due perimetri se avvicinano verso uno stesso valore. Questo valore è proprio la lunghezza della circonferenza. Cioè se il diametro della circonferenza è 1,

Adesso è banale calcolare il  $\pi$  con i calcolatori moderni, ma nell'antichità fu una vera e propria rivoluzione.

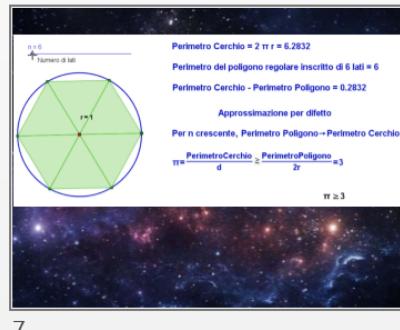
Il  $\pi$  è un numero straordinario poiché viene usato in molte questioni.



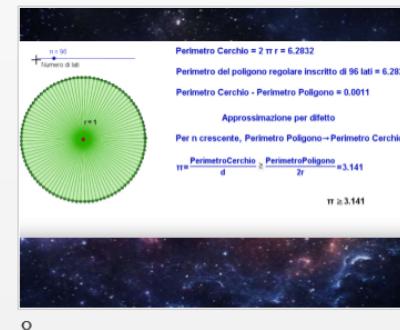
5



6



7



8

Prof.ssa Franca Donato  
L.S. «Tullio Levi Civita»



## 5° GRUPPO

### I Numeri Immaginari

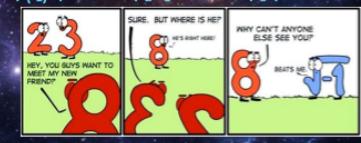
Secondo Euler, ogni numero immaginario può essere scritto come  $ib$ , dove  $b$  è un numero reale e  $i$  l'unità immaginaria, con la proprietà  $i^2 = -1$ . Euler utilizzò il numero immaginario  $\sqrt{-1}$  in moltissime equazioni e grazie a queste scopri la formula  $i^{4n} = 1$  successivamente usata da moltissimi matematici.



17

> Un fatto curioso è che se questi numeri venissero elevati a diverse potenze, potremmo constatare che il loro risultato si ripeterà ciclicamente:

$$\begin{array}{lll} i^{-3}=i & i^0=1 & i^3=-i \\ i^{-2}=-1 & i^1=i & i^4=1 \\ i^{-1}=-i & i^2=-1 & i^5=i \end{array}$$



18

**i**  
Cos'è? In matematica l'unità immaginaria  $i$  permette di estendere il campo dei numeri reali  $R$  al campo dei numeri complessi  $C$ .

**Quanto vale?** L'unità immaginaria è caratterizzata dall'essere il numero il cui quadrato è uguale a  $-1$ .

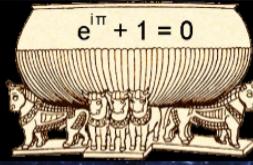
**Perché è utile?** La necessità di estendere il campo dei numeri reali nasce dal fatto che non è possibile calcolare la radice quadrata di un numero negativo e più in generale che non tutte le equazioni polinomiali hanno una soluzione in  $R$ .



### Formula di Euler

Nella formula di Euler entrano in relazione il numero immaginario  $i$ , le potenze del numero  $e$  e le funzioni trigonometriche seno e coseno:

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$



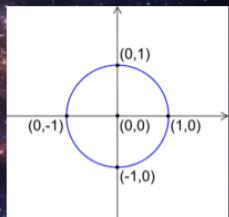
20

> Questa formula può anche essere vista come:

$$e^{i\pi} = -1$$

> Da cui deriva:

$$e^{i(2\pi)} = e^{i\pi} = -1 + 0i = -1$$



21

GRAZIE PER  
L'ATTENZIONE!

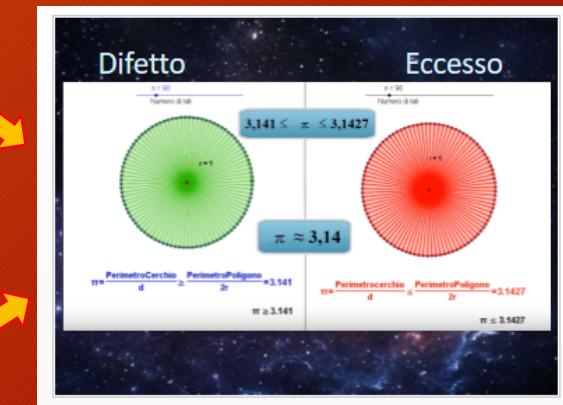
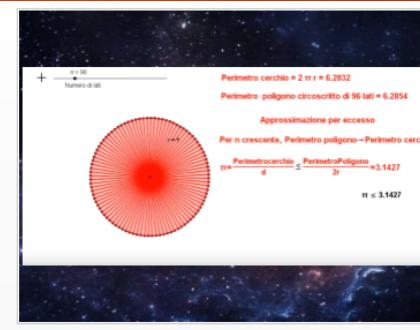
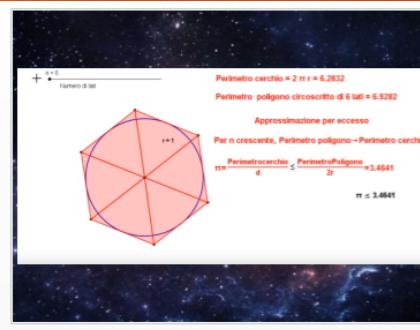
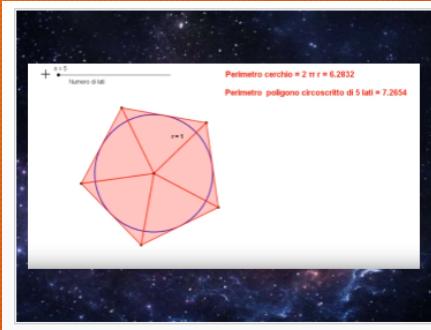
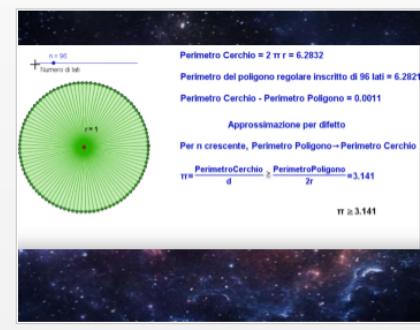
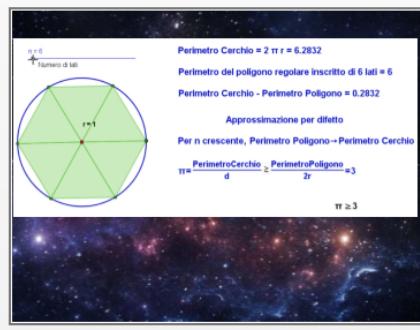
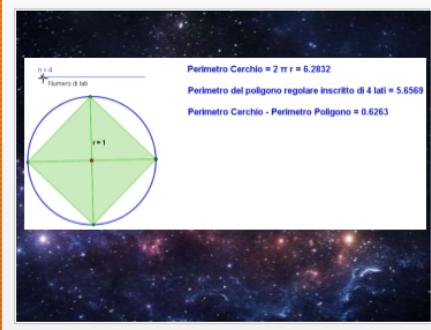
2 a:  
Marco Besca  
Gabriele Sàmmartino  
Riccardo Vela

22

Prof.ssa Franca Donato  
L.S. «Tullio Levi Civita»

# 5° GRUPPO Argomenti approfonditi:

- ✓ Determinare con il calcolo il ragionamento di Archimede per vedere le cifre che costituiscono l'approssimazione di  $\pi$



Determinazione del perimetro di poligoni regolari inscritti e circoscritti: quadrato, esagono,...

Prof.ssa Franca Donato  
L.S. «Tullio Levi Civita»



# Ringrazio per l'attenzione

Prof.ssa Franca Donato  
L.S. «Tullio Levi Civita»