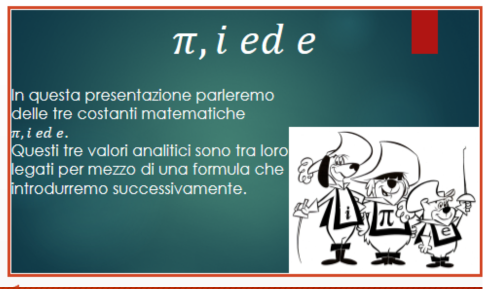
2° GRUPPO



Il lavoro proposto dal secondo gruppo è risultato essere una buona sintesi degli argomenti introdotti nella presentazione precedente + spunti per introdurre:

- ✓ Significato dell'operatore logaritmo di un numero
- ✓ Sintesi per caratterizzare e rappresentare i numeri complessi

Prof.ssa Franca Donato
L.S. «Tullio Levi Civita»

2° GRUPPO

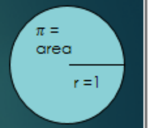
π, i ed e

In questa presentazione parleremo delle tre costanti matematiche π, i ed e.
Questi tre valori analitici sono tra loro legati per mezzo di una formula che introdurremo successivamente.

1

π

- Il pi greco è indicato con la lettera greca π (pi) viene visto come il rapporto tra la lunghezza di una circonferenza ed il suo diametro o anche come l'area di un cerchio di raggio 1.
- Il pi greco è detto anche costante di Archimede, numero di Ludolph o costante di Ludolph, esso è un numero composto da infinite cifre decimali.
- Il pi greco è un numero irrazionale quindi non può essere scritto come quoziente di due interi.
- È definito come numero trascendente, ciò fa si che non vi siano polinomi con coefficienti razionali di cui π è radice, è oltretutto impossibile esprimerlo usando un numero finito di interi, di frazioni e di loro radici.



2

storia del π

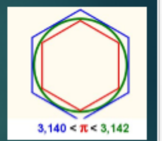
I primi a calcolare il π furono gli Egizi e i Babilonesi che si avvicinarono di molto al suo vero valore (3.160 e 3.120 rispettivamente).

Secoli dopo, Archimede riuscì a ottenere un valore molto più preciso (3.14).

3

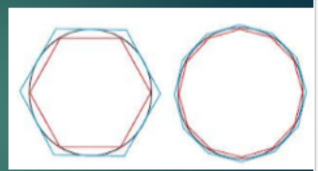
L'esperimento di Archimede

Archimede notò che il perimetro del poligono inscritto alla circonferenza(p1) era minore alla circonferenza stessa(c), la quale, a sua volta era minore del perimetro del poligono in cui era circoscritta(p2).
Inoltre capì che raddoppiando i lati sia di p1 che di p2 i poligoni si avvicinavano verso uno stesso valore.
Aumento via via il numero di lati, da 6 lati per poligono fino ad arrivare a 96 lati, ottenendo per il perimetro interno un valore pari a 3.14084 e per quello esterno un valore di 3.142858.
Quindi arrivò alla conclusione che π è compreso tra questi due valori.



4

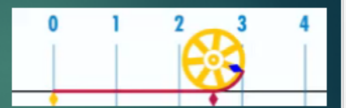
Inoltre capì che raddoppiando i lati sia di p1 che di p2 i poligoni si avvicinavano verso uno stesso valore.
Aumento via via il numero di lati, da 6 lati per poligono fino ad arrivare a 96 lati, ottenendo per il perimetro interno un valore pari a 3.14084 e per quello esterno un valore di 3.142858.
Quindi arrivò alla conclusione che π è compreso tra questi due valori



5

Il secondo esperimento

Il secondo esperimento che Archimede condusse consisteva nel prendere un sistema di riferimento(retta orientata) e la divise in unità pari al diametro di un ipotetico cerchio. Prese un punto di riferimento su di esso e notò che dopo una rotazione completa il diametro batteva sulla retta ad un valore di circa 3,14.



6

Prof.ssa Franca Donato
L.S. «Tullio Levi Civita»

2° GRUPPO

i (unità immaginaria)

Il valore « *i* » (unità immaginaria) rappresentata a volte dalla lettera greca iota permette di estendere il campo dei numeri reali al campo dei numeri complessi.
Esso è caratterizzato dall'essere in numero il cui valore al quadrato è -1.
La necessità di ampliare il campo dei numeri reali nasce dal fatto di non poter calcolare la radice quadrata di un numero negativo, e più in generale che non tutte le funzioni polinomiali *f*(x)=0 hanno una soluzione nell'insieme dei numeri reali.

7

in particolare la funzione $x^2+1=0$ che non ha soluzioni reali ha soluzione x=*i*.

$x^2+1=0$
$x^2=-1$
$X=\sqrt{-1}$
X= i

i è utilizzata in generale per dimostrare operatori come le radici di numeri negativi che non hanno soluzioni tra i numeri reali.

Es. $\sqrt{-4}=2i$

8

e(numero di Nepero o di Eulero)

La terza costante di cui vi parleremo è « e ».
è un numero irrazionale e trascendente, viene chiamato nell'ambito internazionale numero di Eulero ma in Italia è anche detto numero di Nepero.
È la costante alla base della funzione esponenziale e^x e del logaritmo naturale insieme al pi greco è una delle costanti matematiche più importanti per via della sua presenza in molte formule apparentemente non correlate.

e

e=2.71828...

9

La definizione del numero di Nepero può avvenire in vari modi, ad esempio con le formule:

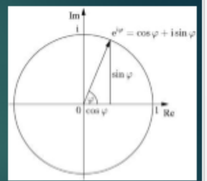
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \quad \text{oppure} \quad lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

10

Identità di Eulero

L'identità di Eulero, pubblicata per la prima volta nella sua *Introduzione* (1748), mette in relazione queste tre costanti: π, i, e attraverso la formula $e^{i\pi}+1=0$ cioè $e^{i\pi}= -1$

Essa equivale a $e^{i\pi}= \cos \pi + i \sin \pi$
Cos π = -1
Sin π = 0
Ciò equivale a $e^{i\pi}= -1 + 0$
$e^{i\pi}= -1$



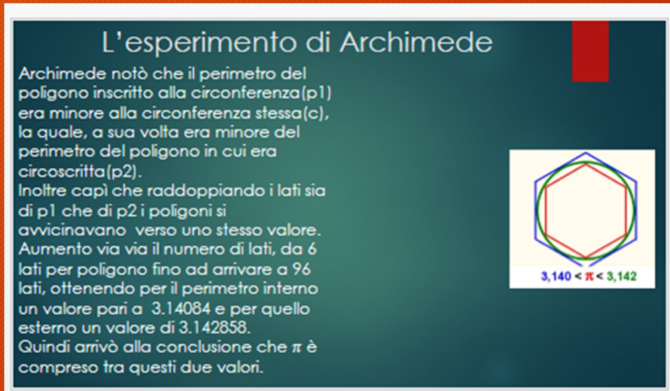
11

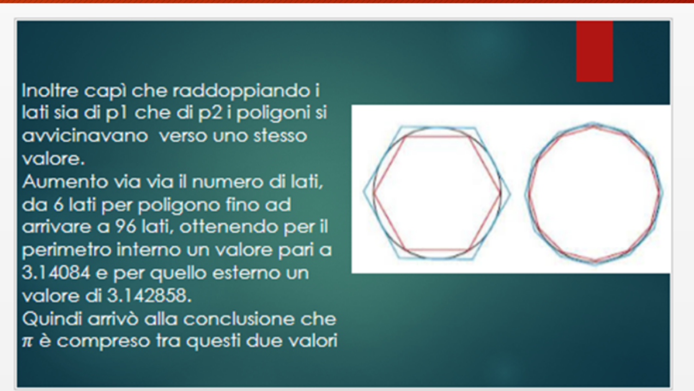
Prof.ssa Franca Donato
L.S. «Tullio Levi Civita»

2° GRUPPO numero π

- Caratteristiche fisiche del numero
- Varie definizioni di π

- Problema della sua determinazione





Prof.ssa Franca Donato
L.S. «Tullio Levi Civita»

2° GRUPPO

- Caratteristiche del numero *i*

i (unità immaginaria)

Il valore « *i* » (unità immaginaria) rappresentata a volte dalla lettera greca iota permette di estendere il campo dei numeri reali al campo dei numeri complessi.
Esso è caratterizzato dall'essere in numero il cui valore al quadrato è -1.
La necessità di ampliare il campo dei numeri reali nasce dal fatto di non poter calcolare la radice quadrata di un numero negativo, e più in generale che non tutte le funzioni polinomiali *f*(x)=0 hanno una soluzione nell'insieme dei numeri reali.

- Necessità dell'introduzione

in particolare la funzione $x^2+1=0$ che non ha soluzioni reali ha soluzione x=*i*.

$x^2+1=0$
$x^2=-1$
$X=\sqrt{-1}$
X= i

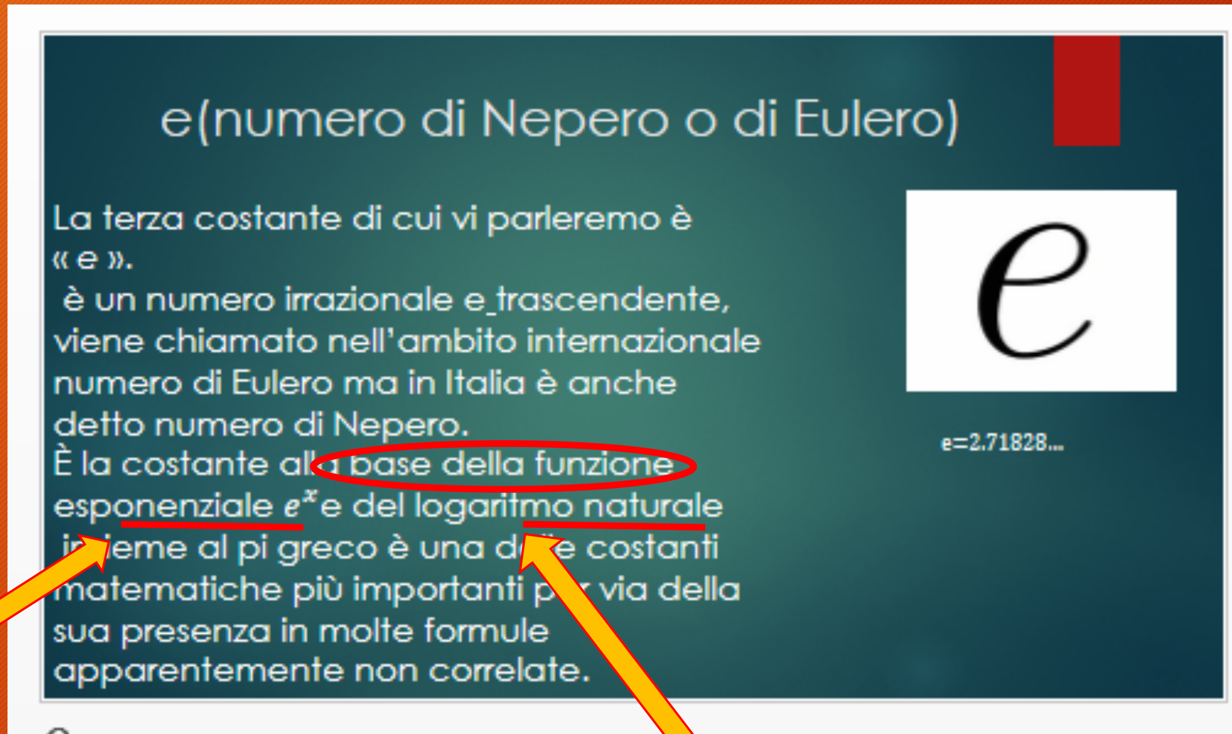
i è utilizzata in generale per dimostrare operatori come le radici di numeri negativi che non hanno soluzioni tra i numeri reali.

Es. $\sqrt{-4}=2i$

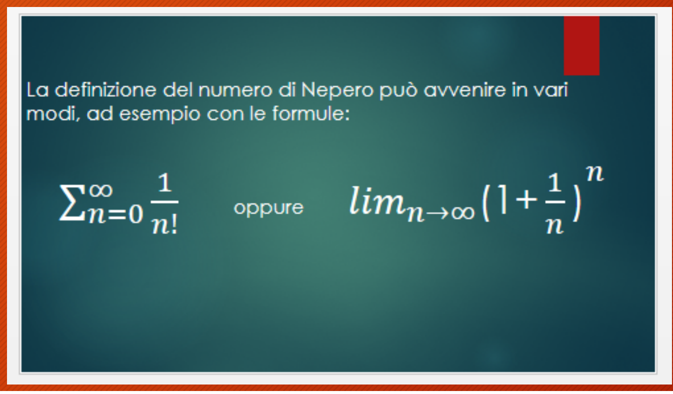
Prof.ssa Franca Donato
L.S. «Tullio Levi Civita»

2° GRUPPO

- Caratteristiche del numero *e*



- Modi diversi per definire *e*



Questo è stato lo spunto per introdurre e discutere sul significato del logaritmo di un numero

Prof.ssa Franca Donato
L.S. «Tullio Levi Civita»

2° GRUPPO

- Identità di Eulero

Identità di Eulero

L'identità di Eulero, pubblicata per la prima volta nella sua *Introduzione* (1748), mette in relazione queste tre costanti: π, i , e attraverso la formula $e^{i\pi}+1=0$ cioè $e^{i\pi}= -1$

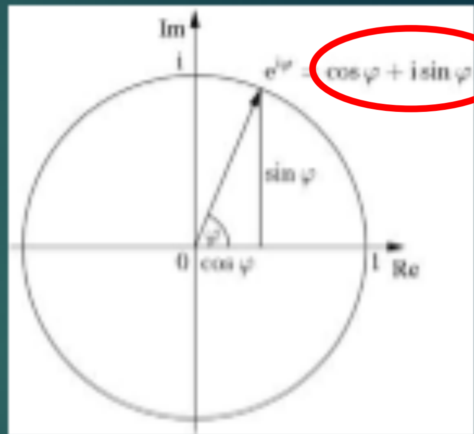
Essa equivale a $e^{i\pi}= \cos\pi + i \sin\pi$

$\text{Cos } \pi = -1$

$\text{Sin } \pi = 0$

Ciò equivale a $e^{i\pi}= -1 + 0$

$e^{i\pi}= -1$



La rappresentazione di un numero complesso che ha modulo 1: forma trigonometrica.

Prof.ssa Franca Donato
L.S. «Tullio Levi Civita»

Spunto di discussione

La rappresentazione geometrica dei numeri complessi ci offre l'occasione di riflettere:

- ✓ l'insieme dei numeri reali, è rappresentabile su una retta orientata

➡ è un insieme ordinato, nel senso che in esso è possibile definire le relazioni di ''essere maggiore'' e di ''essere minore''

- ✓ l'insieme dei numeri complessi, è rappresentabile su un piano (piano di Gauss)

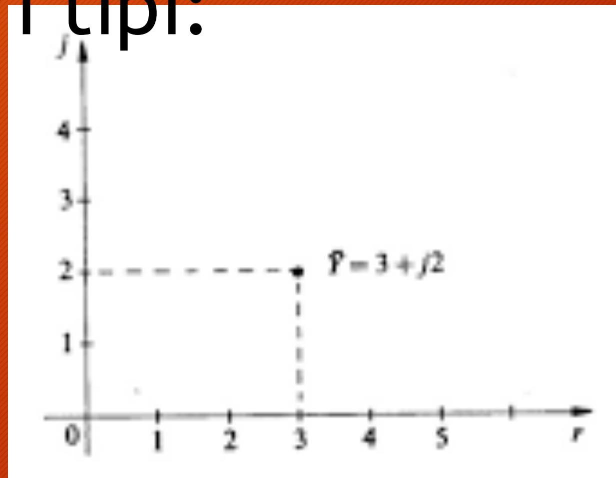
➡ è un insieme ordinato? In esso è possibile definire le relazioni di ''essere maggiore'' e di ''essere minore''?

Prof.ssa Franca Donato
L.S. «Tullio Levi Civita»

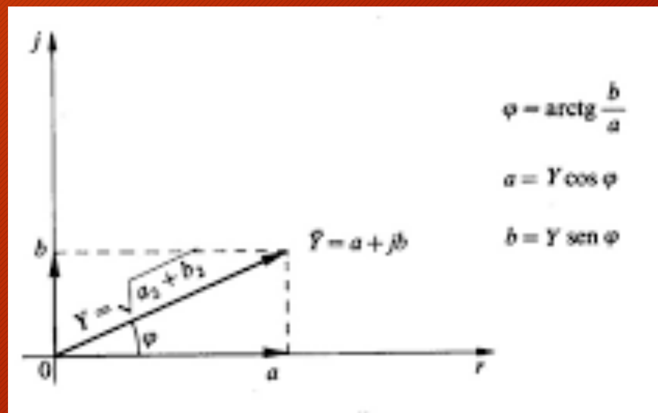
Spunto di discussione

La rappresentazione dei numeri complessi nel piano di Gauss può essere di vari tipi:

- ✓ Un numero complesso qualunque *z=a+ib* può essere rappresentato da un punto P (l’ascissa è la *a* e l’ordinata *b* è il coefficiente della parte immaginaria)



- ✓ Un numero complesso qualunque *z* può essere rappresentato da un vettore (un modulo e una direzione)



Spunto di discussione
La rappresentazione analitica dei numeri complessi può essere di vari tipi

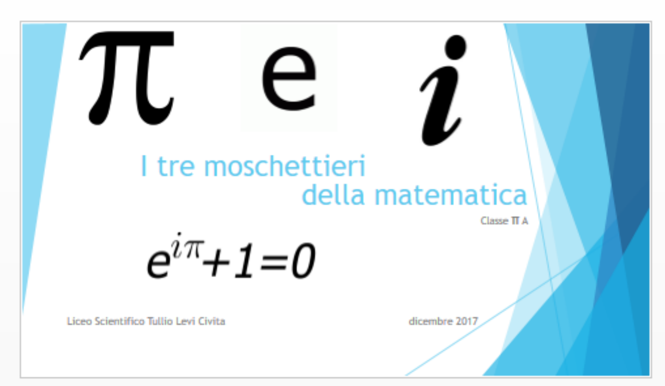
- ✓ Un numero complesso qualunque z può essere scritto in forma algebrica ➡ $$z = a + i\,b$$

- ✓ Un numero complesso z (con modulo unitario) può essere scritto in forma trigonometrica ➡ $$z = cos\varphi + i\;sen\varphi$$

- ✓ l'insieme dei numeri complessi, può essere scritto in una terza modalità utile per operare con i complessi (non abbiamo i mezzi matematici per dimostrare) ➡ $$e^{i\vartheta} = cos\varphi + i\;sen\varphi$$

Prof.ssa Franca Donato
L.S. «Tullio Levi Civita»

3° GRUPPO



Il lavoro proposto dal terzo gruppo è risultato essere interessante in quanto contiene:

- ✓ Proposta e realizzazione di una ‘’**attività laboratoriale**” per verificare l’idea di Archimede per determinare approssimazione di π

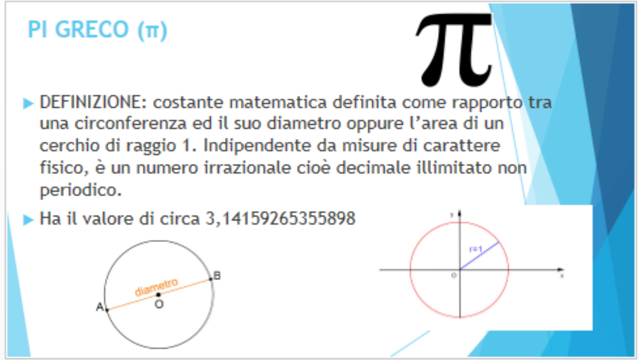
- ✓ Proprietà ciclica dell’unità immaginaria

Prof.ssa Franca Donato
L.S. «Tullio Levi Civita»

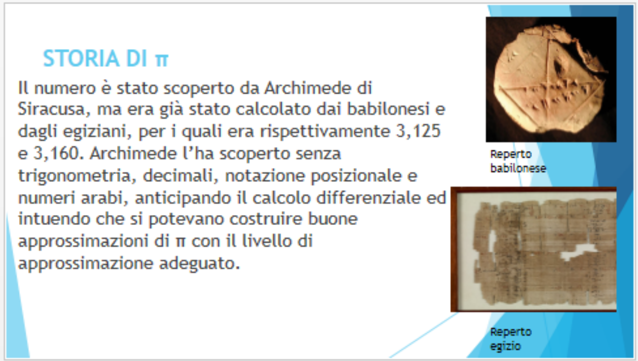
3 ° GRUPPO

1

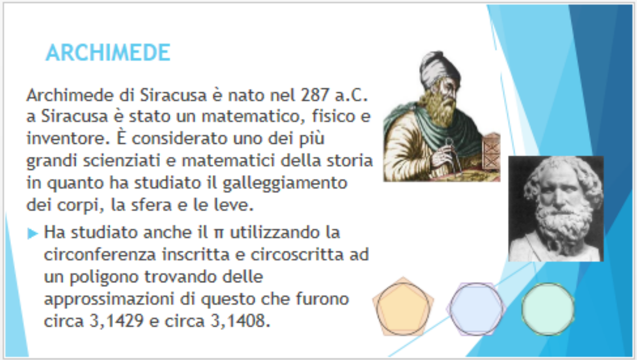
2



3



4



5

6

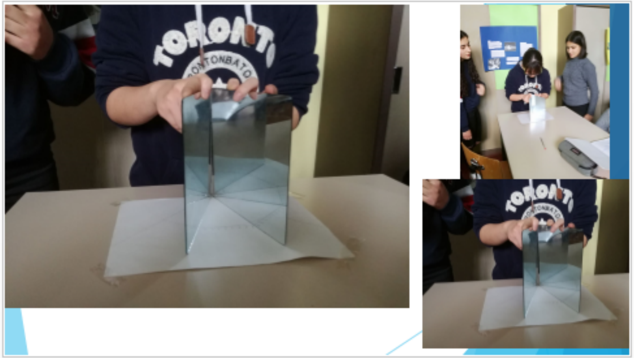
Prof.ssa Franca Donato
L.S. «Tullio Levi Civita»

3° GRUPPO

ESPERIMENTO

- Per verificare l'osservazione di Archimede abbiamo costruito un apparato formato da due specchi rettangolari che avevano un lato in comune. Questi specchi erano posizionati su un foglio sul quale era disegnato un triangolo equilatero inscritto in una circonferenza. Gli specchi coincidevano con i lati del triangolo.
- Stringendo gli specchi il numero di lati del poligono aumentava e la circonferenza andava a coincidere sempre di più con il poligono.

7



8

EULERO

Eulero è stato un matematico e fisico svizzero.

È considerato il più importante matematico dell'Illuminismo ed è noto per essere tra i più prolifici di tutti i tempi e ha fornito contributi storicamente cruciali in svariate aree: analisi infinitesimale, funzioni speciali, meccanica razionale, meccanica celeste, teoria dei numeri, teoria dei grafi.

Buona parte della simbologia matematica tuttora in uso venne introdotta da Eulero, per esempio i per l'unità immaginaria, Σ come simbolo per la sommatoria, $f(x)$ per indicare una funzione e la lettera π per indicare pi greco e definì anche la costante matematica e.

Basilea, 1707 - San Pietroburgo, 1783

9

COSTANTE DI NEPERO (e)

Il numero e è una costante matematica e un numero **irrazionale**, cioè illimitato non periodico, e **trascendente**, cioè non è soluzione di nessuna equazione polinomiale.

Merchiston Castle, 1550 - Edimburgo, 4 aprile 1617

Il numero di Nepero è detto anche numero di Eulero perché è stato scoperto da quest'ultimo ma in Italia è chiamato numero di Nepero in onore del "matematico" Nepero che ha lavorato per vari anni ai logaritmi. Il numero ha un valore circa di 2,71828...

10

COME SI DEFINISCE:

Questo numero o, per meglio dire, costante si può definire in due modi:

- Come valore del limite:

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

11

COME SI DEFINISCE:

- Come la sommatoria:

$$e := \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!} = \frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\cdots$$

12

Prof.ssa Franca Donato
L.S. «Tullio Levi Civita»

3 ° GRUPPO

STORIA DI *e*

Fu Eulero, nel 1750, a dimostrare che la successione $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ all'infinito tende al numero di Nepero. Ne calcolò le prime 18 cifre e lo chiamò *e*: un numero irrazionale che non ha un'interpretazione geometrica, al contrario di π. Si sostiene che *e* fu usata dai greci per il Partenone e dagli Egizi per la grande piramide perché in queste strutture si trovano due valori tipici il cui rapporto tende ad *e*.

Partenone

Grande piramide

13

SIMBOLO *e*

Probabilmente la lettera *e* fu scelta perché iniziale della lettera "esponenziale" oppure perché era la prima lettera dell'alfabeto latino non ancora utilizzata ma è da escludere la possibilità che si chiami in questo modo a causa di Eulero.

14

UNITÀ IMMAGINARIA (*i*)

L'unità immaginaria o numero *i* può essere definita come il numero che elevato al quadrato da come risultato -1 e come soluzione dell'equazione:

$x^2 + 1 = 0$

Il numero *i* permette di estendere al campo dei numeri complessi.

I numeri complessi sono dei numeri che hanno sia la parte reale sia la parte immaginaria come ad esempio 3+5*i*.

$$i^2 = -1$$

15

STORIA DI *i*

Il numero i fa la sua prima apparizione nel XVI secolo nelle formule risolutive di equazioni di 3° e 4° grado.

Non erano però considerati veri e propri numeri, poiché non potevano essere rappresentati sulla retta dei numeri reali pertanto si introdusse **l'asse degli immaginari** e in seguito il piano dei numeri complessi costituiti da una parte reale e da una parte immaginaria.

Furono accettati come numeri solo nel XVIII secolo, grazie al tedesco Gauss. Oggi i numeri complessi sono molto utilizzati

$$i = \sqrt{-1}$$

16

NUMERI IMMAGINARI E NUMERI COMPLESSI

$\sqrt{-4} = ?$

Immaginiamo di dover determinare la radice di -4.

Sappiamo, per le proprietà delle radici, che la radice quadrata di un prodotto è uguale al prodotto delle radici quadrate. Quindi $\sqrt{-4}$ è uguale alla radice di 4 per la radice di -1, cioè 2*i*.

2*i* è un numero immaginario. È possile operare con i numeri immaginari: se sommassi un numero immaginario ad un numero reale (per esempio 2*i* + 3) otterrei un numero complesso. Si può operare con i numeri complessi tenendo conto delle regole del calcolo letterale.

$$\sqrt{-4} = ? = \sqrt{4} \times \sqrt{-1} = 2i$$

17

PROPRIETÀ DI *i*

Il numero *i* è il **ciclico di ordine 4** rispetto alla moltiplicazione cioè si ripete con periodo 4 dopo un certo numero di passaggi

$i = \sqrt{-1}$

$i^2 = i \times i = \sqrt{-1} \times \sqrt{-1} = -1$

$i^3 = i^2 \times i = -1 \times i = -i$

$i^4 = i^2 \times i^2 = (-1) \times (-1) = 1$

$i^5 = i^4 \times i = i$

$i^6 = i^5 \times i = i^2 = -1$

$i^7 = (-1) \times i = -i$

$i^8 = i^4 \times i = 1$

$i^9 = i$

18

Prof.ssa Franca Donato
L.S. «Tullio Levi Civita»

3° GRUPPO

LA SINTESI DI EULERO

La seguente formula, definita da molti come «la più bella della matematica», riunisce tutti e tre i “moschettieri”

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

19

sa Franca Donato
Tullio Levi Civita»

ATTIVITA' LABORATORIALE

3° GRUPPO

SCOPO- l'attività si propone di visualizzare l'idea di Archimede: all'aumentare dei lati di un poligono regolare circoscritto ad un circonferenza esso tenderà a coincidere con la circonferenza.

MATERIALI-2specchi piani rettangolari; Foglio di carta

PROCEDURA- Sul foglio di carta, si disegna una grande circonferenza (la misura del raggio non deve superare la misura del lato dello specchio) con all'interno un triangolo equilatero.
I due specchi vengono posizionati perpendicolari al foglio poggiato sul tavolo, in modo da formare un angolo. Essi vengono posti con i lati di base coincidenti con i lati del triangolo inscritto.
Se si guarda l'immagine riflessa negli specchi si individua un poligono regolare circoscritto alla circonferenza

- ✓ Conta i lati del poligono circoscritto che vedi riflesso negli specchi
- ✓ Cosa succede se l'angolo tra gli specchi diminuisce?

Prof.ssa Franca Donato
L.S. «Tullio Levi Civita»

ATTIVITA' LABORATORIALE

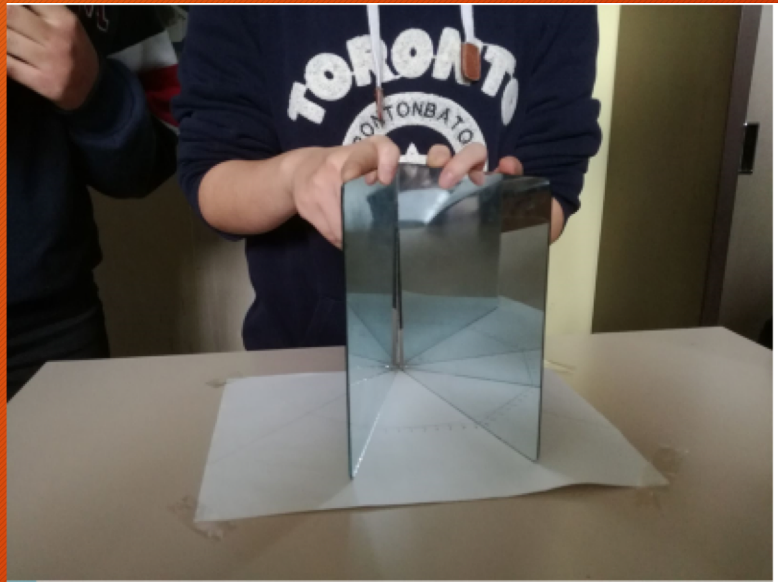
3° GRUPPO

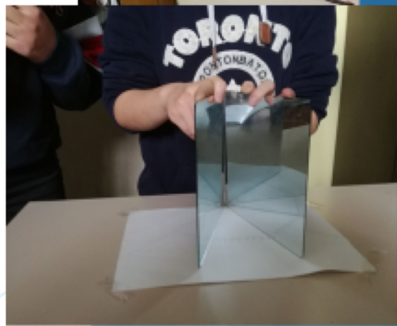
SCOPO- l'attività si propone di visualizzare l'idea di Archimede: all'aumentare dei lati di un poligono regolare circoscritto ad un circonferenza esso tenderà a coincidere con la circonferenza.

MATERIALI-2specchi piani rettangolari
Foglio di carta

PROCEDURA- Sul foglio di carta, si disegna una grande circonferenza (la misura del raggio non deve superare la misura del lato dello specchio) con all'interno un triangolo equilatero.
I due specchi vengono posizionati perpendicolari al foglio poggiato sul tavolo, in modo da formare un angolo. Essi vengono posti con i lati di base coincidenti con i lati del triangolo inscritto.
Se si guarda l'immagine riflessa negli specchi si individua un poligono regolare circoscritto alla circonferenza

Conta i lati del poligono circoscritto che vedi riflesso negli specchi

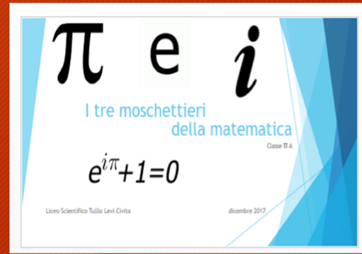




OSSERVAZIONE: Stringendo gli specchi il numero di lati del poligono aumenta e il poligono tende a coincidere sempre di più con circonferenza.

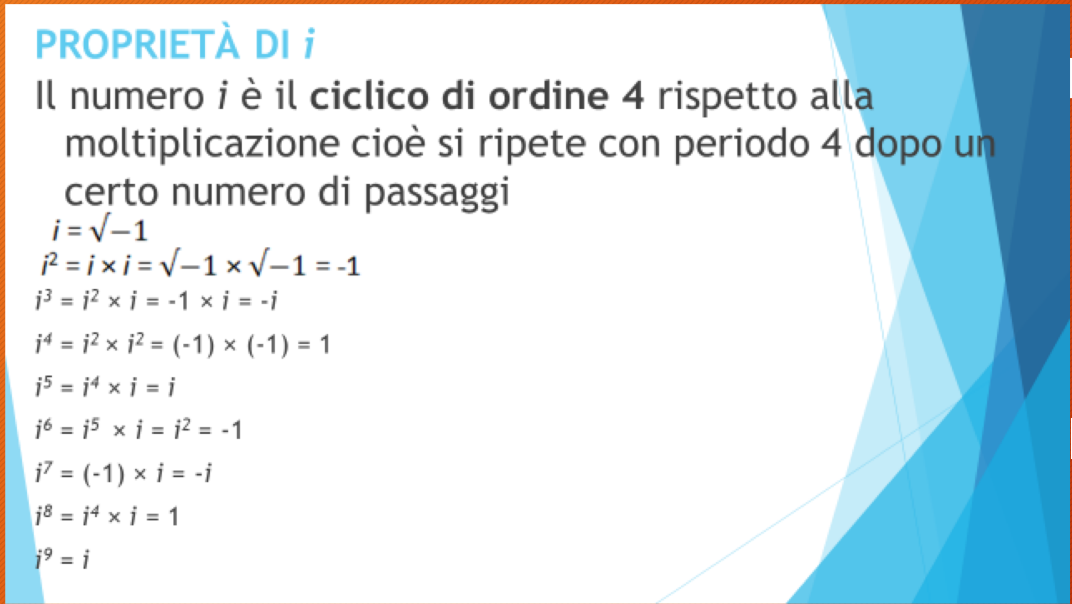
Prof.ssa Franca Donato
L.S. «Tullio Levi Civita»

3° GRUPPO



Spunti di discussione

La potenza del numero i ci offre l’occasione di riflettere:



PROPRIETÀ DI *i*

Il numero *i* è il **ciclico di ordine 4** rispetto alla moltiplicazione cioè si ripete con periodo 4 dopo un certo numero di passaggi

$i = \sqrt{-1}$

$i^2 = i \times i = \sqrt{-1} \times \sqrt{-1} = -1$

$i^3 = i^2 \times i = -1 \times i = -i$

$i^4 = i^2 \times i^2 = (-1) \times (-1) = 1$

$i^5 = i^4 \times i = i$

$i^6 = i^5 \times i = i^2 = -1$

$i^7 = (-1) \times i = -i$

$i^8 = i^4 \times i = 1$

$i^9 = i$

✓ Cosa significa applicare l’operatore di potenza dell’unità immaginaria

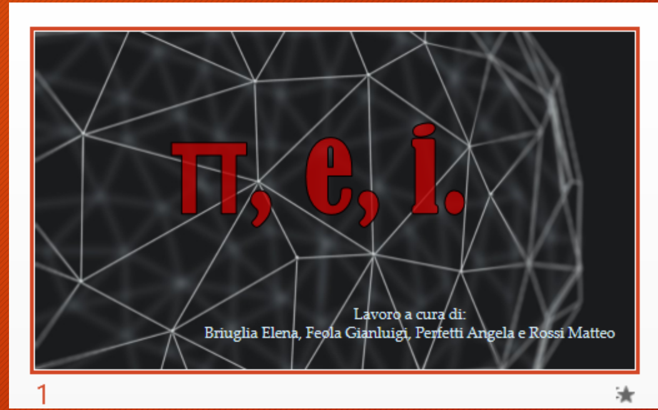
Prime operazioni con l’unità immaginaria i

Individuare ricorsioni e significato di periodo

Prof.ssa Franca Donato
L.S. «Tullio Levi Civita»

4° GRUPPO

Il lavoro proposto dal quarto gruppo ha permesso spunti per introdurre:



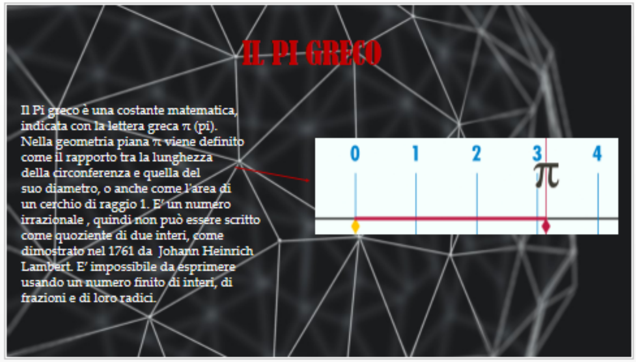
- ✓ Come realizzare una presentazione ‘accattivante’ con figure, transizioni e animazioni che coinvolgono lo spettatore
  - ✓ Analizzare alcune delle formule note in cui compare il numero π
- ✓ Relazioni di interdisciplinarietà che coinvolgono i numeri: poesie in varie lingue,…
  - ✓ Ripercorrere il processo storico che ha portato alle stime dei numeri irrazionali π ed *e*
- ✓ Relazione tra il coefficiente angolare di una tangente ad una curva e la caratteristica di crescenza o decrescenza della curva stessa: crescenza e decrescenza
  - ✓ Relazione tra gli insiemi dei numeri complessi, immaginari e reali

Prof.ssa Franca Donato
L.S. «Tullio Levi Civita»

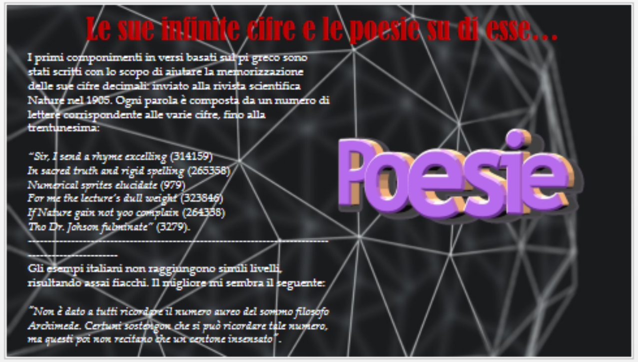
4° GRUPPO

1

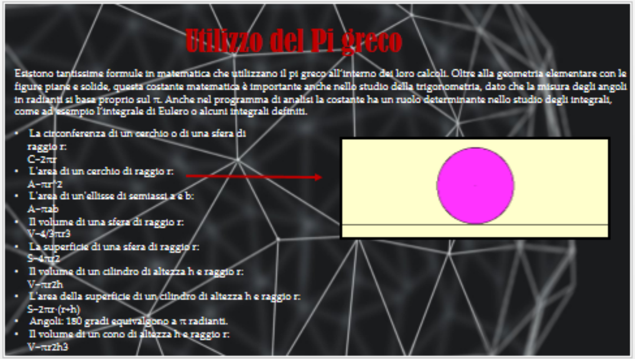
2



3



4



5

6

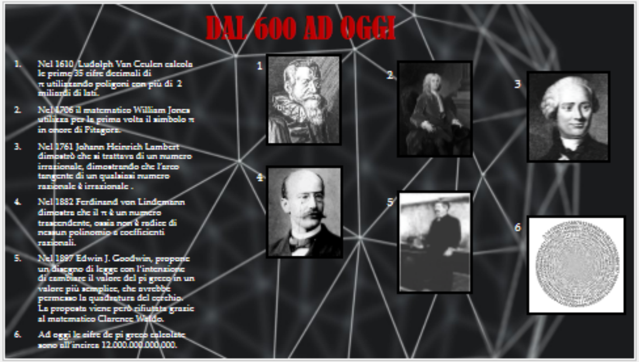
Prof.ssa Franca Donato
L.S. «Tullio Levi Civita»

4° GRUPPO

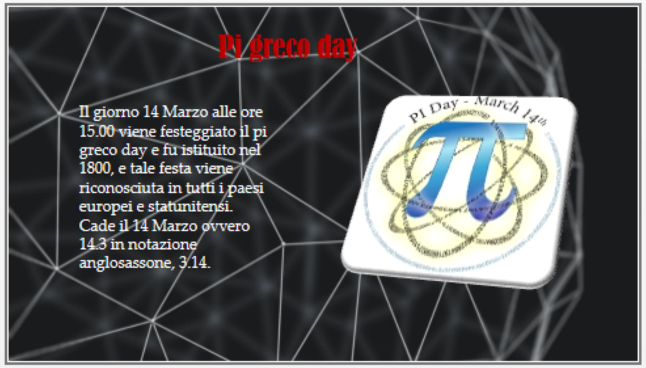
7

8

9



10



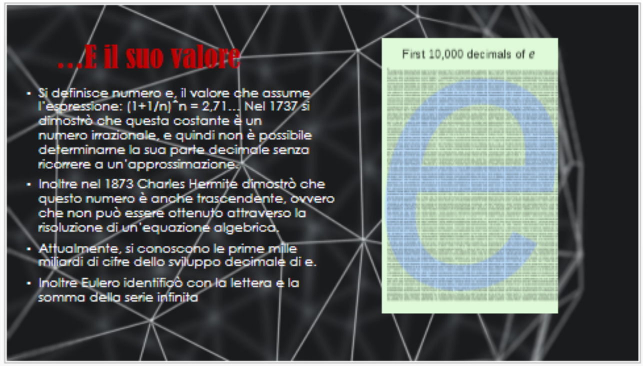
11

12

Prof.ssa Franca Donato
L.S. «Tullio Levi Civita»

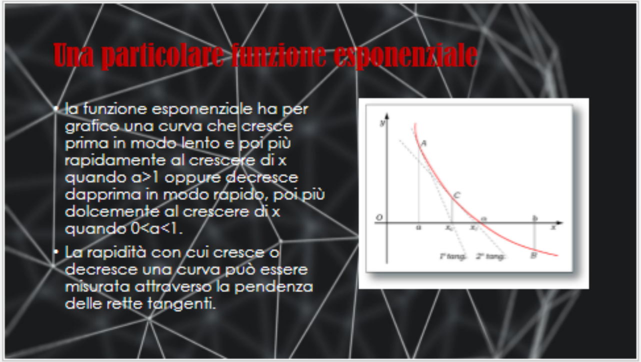
4° GRUPPO

13

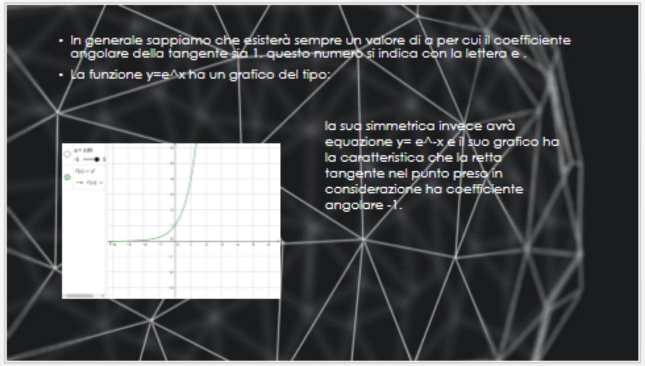


14

15



16

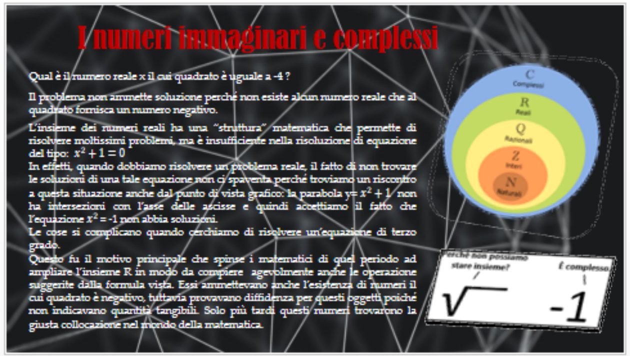


17

18

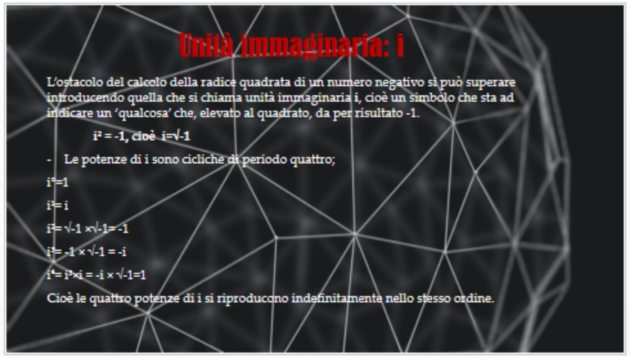
Prof.ssa Franca Donato
L.S. «Tullio Levi Civita»

4° GRUPPO

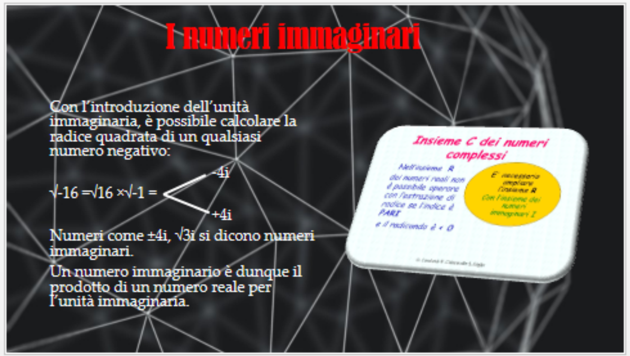


19

20

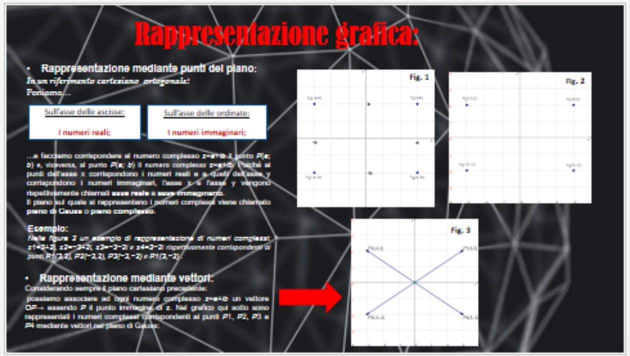


21



22

23



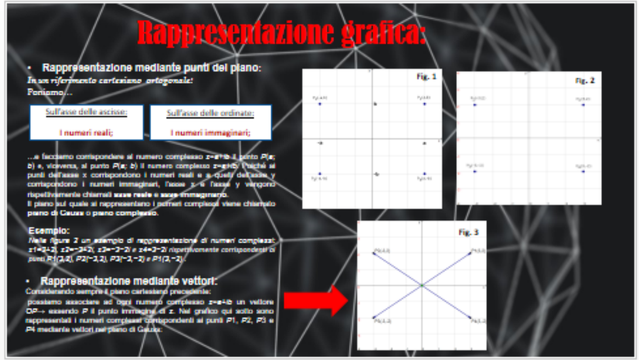
24

Prof.ssa Franca Donato
L.S. «Tullio Levi Civita»

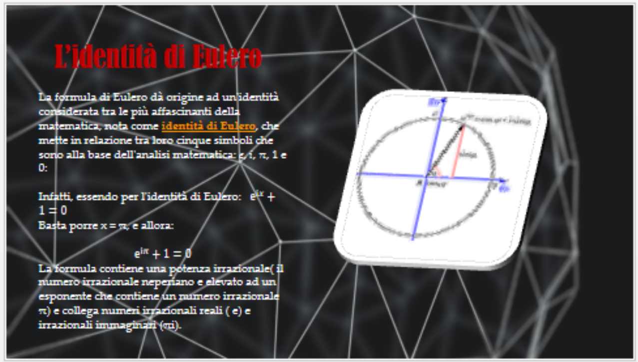
4° GRUPPO

22

23



24

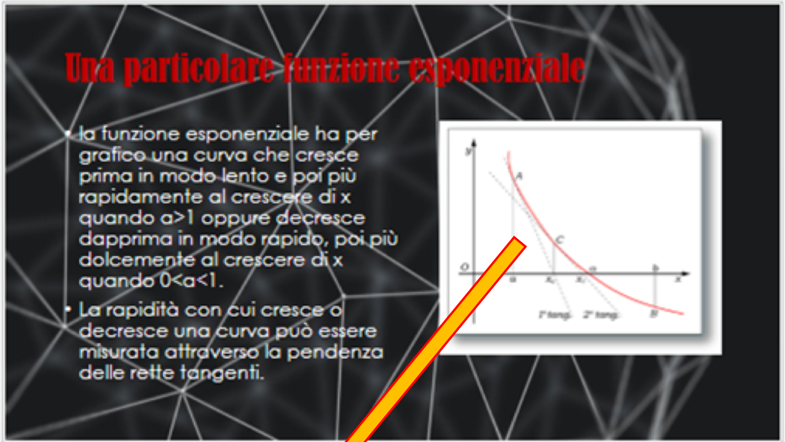


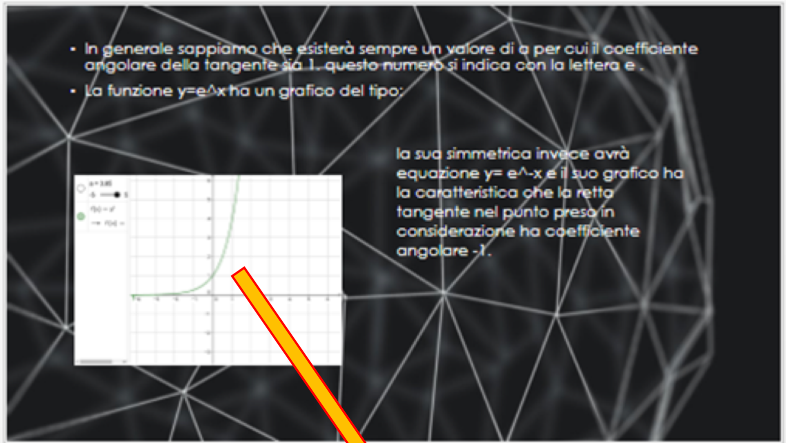
25

Prof.ssa Franca Donato
L.S. «Tullio Levi Civita»

Spunti di discussione

4° GRUPPO





Definizione intuitiva di funzioni crescenti e decrescenti;
Caratteristica dei coefficienti angolari delle tangenti ad una curva crescente e decrescente

Caratteristiche di crescenza della funzione esponenziale con base a >1

Caratteristiche di decrescenza della funzione esponenziale con base 0 < a <1

Rivisti i due tipi di grafici funzione esponenziale $y=a^x$

Prof.ssa Franca Donato
L.S. «Tullio Levi Civita»

4° GRUPPO

Spunti di discussione

Alcune caratteristiche delle operazioni tra numeri immaginari e introduzione dei numeri complessi

Relazioni tra gli insiemi numerici:

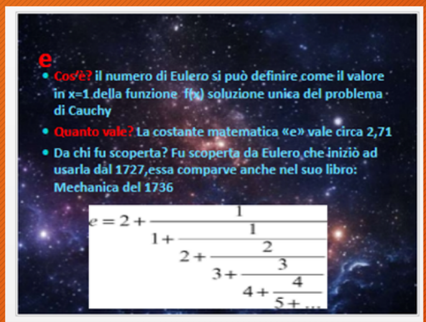
- Insieme dei complessi,
- insieme degli immaginari
- l'insieme dei reali

Prof.ssa Franca Donato
L.S. «Tullio Levi Civita»

5° GRUPPO

Il lavoro proposto dal quinto gruppo ha permesso:

- ✓ Determinare con il calcolo il ragionamento di Archimede per vedere le cifre che costituiscono l'approssimazione di π

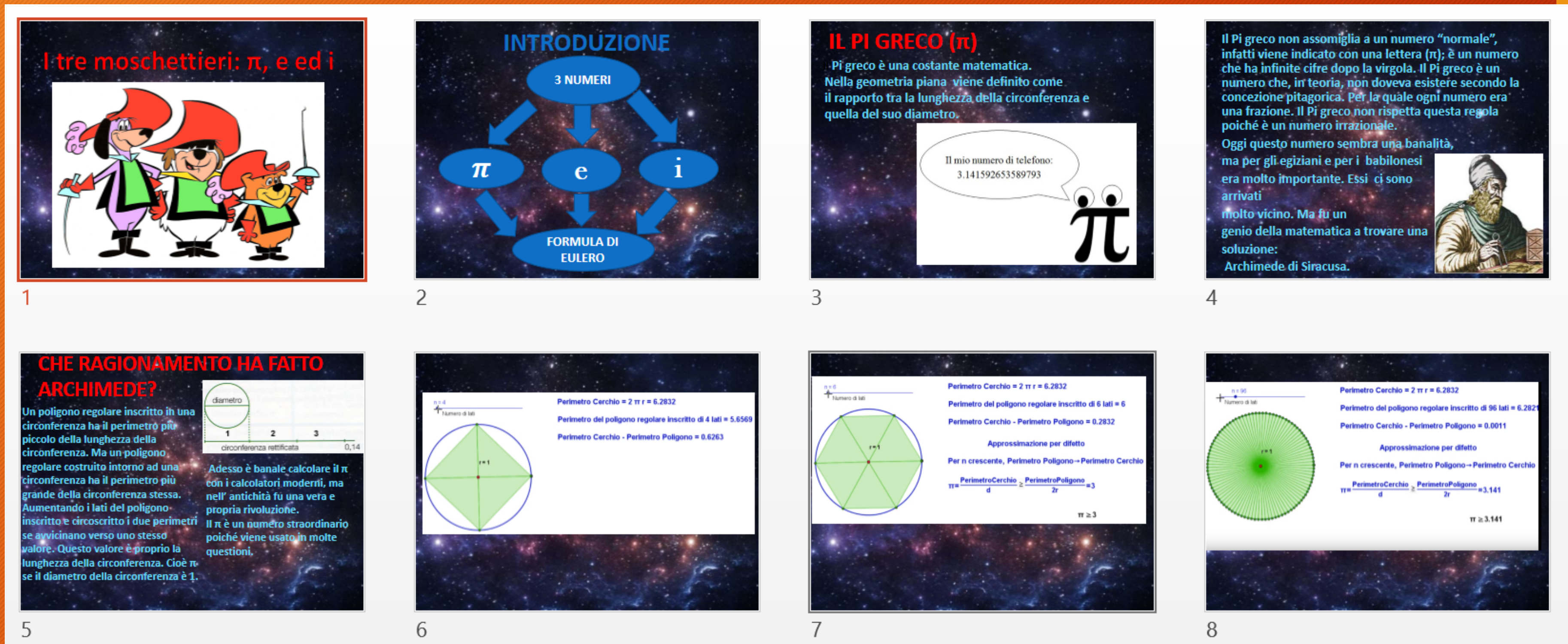


- ✓ Dare consigli metodologici nello scegliere il percorso di impostazione di un lavoro: mai mettere argomenti che non si sono ben capiti o sui quali non si sa argomentare.

- ✓ Sintesi per caratterizzare e rappresentare i numeri complessi

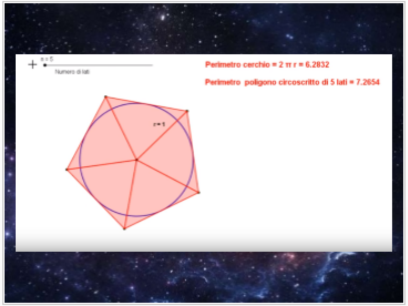
Prof.ssa Franca Donato
L.S. «Tullio Levi Civita»

5° GRUPPO

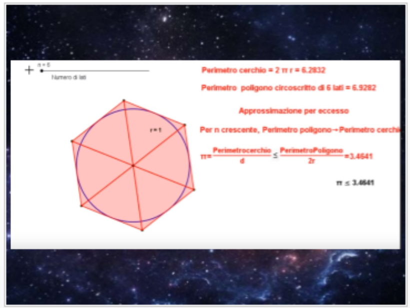


Prof.ssa Franca Donato
L.S. «Tullio Levi Civita»

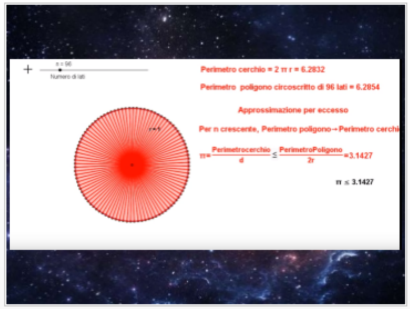
5° GRUPPO



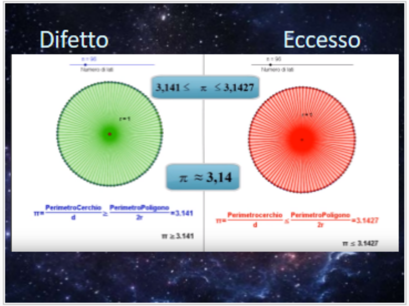
9



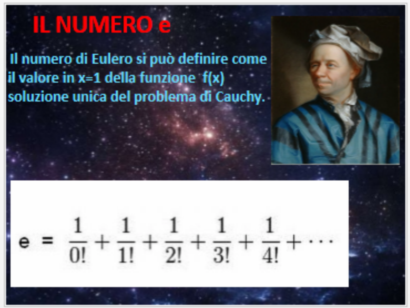
10



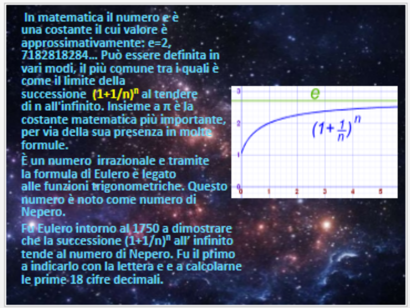
11



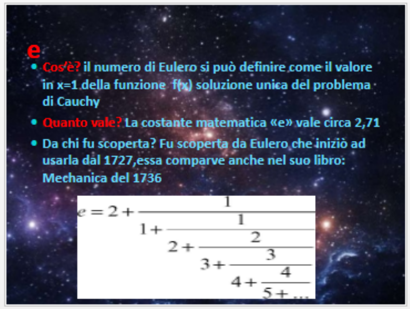
12



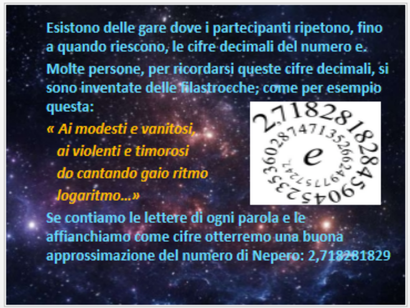
13



14



15

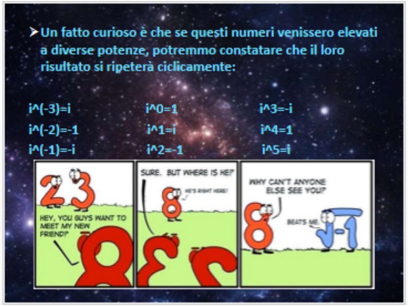


16

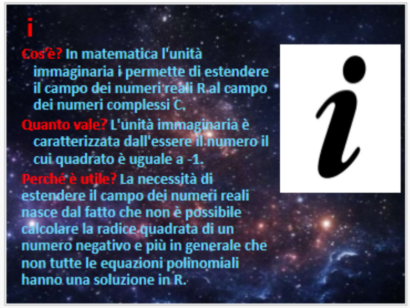
Prof.ssa Franca Donato
L.S. «Tullio Levi Civita»

5° GRUPPO

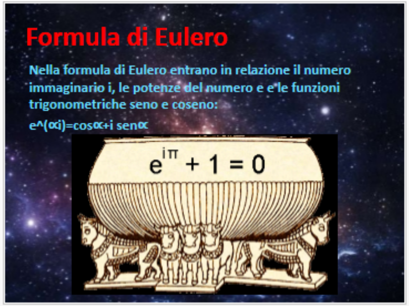
17



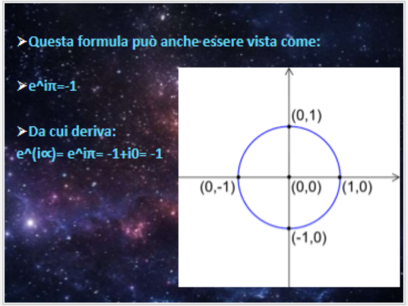
18



19



20



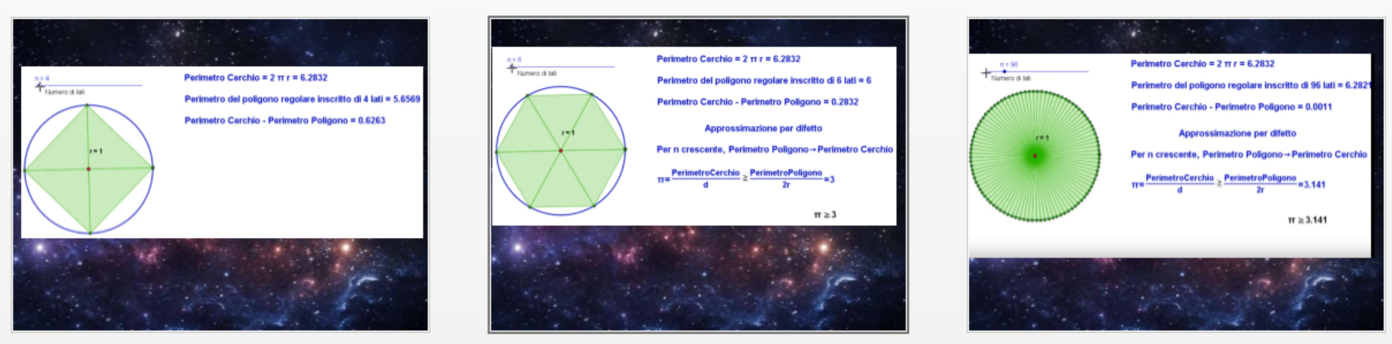
21

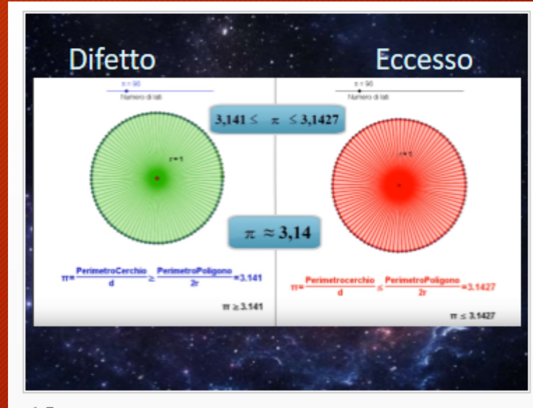
22

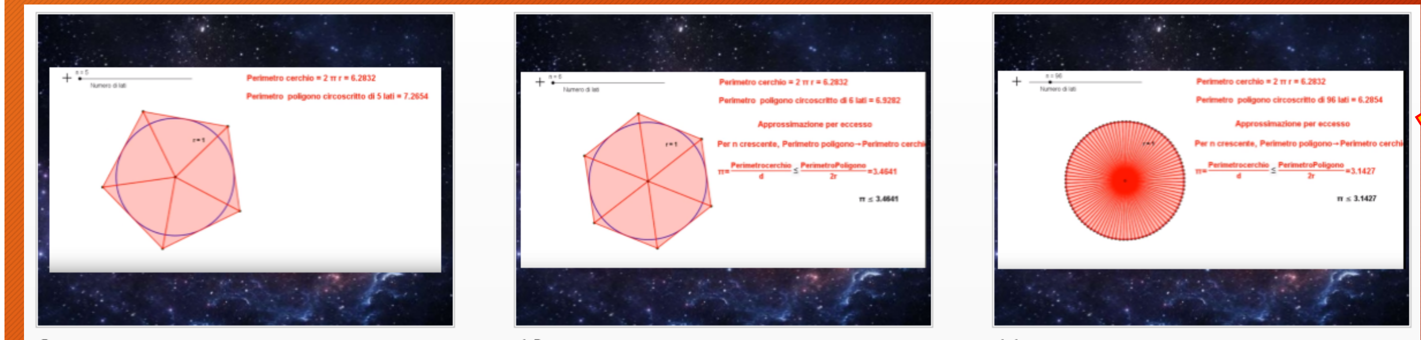
Prof.ssa Franca Donato
L.S. «Tullio Levi Civita»

5° GRUPPO Argomenti approfonditi:

- ✓ Determinare con il calcolo il ragionamento di Archimede per vedere le cifre che costituiscono l'approssimazione di π







Determinazione del perimetro di poligoni regolari inscritti e circoscritti: quadrato, esagono,…

Prof.ssa Franca Donato
L.S. «Tullio Levi Civita»

Ringrazio per l'attenzione

Prof.ssa Franca Donato
L.S. «Tullio Levi Civita»