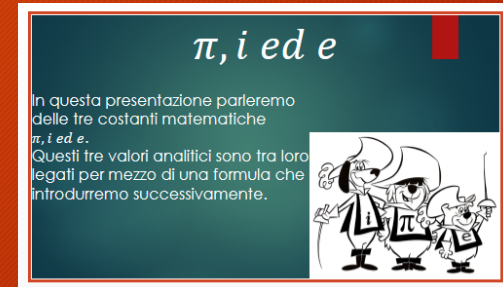


2° GRUPPO

Il lavoro proposto dal secondo gruppo è risultato essere una buona sintesi degli argomenti introdotti nella presentazione precedente + spunti per introdurre:

- ✓ Significato dell'operatore logaritmo di un numero
- ✓ Sintesi per caratterizzare e rappresentare i numeri complessi



Prof.ssa Franca Donato
L.S. «Tullio Levi Civita»

2° GRUPPO

π, i ed e

In questa presentazione parleremo delle tre costanti matematiche π, i ed e .

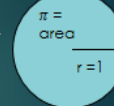
Questi tre valori analitici sono tra loro legati per mezzo di una formula che introdurremo successivamente.



1

π

> Il π greco è indicato con la lettera greca π (pi) viene visto come il rapporto tra la lunghezza di una circonferenza ed il suo diametro o anche come l'area di un cerchio di raggio 1.



> Il π greco è detto anche costante di Archimede, numero di Ludolph o costante di Ludolph, esso è un numero composto da infinite cifre decimali.

> Il π greco è un numero irrazionale quindi non può essere scritto come quoziente di due interi.

> È definito come numero trascendente, ciò fa sì che non vi siano polinomi con coefficienti razionali di cui π è radice, è oltretutto impossibile esprimerlo usando un numero finito di interi, di frazioni e di loro radici.

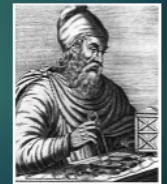
2

storia del π

I primi a calcolare il π furono gli Egizi e i Babilonesi che si avvicinarono di molto al suo vero valore (3.160 e 3.120 rispettivamente).



Secoli dopo, Archimede riuscì a ottenere un valore molto più preciso (3.14).



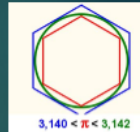
3

L'esperimento di Archimede

Archimede notò che il perimetro del poligono inscritto alla circonferenza (p_1) era minore alla circonferenza stessa (c), la quale, a sua volta era minore del perimetro del poligono in cui era circoscritto (p_2).

Inoltre capì che raddoppiando i lati sia di p_1 che di p_2 i poligoni si avvicinavano verso uno stesso valore. Aumento via via il numero di lati, da 6 lati per poligono fino ad arrivare a 96 lati, ottenendo per il perimetro interno un valore pari a 3.14084 e per quello esterno un valore di 3.142858.

Quindi arrivò alla conclusione che π è compreso tra questi due valori.

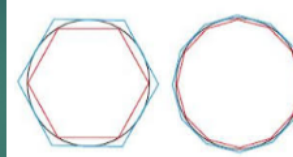


4

Inoltre capì che raddoppiando i lati sia di p_1 che di p_2 i poligoni si avvicinavano verso uno stesso valore.

Aumento via via il numero di lati, da 6 lati per poligono fino ad arrivare a 96 lati, ottenendo per il perimetro interno un valore pari a 3.14084 e per quello esterno un valore di 3.142858.

Quindi arrivò alla conclusione che π è compreso tra questi due valori



5

Il secondo esperimento

Il secondo esperimento che Archimede condusse consisteva nel prendere un sistema di riferimento (retta orientata) e la divide in unità pari al diametro di un ipotetico cerchio. Prese un punto di riferimento su di esso e notò che dopo una rotazione completa il diametro batteva sulla retta ad un valore di circa 3,14.



6

Prof.ssa Franca Donato
L.S. «Tullio Levi Civita»

2° GRUPPO

i (unità immaginaria)

Il valore « i » (unità immaginaria) rappresentata a volte dalla lettera greca iota permette di estendere il campo dei numeri reali al campo dei numeri complessi. Esso è caratterizzato dall'essere in numero il cui valore al quadrato è -1 . La necessità di ampliare il campo dei numeri reali nasce dal fatto di non poter calcolare la radice quadrata di un numero negativo, e più in generale che non tutte le funzioni polinomiali $f(x)=0$ hanno una soluzione nell'insieme dei numeri reali.



7

In particolare la funzione $x^2+1=0$ che non ha soluzioni reali ha soluzione $x=i$.

$$\begin{aligned}x^2+1 &= 0 \\x^2 &= -1 \\x &= \sqrt{-1} \\x &= i\end{aligned}$$

i è utilizzata in generale per dimostrare operatori come le radici di numeri negativi che non hanno soluzioni tra i numeri reali.

$$\text{Es. } \sqrt{-4}=2i$$

8

e (numero di Nepero o di Eulero)

La terza costante di cui vi parleremo è « e ». È un numero irrazionale e trascendente, viene chiamato nell'ambito internazionale numero di Eulero ma in Italia è anche detto numero di Nepero. È la costante alla base della funzione esponenziale e^x e del logaritmo naturale insieme al pi greco è una delle costanti matematiche più importanti per via della sua presenza in molte formule apparentemente non correlate.



$e=2.71828\dots$

9

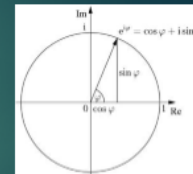
La definizione del numero di Nepero può avvenire in vari modi, ad esempio con le formule:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \quad \text{oppure} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

10

Identità di Eulero

L'identità di Eulero, pubblicata per la prima volta nella sua *Introduzione* (1748), mette in relazione queste tre costanti: π , i , e attraverso la formula $e^{i\pi}+1=0$ cioè $e^{i\pi}=-1$



Essa equivale a $e^{i\pi} = \cos \pi + i \sin \pi$
 $\cos \pi = -1$
 $\sin \pi = 0$
 Ciò equivale a $e^{i\pi} = -1 + 0$
 $e^{i\pi} = -1$

11

2° GRUPPO numero π

- Caratteristiche fisiche del numero
- Varie definizioni di π
- Problema della sua determinazione

storia del π

I primi a calcolare il π furono gli Egizi e i Babilonesi che si avvicinarono di molto al suo vero valore (3.160 e 3.120 rispettivamente).



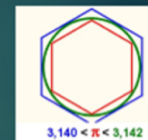
Secoli dopo, Archimede riuscì a ottenere un valore molto più preciso (3.14).



L'esperimento di Archimede

Archimede notò che il perimetro del poligono inscritto alla circonferenza (p_1) era minore della circonferenza stessa (c), la quale, a sua volta era minore del perimetro del poligono in cui era circoscritto (p_2).

Inoltre capì che raddoppiando i lati sia di p_1 che di p_2 i poligoni si avvicinavano verso uno stesso valore. Aumento via via il numero di lati, da 6 lati per poligono fino ad arrivare a 96 lati, ottenendo per il perimetro interno un valore pari a 3.14084 e per quello esterno un valore di 3.142858. Quindi arrivò alla conclusione che π è compreso tra questi due valori.



Inoltre capì che raddoppiando i lati sia di p_1 che di p_2 i poligoni si avvicinavano verso uno stesso valore.

Aumento via via il numero di lati, da 6 lati per poligono fino ad arrivare a 96 lati, ottenendo per il perimetro interno un valore pari a 3.14084 e per quello esterno un valore di 3.142858.

Quindi arrivò alla conclusione che π è compreso tra questi due valori



Prof.ssa Franca Donato
L.S. «Tullio Levi Civita»

2° GRUPPO

- Caratteristiche del numero i

i (unità immaginaria)

Il valore « i » (unità immaginaria) rappresentata a volte dalla lettera greca iota permette di estendere il campo dei numeri reali al campo dei numeri complessi. Esso è caratterizzato dall'essere un numero il cui valore al quadrato è -1 . La necessità di ampliare il campo dei numeri reali nasce dal fatto di non poter calcolare la radice quadrata di un numero negativo, e più in generale che non tutte le funzioni polinomiali $f(x)=0$ hanno una soluzione nell'insieme dei numeri reali.



- Necessità dell'introduzione

in particolare la funzione $x^2+1=0$ che non ha soluzioni reali ha soluzione $x=i$.

$$\begin{aligned}x^2+1 &= 0 \\ x^2 &= -1 \\ X &= \sqrt{-1} \\ X &= i\end{aligned}$$

i è utilizzata in generale per dimostrare operatori come le radici di numeri negativi che non hanno soluzioni tra i numeri reali.

$$\text{Es. } \sqrt{-4}=2i$$

Prof.ssa Franca Donato
L.S. «Tullio Levi Civita»

2° GRUPPO


- Caratteristiche del numero e

e(numero di Nepero o di Eulero)

La terza costante di cui vi parleremo è « e ».

È un numero irrazionale e trascendente, viene chiamato nell'ambito internazionale numero di Eulero ma in Italia è anche detto numero di Nepero.

È la costante alla base della funzione esponenziale e^x e del logaritmo naturale \ln . Insieme al pi greco è una delle costanti matematiche più importanti per via della sua presenza in molte formule apparentemente non correlate.



$e=2.71828...$

- Modi diversi per definire e

La definizione del numero di Nepero può avvenire in vari modi, ad esempio con le formule:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \quad \text{oppure} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Questo è stato lo spunto per introdurre e discutere sul significato del logaritmo di un numero

Prof.ssa Franca Donato
L.S. «Tullio Levi Civita»

• Identità di Eulero

2° GRUPPO

Identità di Eulero

L'identità di Eulero, pubblicata per la prima volta nella sua *Introduzione* (1748), mette in relazione queste tre costanti: π , i , e attraverso la formula $e^{i\pi} + 1 = 0$ cioè $e^{i\pi} = -1$

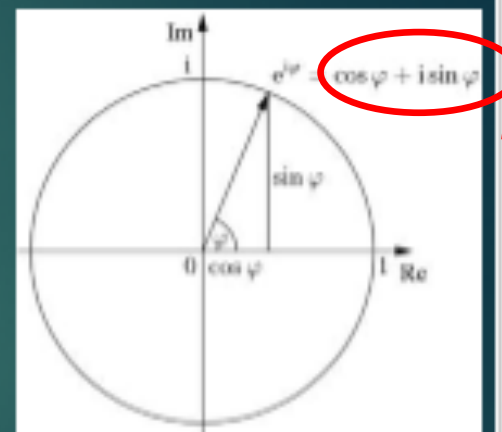
Essa equivale a $e^{i\pi} = \cos \pi + i \sin \pi$

$$\cos \pi = -1$$

$$\sin \pi = 0$$

Ciò equivale a $e^{i\pi} = -1 + 0$

$$e^{i\pi} = -1$$



La rappresentazione di un numero complesso che ha modulo 1: forma trigonometrica.

Prof.ssa Franca Donato
L.S. «Tullio Levi Civita»

Spunto di discussione

La rappresentazione geometrica dei numeri complessi ci offre l'occasione di riflettere:

✓ l'insieme dei numeri reali, è rappresentabile su una retta orientata



è un insieme ordinato, nel senso che in esso è possibile definire le relazioni di "essere maggiore" e di "essere minore"

✓ l'insieme dei numeri complessi, è rappresentabile su un piano (piano di Gauss)

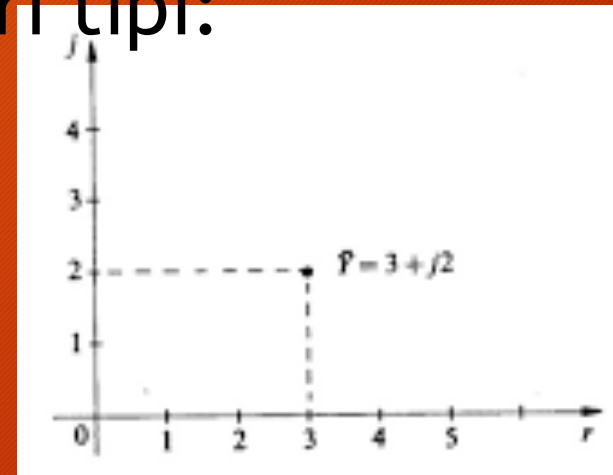


è un insieme ordinato? In esso è possibile definire le relazioni di "essere maggiore" e di "essere minore"?

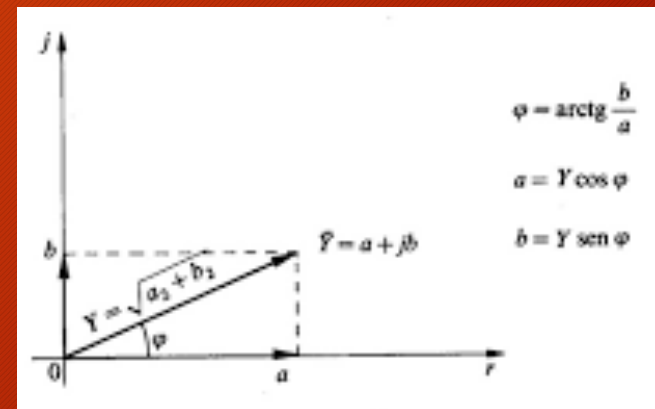
Spunto di discussione

La rappresentazione dei numeri complessi nel piano di Gauss può essere di vari tipi:

- ✓ Un numero complesso qualunque $z=a+ib$ può essere rappresentato da un punto P (l'ascissa è la a e l'ordinata b è il coefficiente della parte immaginaria)



- ✓ Un numero complesso qualunque z può essere rappresentato da un vettore (un modulo e una direzione)



Spunto di discussione

La rappresentazione analitica dei numeri complessi può essere di vari tipi

- ✓ Un numero complesso qualunque z può essere scritto in forma algebrica



$$z = a + i b$$

- ✓ Un numero complesso z (con modulo unitario) può essere scritto in forma trigonometrica



$$z = \cos\varphi + i \sin\varphi$$

- ✓ l'insieme dei numeri complessi, può essere scritto in una terza modalità utile per operare con i complessi

(non abbiamo i mezzi matematici per dimostrare)



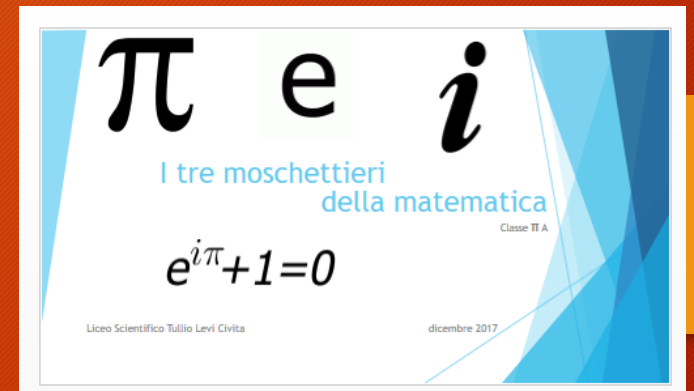
$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i \sin\varphi$$

Prof.ssa Franca Donato
L.S. «Tullio Levi Civita»

3 ° GRUPPO

Il lavoro proposto dal terzo gruppo è risultato essere interessante in quanto contiene:

- ✓ Proposta e realizzazione di una “attività laboratoriale” per verificare l’idea di Archimede per determinare approssimazione di π
- ✓ Proprietà ciclica dell’unità immaginaria



Prof.ssa Franca Donato
L.S. «Tullio Levi Civita»

3° GRUPPO

π e i

I tre moschettieri della matematica

$e^{i\pi} + 1 = 0$

Classe II A

Liceo Scientifico Tullio Levi Civita

dicembre 2017

1



Indice

- ▶ Introduzione Storica
- ▶ Le osservazioni di Archimede
- ▶ Introduzione al numero di Nepero
- ▶ L'unità immaginaria
- ▶ La sintesi di Eulero

2



PI GRECO (π)

π

▶ DEFINIZIONE: costante matematica definita come rapporto tra una circonferenza ed il suo diametro oppure l'area di un cerchio di raggio 1. Indipendente da misure di carattere fisico, è un numero irrazionale cioè decimale illimitato non periodico.

▶ Ha il valore di circa 3,1415926535898

3



STORIA DI π

Il numero è stato scoperto da Archimede di Siracusa, ma era già stato calcolato dai babilonesi e dagli egiziani, per i quali era rispettivamente 3,125 e 3,160. Archimede l'ha scoperto senza trigonometria, decimali, notazione posizionale e numeri arabi, anticipando il calcolo differenziale ed intuendo che si potevano costruire buone approssimazioni di π con il livello di approssimazione adeguato.

Reperto babilonese

Reperto egizio

4



ARCHIMEDE

Archimede di Siracusa è nato nel 287 a.C. a Siracusa è stato un matematico, fisico e inventore. È considerato uno dei più grandi scienziati e matematici della storia in quanto ha studiato il galleggiamento dei corpi, la sfera e le leve.

▶ Ha studiato anche il π utilizzando la circonferenza inscritta e circoscritta ad un poligono trovando delle approssimazioni di questo che furono circa 3,1429 e circa 3,1408.

5



OSSERVAZIONE DI ARCHIMEDE

Archimede notò anche che un poligono costruito intorno ad una circonferenza ha un perimetro più grande della circonferenza stessa e che aumentando il numero di lati di questo poligono il suo perimetro si avvicinava di più a quello della circonferenza. Quindi questa poteva essere vista come un poligono di infiniti lati

6

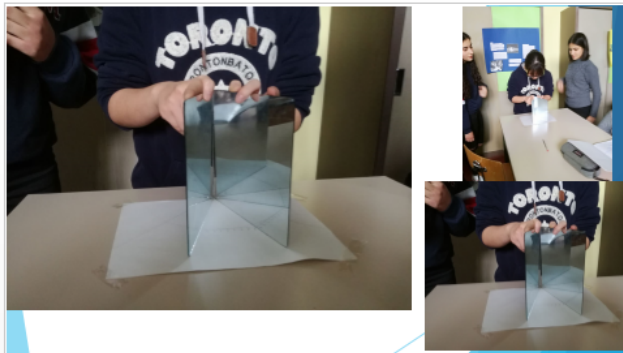


Prof.ssa Franca Donato
L.S. «Tullio Levi Civita»

3° GRUPPO

ESPERIMENTO

- Per verificare l'osservazione di Archimede abbiamo costruito un apparato formato da due specchi rettangolari che avevano un lato in comune. Questi specchi erano posizionati su un foglio sul quale era disegnato un triangolo equilatero inscritto in una circonferenza. Gli specchi coincidevano con i lati del triangolo.
- Stringendo gli specchi il numero di lati del poligono aumentava e la circonferenza andava a coincidere sempre di più con il poligono.



EULERO

Eulero è stato un matematico e fisico svizzero. È considerato il più importante matematico dell'Illuminismo ed è noto per essere tra i più prolifici di tutti i tempi e ha fornito contributi storicamente cruciali in svariate aree: analisi infinitesimale, funzioni speciali, meccanica razionale, meccanica celeste, teoria dei numeri, teoria dei grafi. Buona parte della simbologia matematica tuttora in uso venne introdotta da Eulero, per esempio i per l'unità immaginaria, Σ come simbolo per la sommatoria, $f(x)$ per indicare una funzione e la lettera π per indicare pi greco e definì anche la costante matematica e .



Basilea, 1707 -
San Pietroburgo,
1783

COSTANTE DI NEPERO (e)

Il numero e è una costante matematica e un numero irrazionale, cioè illimitato non periodico, e trascendente, cioè non è soluzione di nessuna equazione polinomiale.



Il numero di Nepero è detto anche numero di Eulero perché è stato scoperto da quest'ultimo ma in Italia è chiamato numero di Nepero in onore del "matematico" Nepero che ha lavorato per vari anni ai logaritmi. Il numero ha un valore circa di 2,71828...



Merchiston Castle, 1550 -
Edimburgo, 4 aprile
1617

COME SI DEFINISCE:

Questo numero o, per meglio dire, costante si può definire in due modi:

- Come valore del limite:

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n$$

COME SI DEFINISCE:

- Come la sommatoria:

$$e := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots$$

3° GRUPPO

STORIA DI e

Fu Eulero, nel 1750, a dimostrare che la successione $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ all'infinito tende al numero di Nepero. Ne calcolò le prime 18 cifre e lo chiamò e : un numero irrazionale che non ha un'interpretazione geometrica, al contrario di π . Si sostiene che e fu usata dai greci per il Partenone e dagli Egizi per la grande piramide perché in queste strutture si trovano due valori tipici il cui rapporto tende ad e .



Partenone



Grande piramide

13



SIMBOLO e

Probabilmente la lettera e fu scelta perché iniziale della lettera "esponenziale" oppure perché era la prima lettera dell'alfabeto latino non ancora utilizzata ma è da escludere la possibilità che si chiami in questo modo a causa di Eulero.

e

14



UNITÀ IMMAGINARIA (i)

L'unità immaginaria o numero i può essere definita come il numero che elevato al quadrato dà come risultato -1 e come soluzione dell'equazione:

$$x^2 + 1 = 0$$

Il numero i permette di estendere al campo dei numeri complessi.

I numeri complessi sono dei numeri che hanno sia la parte reale sia la parte immaginaria come ad esempio $3+5i$.

i

$$i^2 = -1$$

15



STORIA DI i

Il numero i fa la sua prima apparizione nel XVI secolo nelle formule risolutive di equazioni di 3° e 4° grado.

Non erano però considerati veri e propri numeri, poiché non potevano essere rappresentati sulla retta dei numeri reali pertanto si introdusse l'asse degli immaginari e in seguito il piano dei numeri complessi costituiti da una parte reale e da una parte immaginaria.

Furono accettati come numeri solo nel XVIII secolo, grazie al tedesco Gauss. Oggi i numeri complessi sono molto utilizzati

i

$$i = \sqrt{-1}$$

16



NUMERI IMMAGINARI E NUMERI COMPLESSI

Immaginiamo di dover determinare la radice di -4.

Sappiamo, per le proprietà delle radici, che la radice quadrata di un prodotto è uguale al prodotto delle radici quadrate. Quindi $\sqrt{-4}$ è uguale alla radice di 4 per la radice di -1, cioè $2i$.

$2i$ è un numero immaginario. È possibile operare con i numeri immaginari: se sommassi un numero immaginario ad un numero reale (per esempio $2i + 3$) otterrei un numero complesso. Si può operare con i numeri complessi tenendo conto delle regole del calcolo letterale.

$$\sqrt{-4} = ? = \sqrt{4} \times \sqrt{-1} = 2i$$

$$\sqrt{-4} = ?$$

17



PROPRIETÀ DI i

Il numero i è il ciclico di ordine 4 rispetto alla moltiplicazione cioè si ripete con periodo 4 dopo un certo numero di passaggi

$$i = \sqrt{-1}$$

$$i^2 = i \times i = \sqrt{-1} \times \sqrt{-1} = -1$$

$$i^3 = i^2 \times i = -1 \times i = -i$$

$$i^4 = i^2 \times i^2 = (-1) \times (-1) = 1$$

$$i^5 = i^4 \times i = i$$

$$i^6 = i^5 \times i = i^2 = -1$$

$$i^7 = (-1) \times i = -i$$

$$i^8 = i^4 \times i^4 = 1$$

$$i^9 = i$$

18



Prof.ssa Franca Donato
L.S. «Tullio Levi Civita»

3 ° GRUPPO

LA SINTESI DI EULERO

La seguente formula, definita da molti come «la più bella della matematica», riunisce tutti e tre i “moschettieri”

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

ATTIVITA' LABORATORIALE

SCOPO- l'attività si propone di visualizzare l'idea di Archimede: all'aumentare dei lati di un poligono regolare circoscritto ad una circonferenza esso tenderà a coincidere con la circonferenza.

MATERIALI-2specchi piani rettangolari; Foglio di carta

PROCEDURA- Sul foglio di carta, si disegna una grande circonferenza (la misura del raggio non deve superare la misura del lato dello specchio) con all'interno un triangolo equilatero.

I due specchi vengono posizionati perpendicolari al foglio poggiato sul tavolo, in modo da formare un angolo. Essi vengono posti con i lati di base coincidenti con i lati del triangolo inscritto.

Se si guarda l'immagine riflessa negli specchi si individua un poligono regolare circoscritto alla circonferenza

- ✓ Conta i lati del poligono circoscritto che vedi riflesso negli specchi
- ✓ Cosa succede se l'angolo tra gli specchi diminuisce?

Prof.ssa Franca Donato
L.S. «Tullio Levi Civita»

ATTIVITA' LABORATORIALE

3° GRUPPO

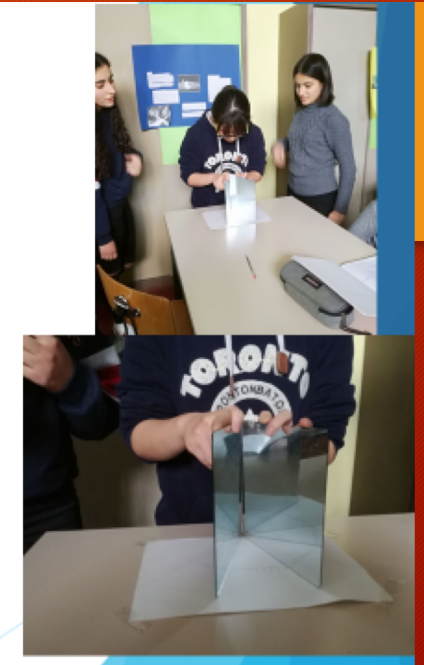
SCOPO- l'attività si propone di visualizzare l'idea di Archimede: all'aumentare dei lati di un poligono regolare circoscritto ad un circonferenza esso tenderà a coincidere con la circonferenza.

MATERIALI-2specchi piani rettangolari
Foglio di carta

PROCEDURA- Sul foglio di carta, si disegna una grande circonferenza (la misura del raggio non deve superare la misura del lato dello specchio) con all'interno un triangolo equilatero.

I due specchi vengono posizionati perpendicolari al foglio poggiato sul tavolo, in modo da formare un angolo. Essi vengono posti con i lati di base coincidenti con i lati del triangolo inscritto. Se si guarda l'immagine riflessa negli specchi si individua un poligono regolare circoscritto alla circonferenza

Conta i lati del poligono circoscritto che vedi riflesso negli specchi

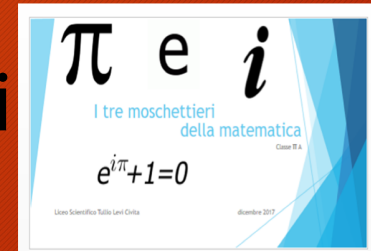


OSSERVAZIONE: Stringendo gli specchi il numero di lati del poligono aumenta e il poligono tende a coincidere sempre di più con circonferenza.

Prof.ssa Franca Donato
L.S. «Tullio Levi Civita»

Spunti di discussione

La potenza del numero i ci offre l'occasione di riflettere:



PROPRIETÀ DI i

Il numero i è il **ciclico di ordine 4** rispetto alla moltiplicazione cioè si ripete con periodo 4 dopo un certo numero di passaggi

$$i = \sqrt{-1}$$

$$i^2 = i \times i = \sqrt{-1} \times \sqrt{-1} = -1$$

$$i^3 = i^2 \times i = -1 \times i = -i$$

$$i^4 = i^2 \times i^2 = (-1) \times (-1) = 1$$

$$i^5 = i^4 \times i = i$$

$$i^6 = i^5 \times i = i^2 = -1$$

$$i^7 = (-1) \times i = -i$$

$$i^8 = i^4 \times i = 1$$

$$i^9 = i$$

✓ Cosa significa applicare l'operatore di potenza dell'unità immaginaria

Prime operazioni con l'unità immaginaria i

Individuare ricorsioni e significato di periodo

4° GRUPPO

Il lavoro proposto dal quarto gruppo ha permesso spunti per introdurre:

- ✓ Come realizzare una presentazione 'accattivante' con figure, transizioni e animazioni che coinvolgono lo spettatore
 - ✓ Analizzare alcune delle formule note in cui compare il numero π
- ✓ Relazioni di interdisciplinarietà che coinvolgono i numeri: poesie in varie lingue,...
 - ✓ Ripercorrere il processo storico che ha portato alle stime dei numeri irrazionali π ed e
- ✓ Relazione tra il coefficiente angolare di una tangente ad una curva e la caratteristica di crescita o decrescenza della curva stessa: crescita e decrescenza
 - ✓ Relazione tra gli insiemi dei numeri complessi, immaginari e reali



Prof.ssa Franca Donato
L.S. «Tullio Levi Civita»

4° GRUPPO

La scoperta del suo valore

E' utilizzato in moltissime formule, ma come si è arrivati a stabilirne il valore che noi oggi diamo per scontato (3.14...)? I primi che cercarono di dare un valore a questo numero furono egizi e babilonesi che con dei metodi antiquati ma ingegnosi ci andarono molto vicino;

BABILONESI



I babilonesi utilizzavano per esprimere il pi greco $\frac{22}{7}$ che corrisponde al rapporto tra la circonferenza e il perimetro di un esagono inscritto. Che da come risultato il valore 3,125

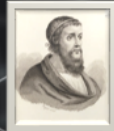
EGIZI



Secondo gli egizi un cerchio con diametro 9 unità è uguale ad un quadrato di lato 8. Ottenendo così il valore di $\left(\frac{16}{9}\right) = 3,160$

Più tardi però...

Archimede calcolò il π attraverso il metodo della compressione utilizzando un poligono di 96 lati ottenne un risultato di 3,14163...



Euclide pur non avendo compreso a pieno la funzione del π , attraverso "gli elementi" ha fornito informazioni per far capire ai futuri matematici l'uso del π .



Archimede



Archimede nacque nel 287 a.C. a Siracusa, compì però i suoi studi di matematica ad Alessandria. Tornato in patria, Archimede allacciò rapporti molto stretti con il re Gerone, che lo sollecitò ad applicare la sua scienza alle cose di tutti i giorni. E le occasioni non mancarono.

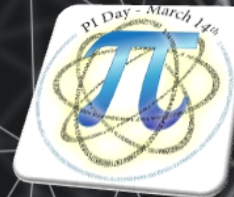
Si racconta, tuttavia, che un soldato romano, durante un saccheggio, l'imbottì in Archimede, col vincente nello studio di alcune figure geometriche da non accorgersi nemmeno di quello che stava accadendo. Il soldato gli ordinò di seguirlo e quando Archimede gli disse di aspettare perché doveva prima risolvere un problema, il legionario, infuriato, l'uccise.

Di Archimede tutti hanno sentito parlare, spesso per il suo comportamento un po' bizzarro, almeno secondo la leggenda: correva in giro nudo per le strade di Siracusa gridando "Eureka!" ("Ho trovato!"); e diceva di poter sollevare la Terra se gli avessero dato un punto di appoggio. Ma se il suo nome è famosissimo, le sue opere oggi sono spesso sconosciute. Archimede, infatti, non scriveva lunghi trattati, ma brevi testi, dove la dimostrazione di molte cose (anche difficili) veniva lasciata al lettore. Si occupava di argomenti che nessuno dei matematici greci suoi contemporanei aveva osato affrontare: il volume della sfera; l'area compresa fra una parabola e una retta; l'equilibrio dei corpi appesi e di quelli immersi nell'acqua ecc.



Pi greco day

Il giorno 14 Marzo alle ore 15.00 viene festeggiato il pi greco day e fu istituito nel 1800, e tale festa viene riconosciuta in tutti i paesi europei e statunitensi. Cade il 14 Marzo ovvero 14.3 in notazione anglosassone, 3.14.



Costante matematica: e

Il numero di Nepero o di Eulero o costante matematica, è un numero moderno che viene spesso usato nella vita quotidiana e può essere espresso in molte forme.

Questo numero è molto importante perché costituisce la base dei logaritmi naturali o neperiani (introdotti da Nepero che pubblicò nel 1614 la prima tavola di logaritmi).

Si dice logaritmo in base a di un numero b l'esponente x che si deve dare ad a per avere b . In simboli si scrive $x = \log_a b$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n$$

DAL 600 AD OGGI

1. Nel 1610 Ludolph Van Ceulen calcolò le prime 35 cifre decimali di π utilizzando poligoni con più di 2 miliardi di lati.
2. Nel 1699 il matematico William Jones utilizzò per la prima volta il simbolo π in onore di Pitagora.
3. Nel 1761 Johann Heinrich Lambert dimostrò che π è irrazionale, dimostrando che l'arco tangente di un qualsiasi numero razionale è irrazionale.
4. Nel 1882 Ferdinand von Lindemann dimostrò che π è un numero trascendente, cioè non è radice di nessun polinomio a coefficienti razionali.
5. Nel 1897 Edwin J. Goodwin propose un teorema di legge con l'intenzione di cambiare il valore del pi greco in un valore più semplice, che avrebbe permesso la quadratura del cerchio. La proposta venne però rifiutata grazie al matematico Clarence Irving Miller.
6. Ad oggi la cifra di pi greco è calcolata sino all'ordine 12.000.000.000.000.



4° GRUPPO

La storia...

Questo numero fu scoperto dal matematico scozzese John Napier (in italiano Nepero); il quale però non lo utilizzò come base per i logaritmi.



Successivamente Leonhard Euler (1701-1783) in italiano Eulero, utilizzò il numero e per definire le potenze con esponente immaginario.



13



...E il suo valore

- Si definisce numero e, il valore che assume l'espressione: $(1+1/n)^n = 2.71...$ Nel 1737 si dimostrò che questa costante è un numero irrazionale, e quindi non è possibile determinarne la sua parte decimale senza ricorrere a un'approssimazione.
- Inoltre nel 1873 Charles Hermite dimostrò che questo numero è anche trascendente, ovvero che non può essere ottenuto attraverso la risoluzione di un'equazione algebrica.
- Attualmente, si conoscono le prime mille miliardi di cifre dello sviluppo decimale di e.
- Inoltre Eulero identificò con la lettera e la somma della serie infinita



14



Un esempio pratico

Il gioco della «guerra» è un gioco di carte in cui i giocatori si dividono il mazzo, ogni giocatore butta la prima carta del mazzo e chi ha la carta più alta vince. In caso di parità si continua fino a quando non c'è un vincitore. Con due mazzi di carte la probabilità che le due carte siano diverse e che quindi non ci sia una situazione di parità è pari a $1/e$.

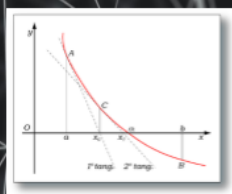


15



Una particolare funzione esponenziale

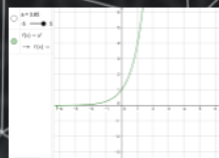
- la funzione esponenziale ha per grafico una curva che cresce prima in modo lento e poi più rapidamente al crescere di x quando $a > 1$ oppure decresce dapprima in modo rapido, poi più dolcemente al crescere di x quando $0 < a < 1$.
- La rapidità con cui cresce o decresce una curva può essere misurata attraverso la pendenza delle rette tangenti.



16



- In generale sappiamo che esisterà sempre un valore di a per cui il coefficiente angolare della tangente sia 1: questo numero si indica con la lettera e.
- La funzione $y = e^x$ ha un grafico del tipo:



la sua simmetrica invece avrà equazione $y = e^{-x}$ e il suo grafico ha la caratteristica che la retta tangente nel punto preso in considerazione ha coefficiente angolare -1.

17



Unità immaginaria

- Introduzione;
- Unità immaginaria;
- I numeri immaginari;
- I numeri complessi;
- La storia;



18



Prof.ssa Franca Donato
L.S. «Tullio Levi Civita»

4° GRUPPO

I numeri immaginari e complessi

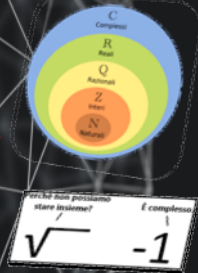
Qual è il numero reale x il cui quadrato è uguale a -4 ?

Il problema non ammette soluzione perché non esiste alcun numero reale che al quadrato fornisca un numero negativo.

L'insieme dei numeri reali ha una "struttura" matematica che permette di risolvere moltissimi problemi, ma è insufficiente nella risoluzione di equazione del tipo: $x^2 + 1 = 0$.

In effetti, quando dobbiamo risolvere un problema reale, il fatto di non trovare le soluzioni di una tale equazione non ci spaventa perché troviamo un riscontro a questa situazione anche dal punto di vista grafico: la parabola $y = x^2 + 1$ non ha intersezioni con l'asse delle x (cioè e quindi accettiamo il fatto che l'equazione $x^2 = -1$ non abbia soluzioni).

Le cose si complicano quando cerchiamo di risolvere un'equazione di terzo grado. Questo fu il motivo principale che spinse i matematici di quel periodo ad ampliare l'insieme R in modo da compiere agevolmente anche le operazioni suggerite dalla formula vista. Essi ammettevano anche l'esistenza di numeri il cui quadrato è negativo, tuttavia provavano diffidenza per questi pegegetti poiché non indicavano quantità tangibili. Solo più tardi questi numeri trovarono la giusta collocazione nel quadro della matematica.



19

Numeri immaginari.....Matematica reale o immaginaria?

Fu **Girolamo Cardano** (Ars Magna, 1545), verso la metà del XVI secolo, poliedrica figura del Rinascimento italiano, riconosciuto anche come il fondatore principale della teoria della probabilità. Il primo a trattare esplicitamente questi numeri (senza ancora usare il simbolo i), tentando di risolvere un problema di algebra.

Nel secolo successivo, numerose equazioni algebriche portarono a soluzioni "immaginarie". Ma fu grazie ad **Euler** che lo studio di tale materia trovò pieno compimento con l'introduzione dell'unità immaginaria i , tale che $i^2 = -1$, che permise di scrivere i numeri nella forma $a + bi$ (dove $a, b \in R$). Dobbiamo a lui l'uso della lettera i per indicare $\sqrt{-1}$ che però fu adottata appunto verso la fine della sua vita in una memoria del 1777, pubblicata sugli Atti dell'Accademia di San Pietroburgo. A Euler siamo anche debitori di molti dei simboli ancora oggi usati in matematica. Fu lui infatti a introdurre la lettera e per indicare la base dei logaritmi naturali, ad usare sistematicamente π per indicare il valore frazionario $3.1415926535...$, e il simbolo per la sommatoria (Σ) per indicare una funzione. Nella tesi di dottorato di **GAUSS** del 1799, è contenuta la dimostrazione del famoso teorema fondamentale dell'algebra, che afferma che ogni polinomio a coefficienti complessi ammette almeno una radice complessa.

L'interpretazione geometrica fu dovuta alla tesi di **MOISÈS** (1799) e **ARGUMENT** (1806) e alla introduzione del piano complesso che oggi porta il loro nome. Nel 1826 Lo studio delle funzioni complesse venne proseguito da **CAUCHY**.



20

Unità immaginaria: i

L'ostacolo del calcolo della radice quadrata di un numero negativo si può superare introducendo quella che si chiama unità immaginaria i , cioè un simbolo che sta ad indicare un "qualcosa" che, elevato al quadrato, dà per risultato -1 .

$$i^2 = -1, \text{ cioè } i = \sqrt{-1}$$

Le potenze di i sono cicliche di periodo quattro;

$$i^1 = i$$

$$i^2 = -1$$

$$i^3 = -i$$

$$i^4 = 1$$

$$i^5 = i$$

$$i^6 = -1$$

$$i^7 = -i$$

$$i^8 = 1$$

Cioè le quattro potenze di i si riproducono indefinitamente nello stesso ordine.

21

I numeri immaginari

Con l'introduzione dell'unità immaginaria, è possibile calcolare la radice quadrata di un qualsiasi numero negativo:

$$\sqrt{-16} = \sqrt{16 \times -1} = 4i$$

Numeri come $\pm 4i$, $\sqrt{3}i$ si dicono numeri immaginari.

Un numero immaginario è dunque il prodotto di un numero reale per l'unità immaginaria.



22

I numeri complessi

- La somma e differenza di due numeri immaginari è ancora un numero immaginario;
- Prodotto e quoziente di due numeri immaginari è un numero reale;
- La somma e la differenza di un numero reale e un numero immaginario non dà origine né ad un numero reale né immaginario;

Chiamiamo numero complesso ogni espressione del tipo $a + bi$ con $a, b \in R$. Il numero a costituisce la parte reale del numero complesso, il numero b il coefficiente della parte immaginaria.

Indichiamo con C l'insieme dei numeri complessi.



L'insieme dei numeri Reali e l'insieme dei numeri Immaginari sono dei sottoinsiemi dell'insieme dei numeri Complessi C ed i hanno un elemento in comune, il numero 0 .

23

Rappresentazione grafica:

- Rappresentazione mediante punti del piano: In un riferimento cartesiano ortogonale:

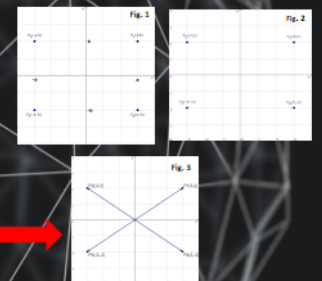
Potremmo...

Sull'asse delle ascisse: i numeri reali; Sull'asse delle ordinate: i numeri immaginari;

...e la coppia corrispondente al numero complesso $a + bi$ è il punto $P(a, b)$ in cui si intersecano le rette $x = a$ e $y = b$. Quindi, a ogni numero complesso $a + bi$ corrisponde un punto $P(a, b)$ nel piano cartesiano. Viceversa, a ogni punto $P(a, b)$ nel piano cartesiano corrisponde un numero complesso $a + bi$.

Il piano in cui sono rappresentati i numeri complessi viene chiamato piano di Gauss o piano complesso.

Esempio: Nella figura 2 un esempio di rappresentazione di numeri complessi: $z_1 = 2 + 3i$, $z_2 = -1 + 2i$, $z_3 = 4 - 2i$ e $z_4 = 1 - 3i$ corrispondono ai punti $P_1(2, 3)$, $P_2(-1, 2)$, $P_3(4, -2)$ e $P_4(1, -3)$.

- Rappresentazione mediante vettori: Considerando sempre il piano cartesiano precedente, possiamo associare ad ogni numero complesso $a + bi$ un vettore \vec{v} che ha origine O e punta in $P(a, b)$. In tal modo, ad ogni numero complesso $a + bi$ corrisponde un vettore \vec{v} che ha origine O e punta in $P(a, b)$.


24

4° GRUPPO

I numeri immaginari

Con l'introduzione dell'unità immaginaria, è possibile calcolare la radice quadrata di un qualsiasi numero negativo:

$$\sqrt{-16} = \sqrt{16} \times \sqrt{-1} = 4i$$

Numeri come $\pm 4i$, $\sqrt{3}i$ si dicono numeri immaginari.

Un numero immaginario è dunque il prodotto di un numero reale per l'unità immaginaria.



22

I numeri complessi

La somma e differenza di due numeri immaginari è ancora un numero immaginario; Prodotto e quoziente di due numeri immaginari è un numero reale.

La somma e la differenza di un numero reale e un numero immaginario non dà origine né ad un numero reale né immaginario.

Chiamiamo numero complesso ogni espressione del tipo $a+ib$ con $a, b \in \mathbb{R}$.

Il numero a costituisce la parte reale del numero complesso, il numero b il coefficiente della parte immaginaria.

Indichiamo con \mathbb{C} l'insieme dei numeri complessi.



23

Rappresentazione grafica:

Rappresentazione mediante punti del piano:

In un riferimento cartesiano ortogonale:

Sull'asse delle ascisse:

I numeri reali;

Sull'asse delle ordinate:

I numeri immaginari;

Un numero complesso $a+ib$ è rappresentato dal punto $P(a, b)$ nel piano complesso. Il numero reale a è la parte reale e b la parte immaginaria. Il numero b è il coefficiente della parte immaginaria.

Il piano nel quale si rappresentano i punti complessi viene chiamato piano di Gauss o piano complesso.

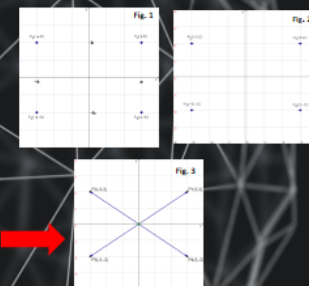
Esempio:

Nella figura 2 un esempio di rappresentazione di numeri complessi: $1+2i, 3-2i, 4+2i, 5-2i$ corrispondono ai punti $P_1(1,2), P_2(3,-2), P_3(4,2), P_4(5,-2)$.

Rappresentazione mediante vettori:

Considerando sempre il piano cartesiano ortogonale:

Qualunque numero complesso $a+ib$ è un vettore OP, essendo P il punto immagine di $a+ib$ nel grafico dei punti sopra rappresentati. I numeri complessi corrispondenti ai punti P_1, P_2, P_3, P_4 sono i vettori $\vec{OP_1}, \vec{OP_2}, \vec{OP_3}, \vec{OP_4}$.



24

L'identità di Eulero

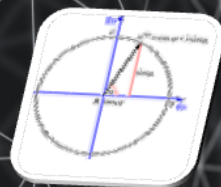
La formula di Eulero dà origine ad un'identità considerata tra le più affascinanti della matematica, nota come **identità di Eulero**, che mette in relazione tra loro cinque simboli che sono alla base dell'analisi matematica: $e, i, \pi, 1$ e 0 .

Infatti, essendo per l'identità di Eulero: $e^{ix} + 1 = 0$

Basta porre $x = \pi$, e allora:

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

La formula contiene una potenza irrazionale (il numero irrazionale e), un numero irrazionale π e collega numeri irrazionali reali (e) e irrazionali immaginari (i).



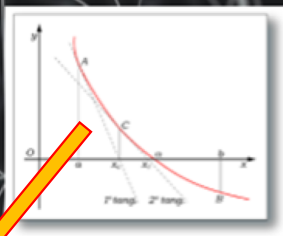
25

Spunti di discussione

4° GRUPPO

Una particolare funzione esponenziale

- la funzione esponenziale ha per grafico una curva che cresce prima in modo lento e poi più rapidamente al crescere di x quando $a > 1$ oppure decresce dapprima in modo rapido, poi più dolcemente al crescere di x quando $0 < a < 1$.
- La rapidità con cui cresce o decresce una curva può essere misurata attraverso la pendenza delle rette tangenti.



- In generale sappiamo che esisterà sempre un valore di a per cui il coefficiente angolare della tangente sia 1. questo numero si indica con la lettera e .
- La funzione $y = e^x$ ha un grafico del tipo:



la sua simmetrica invece avrà equazione $y = e^{-x}$ e il suo grafico ha la caratteristica che la retta tangente nel punto preso in considerazione ha coefficiente angolare -1.

Definizione intuitiva di funzioni crescenti e decrescenti;
Caratteristica dei coefficienti angolari delle tangenti ad una curva crescente e decrescente

Caratteristiche di crescita della funzione esponenziale con base $a > 1$

Caratteristiche di decrescenza della funzione esponenziale con base $0 < a < 1$

Rivisti i due tipi di grafici funzione esponenziale $y = a^x$

Prof.ssa Franca Donato
L.S. «Tullio Levi Civita»

4° GRUPPO

Spunti di discussione

Alcune caratteristiche delle operazioni tra numeri immaginari e introduzione dei numeri complessi

I numeri complessi

- La somma e differenza di due numeri immaginari è ancora un numero immaginario;
- Prodotto e quoziente di due numeri immaginari è un numero reale;
- La somma e la differenza di un numero reale e un numero immaginario non dà origine né ad un numero reale né immaginario;

Chiamiamo numero complesso ogni espressione del tipo $a+ib$ con $a, b \in \mathbb{R}$

Il numero a costituisce la parte reale del numero complesso, il numero b il coefficiente della parte immaginaria.

Indichiamo con \mathbb{C} l'insieme dei numeri complessi.



Relazioni tra gli insiemi numerici:

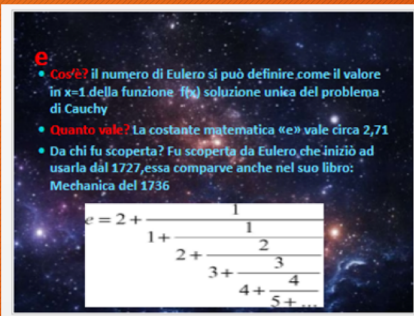
- Insieme dei complessi,
- insieme degli immaginari
- l'insieme dei reali

Prof.ssa Franca Donato
L.S. «Tullio Levi Civita»

5° GRUPPO

Il lavoro proposto dal quinto gruppo ha permesso:

- ✓ Determinare con il calcolo il ragionamento di Archimede per vedere le cifre che costituiscono l'approssimazione di π



- ✓ Dare consigli metodologici nello scegliere il percorso di impostazione di un lavoro: mai mettere argomenti che non si sono ben capiti o sui quali non si sa argomentare.

- ✓ Sintesi per caratterizzare e rappresentare i numeri complessi



Prof.ssa Franca Donato
L.S. «Tullio Levi Civita»

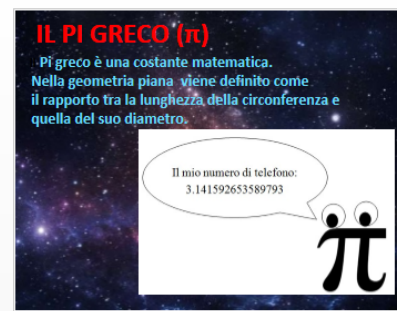
5° GRUPPO



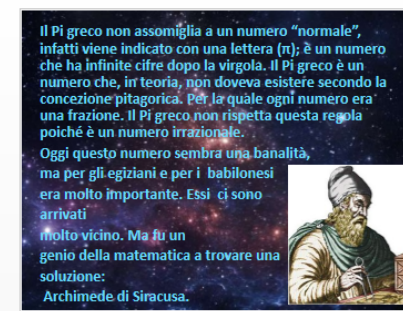
1



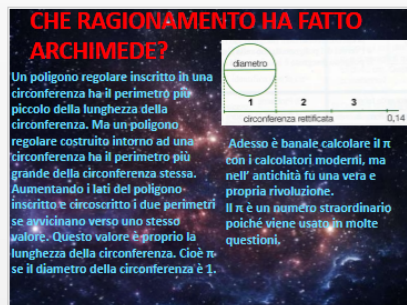
2



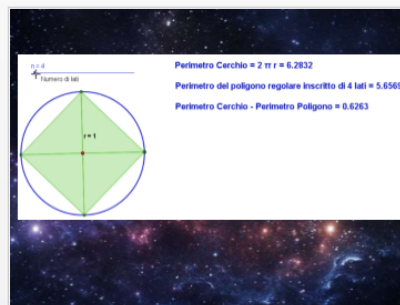
3



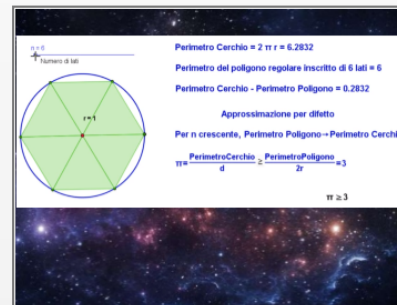
4



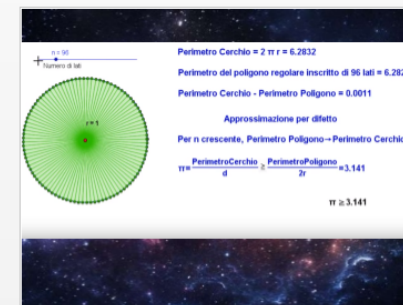
5



6



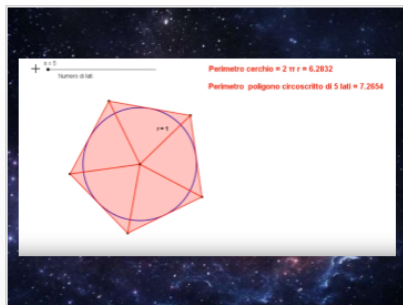
7



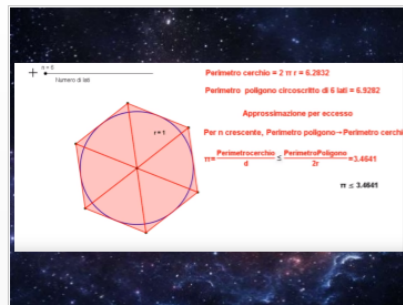
8

Prof.ssa Franca Donato
L.S. «Tullio Levi Civita»

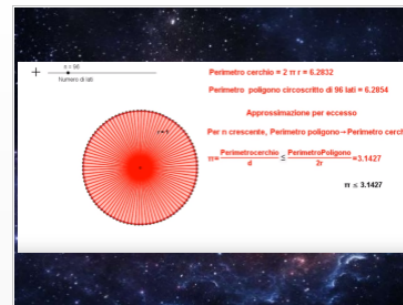
5° GRUPPO



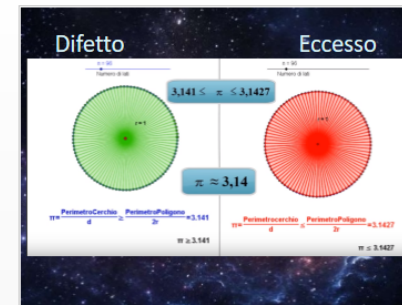
9



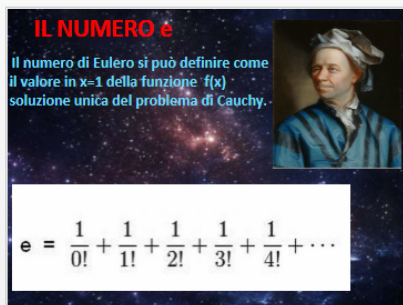
10



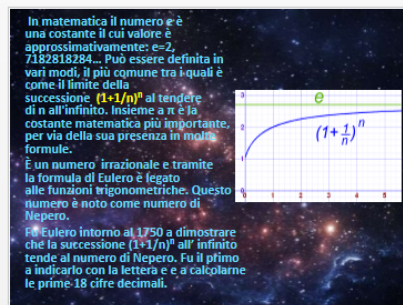
11



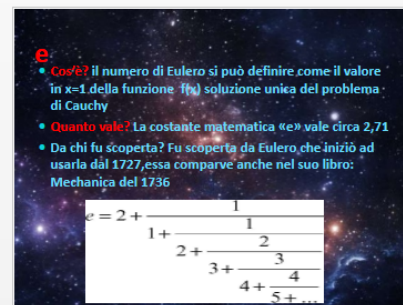
12



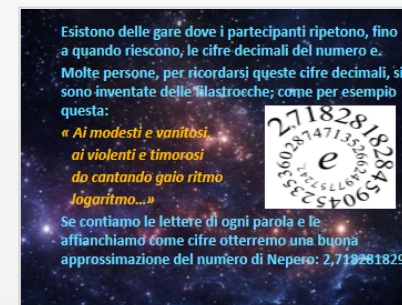
13



14



15



16

Prof.ssa Franca Donato
L.S. «Tullio Levi Civita»

5° GRUPPO

I Numeri Immaginari

Secondo Eulero, ogni numero immaginario può essere scritto come ib , dove b è un numero reale e i l'unità immaginaria, con la proprietà $i^2 = -1$. Eulero utilizzò il numero immaginario $\sqrt{-1}$ in moltissime equazioni e grazie a queste scopri la formula $e^{i\pi} = -1$ successivamente usata da moltissimi matematici.



17

Un fatto curioso è che se questi numeri venissero elevati a diverse potenze, potremmo constatare che il loro risultato si ripeterà ciclicamente:

| | | | | | |
|------------|------------|------------|------------|---------------|---------------|
| $i^0 = 1$ | $i^1 = i$ | $i^2 = -1$ | $i^3 = -i$ | $i^4 = 1$ | $i^5 = i$ |
| $i^6 = -1$ | $i^7 = -i$ | $i^8 = 1$ | $i^9 = i$ | $i^{10} = -1$ | $i^{11} = -i$ |

18

i
Cos'è? In matematica l'unità immaginaria i permette di estendere il campo dei numeri reali \mathbb{R} al campo dei numeri complessi \mathbb{C} .
Quanto vale? L'unità immaginaria è caratterizzata dall'essere il numero il cui quadrato è uguale a -1 .
Perché è utile? La necessità di estendere il campo dei numeri reali nasce dal fatto che non è possibile calcolare la radice quadrata di un numero negativo e più in generale che non tutte le equazioni polinomiali hanno una soluzione in \mathbb{R} .



19

Formula di Eulero

Nella formula di Eulero entrano in relazione il numero immaginario i , le potenze del numero e e le funzioni trigonometriche seno e coseno:
$$e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha$$



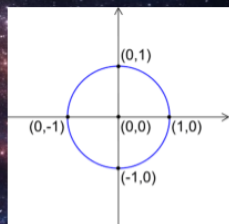
20

Questa formula può anche essere vista come:

$e^{i\pi} = -1$

Da cui deriva:

$$e^{i(\pi)} = e^{i\pi} = -1 + i0 = -1$$



21

GRAZIE PER
L'ATTENZIONE!

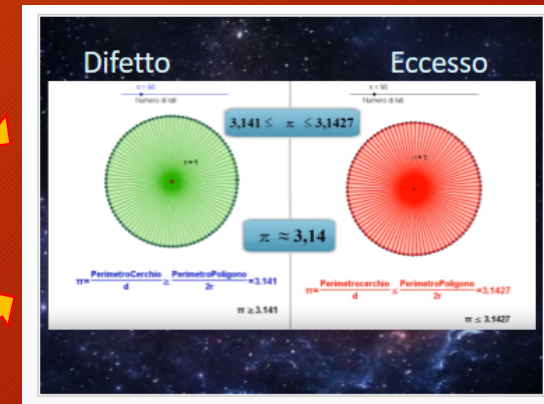
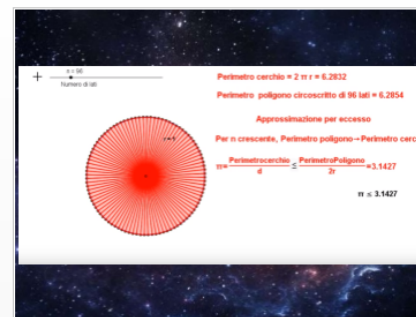
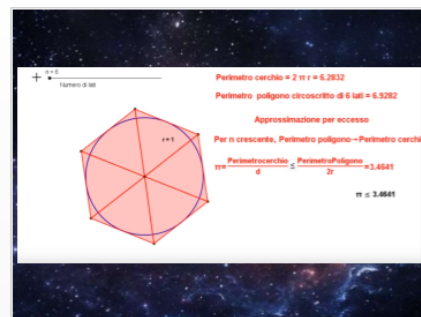
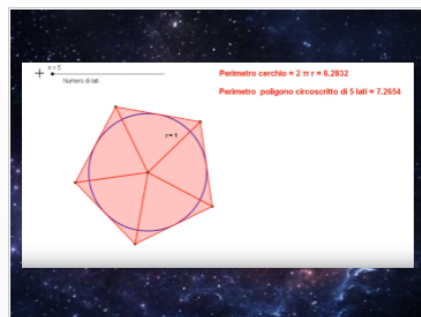
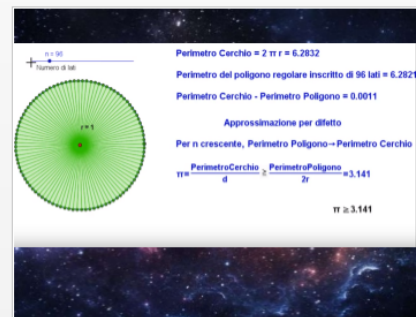
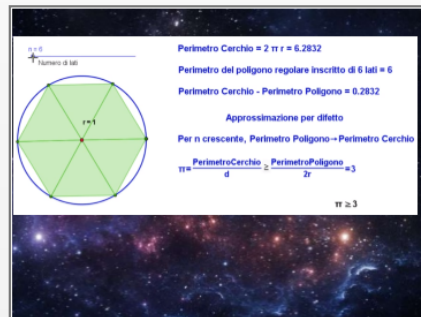
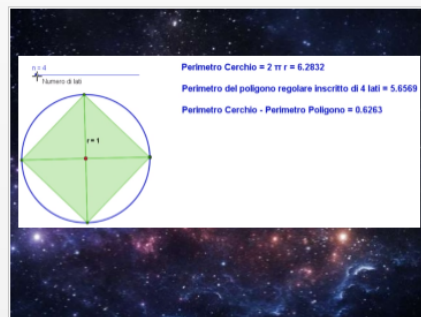
2a
Marco Besca
Gabriele Sammartino
Riccardo Vela

22

Prof.ssa Franca Donato
L.S. «Tullio Levi Civita»

5° GRUPPO Argomenti approfonditi:

- ✓ Determinare con il calcolo il ragionamento di Archimede per vedere le cifre che costituiscono l'approssimazione di π



Determinazione del perimetro di poligoni regolari inscritti e circoscritti: quadrato, esagono,...

Prof.ssa Franca Donato
L.S. «Tullio Levi Civita»



Ringrazio per l'attenzione

Prof.ssa Franca Donato
L.S. «Tullio Levi Civita»