π E I NUMERI MODERNI

A.S. 2017/18

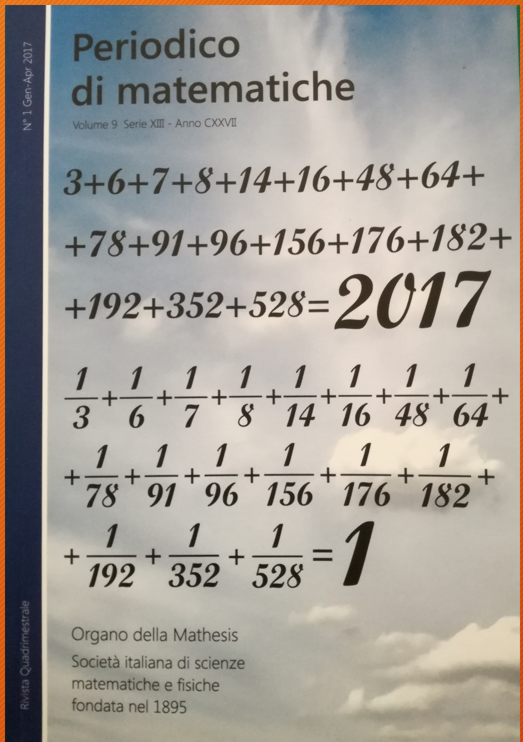
Liceo scientifico «Tullio Levi Civita»

Lavoro svolto con gli alunni della classe IIA potenziato

Prof.ssa Franca Donato

Introduzione

Documento di Microsoft Word



L'idea del lavoro presentato oggi nasce dalla lettura di un articolo del periodico di matematiche della Mathesis n°1 Gen-Apr 2017
«I tre Moschettieri della Matematica»
di Guido Trombetti

L'articolo presenta una sintesi della storia della popolarità dei numeri π, e ed i.
I numeri vengono identificati con i personaggi del romanzo di Dumas: I tre moschettieri.
π: …simpatico, gaudente, festaiolo come **Porthos**.
e: …scontroso. Meno amante della ribalta. Saggio. Calcolatore … Tra i moschettieri ricorda **Athos**.
i: … E' ascetico. Silenzioso. Imperscrutabile. Sottile come **Aramis**.

Prof.ssa Franca Donato
L.S. «Tullio Levi Civita»

Introduzione

L'articolo era scritto in modo accattivante quindi, ho pensato che poteva coinvolgere gli alunni del liceo matematico.
Come compito delle vacanze ho assegnato la lettura dell'articolo e ho chiesto loro di lavorare in gruppo per approfondire e preparare una presentazione in power point. La presentazione sarebbe stata visionata all'inizio del nuovo anno scolastico.

Prof.ssa Franca Donato
L.S. «Tullio Levi Civita»

Motivazioni

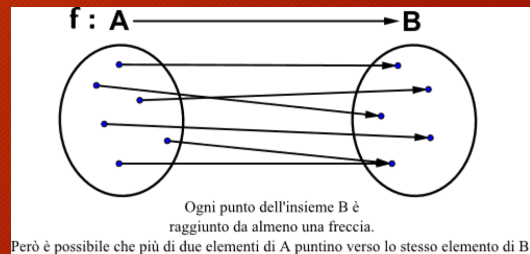
La finalità dell'attività è quella di cercare di ottenere una visione «ampia» di concetti legati al 'numero' includendo le diverse manifestazioni dell'esigenza di crearli. Si vuole:

- sottolineare i nodi concettuali principali che hanno portato all'introduzione di nuovi 'numeri', mostrando ruolo e significato del formalismo matematico necessario alla loro caratterizzazione e quantificazione.
- far nascere la necessità di investigare, costruire un percorso, esprimere e comunicare
- stimolare al lavoro di gruppo apportando il proprio contributo secondo le personali competenze
- Creare una base di conoscenze per poter sviluppare gli argomenti a partire dalle proposte fatte dai ragazzi

Argomenti affrontati prima della ‘partenza’ del progetto

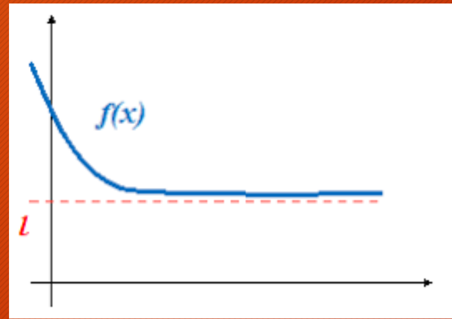
Nei mesi di settembre e ottobre sono stati ripresi argomenti che non erano stati affrontati lo scorso anno: **Relazioni e funzioni.**

In particolare, per le funzioni, si sono sottolineati i differenti modi per rappresentare una funzione e per ognuno di tali modi si sono ricavate le caratteristiche individuabili della funzione stessa.

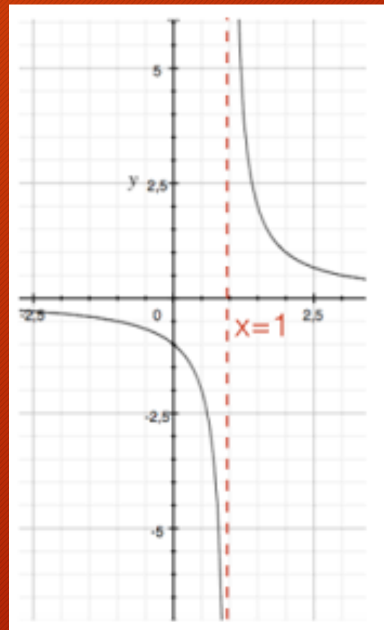


Prof.ssa Franca Donato
L.S. «Tullio Levi Civita»

…prima di partire



Dal diagramma di una funzione:
dominio, codominio, intersezioni con gli assi, zeri della funzione, segno della funzione, caratteristiche di suriettività, iniettività e biettività. Individuazione di eventuali comportamenti asintotici della funzione con determinazione delle equazioni degli asintoti orizzontali e verticali.
Determinazione della funzione inversa di funzioni biunivoche.



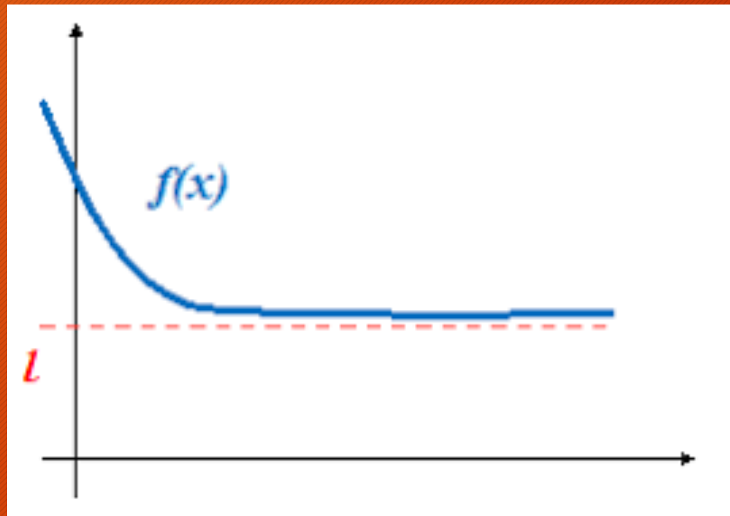
Prof.ssa Franca Donato
L.S. «Tullio Levi Civita»

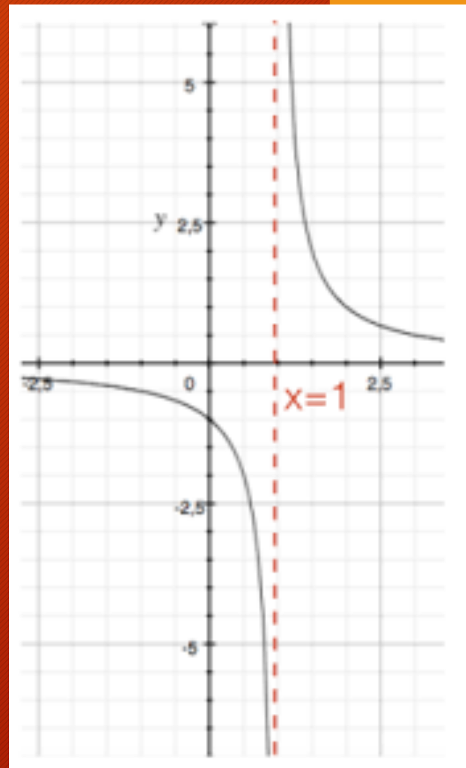
Nota Bene: Si sono introdotte delle notazioni simboliche per indicare gli andamenti individuati dalle funzioni

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=l$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=l$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=l$$





Prof.ssa Franca Donato
L.S. «Tullio Levi Civita»

Programmazione del lavoro

A inizio novembre ho assegnato altro materiale ai ragazzi per riprendere e approfondire il lavoro fatto su «π e i numeri moderni» che come al solito doveva essere trattato in modo trasversale.

- Nel complesso ci sono stati 5 gruppi
- Le presentazioni elaborate in power point sono state messe a disposizione su una cartella di onedrive

Prof.ssa Franca Donato
L.S. «Tullio Levi Civita»

Tempi

- Ho iniziato a sentire il primo gruppo a fine Novembre
- Il tempo dedicato ad ogni gruppo è stato di circa due ore: presentazione del lavoro + tempo dedicato all’approfondimento o al chiarimento dei concetti emersi durante l’esposizione.

Gli alunni spettatori, hanno preso nota dei suggerimenti e degli approfondimenti che man mano emergevano e, a volte, hanno corretto in corsa i loro lavori.

Prof.ssa Franca Donato
L.S. «Tullio Levi Civita»

Tempi (previsione)

Sono previste altre 3 ore di intervento:

- progettazione di una verifica scritta sull’argomento della durata di 1 ora fatta a cura dei vari gruppi
- revisione e unificazione della verifica a cura del docente
- somministrazione alla classe della verifica
- Correzione e discussione dei risultati

Prof.ssa Franca Donato
L.S. «Tullio Levi Civita»

Tempi (previsione)

L’ultima fase del lavoro (2 ore complessive) prevede:

- realizzazione di una sola presentazione power point a cura di una commissione di alunni proveniente da vari gruppi.
- esposizione dell’unico lavoro finale ad altre classi.

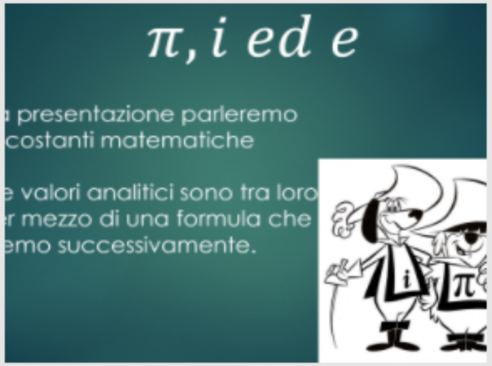
Modalità di esposizione

- Ogni gruppo ha esposto in classe la presentazione prodotta.
  - La presentazione è stata valutata e motivata da tutti (alunni e docente), secondo tre principali indicatori:
  - Caratteristiche grafiche del lavoro in power point
  - Qualità dell'esposizione
  - Capacità di approfondimento dell'argomento in alcuni aspetti.
- Durante il periodo di lavoro, i ragazzi sono stati invitati a riassumere a voce quanto emerso dalle presentazione dei lavori dei vari gruppi, in seguito saranno valutati attraverso le compilazioni di schede redatte dagli alunni e dal docente.

Franca Donato

Le presentazioni prodotte dati vari gruppi

1 numeri moderni
numeri moderni



2 numeri moderni
Andrea Tricarico,

3 bis numeri moderni
numeri moderni Del

3 numeri moderni
numeri moderni Del

4 numeri moderni
Briuglia,Feola,Perfetti e

5 numeri moderni
Besca, Sammartino,

Prof.ssa Franca Donato
L.S. «Tullio Levi Civita»

1° GRUPPO

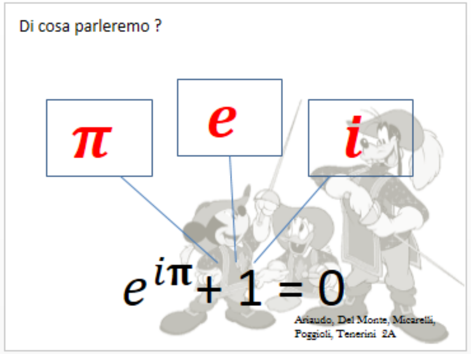
Il lavoro proposto dal quarto gruppo ha permesso i seguenti spunti di discussione:

- ✓ Significato di numero razionale e numeri trascendenti
- ✓ Poligoni inscritti e circoscritti in una circonferenza
- ✓ Approssimazione per eccesso e per difetto del valore di una grandezza
- ✓ Andamento di alcune funzioni (per es. funzioni esponenziali)
- ✓ Ripasso l’operatore fattoriale
- ✓ Ripasso sulle funzioni circolari

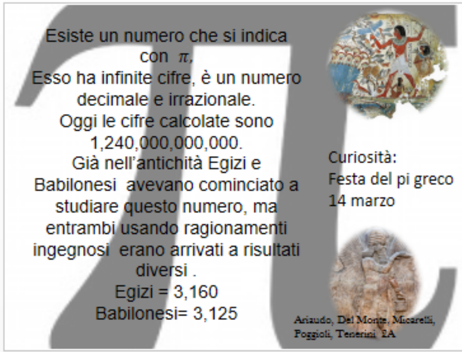
Prof.ssa Franca Donato
L.S. «Tullio Levi Civita»

1° GRUPPO

1

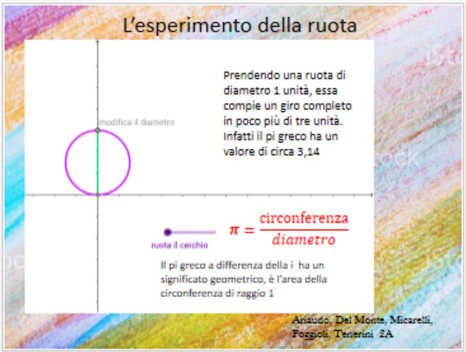


2

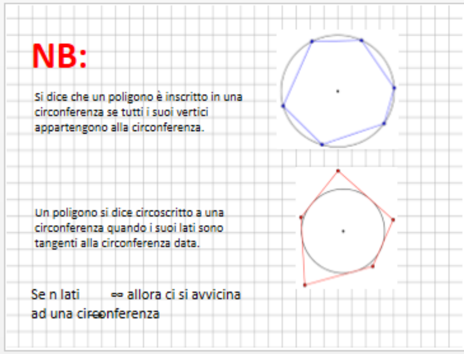


3

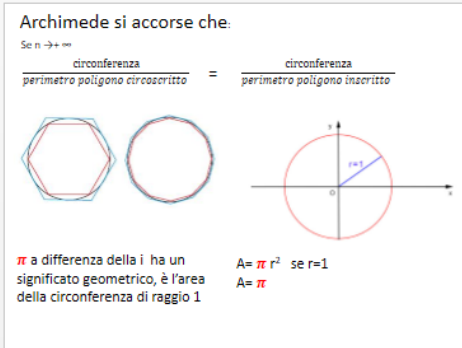
4



5



6

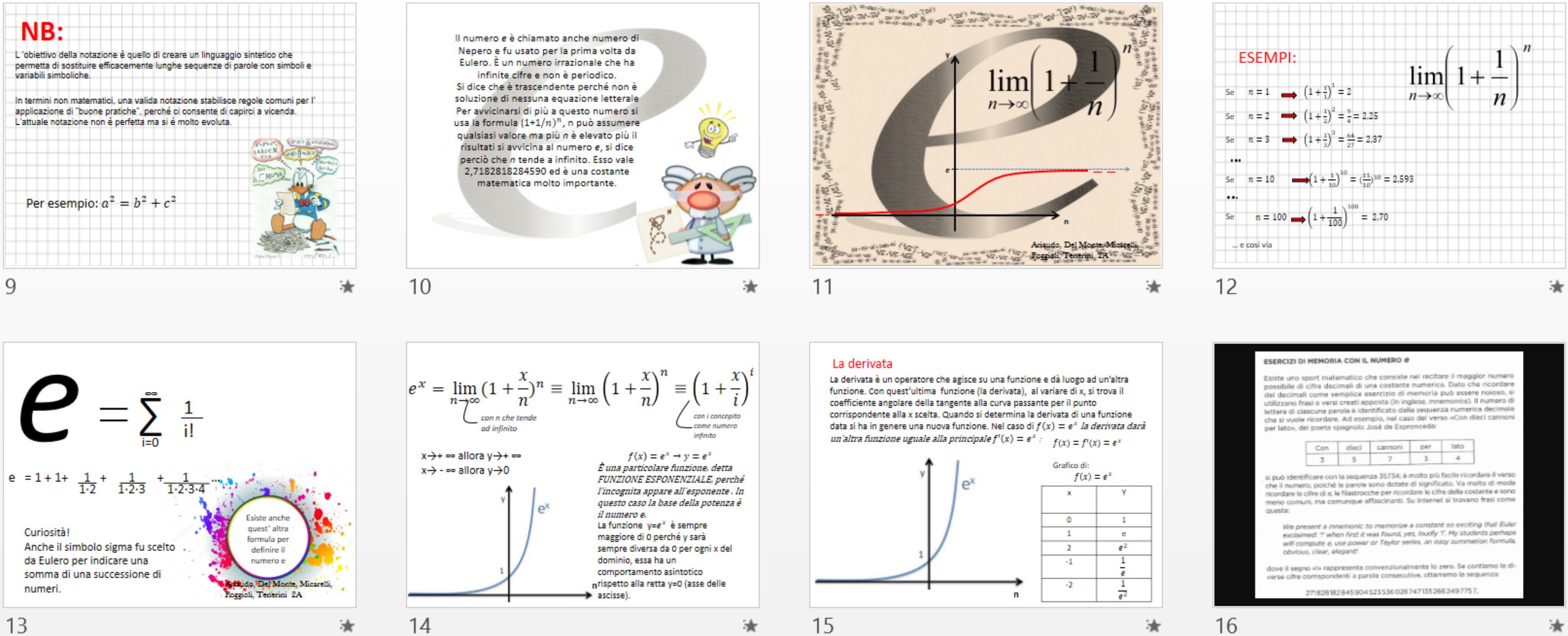


7

8

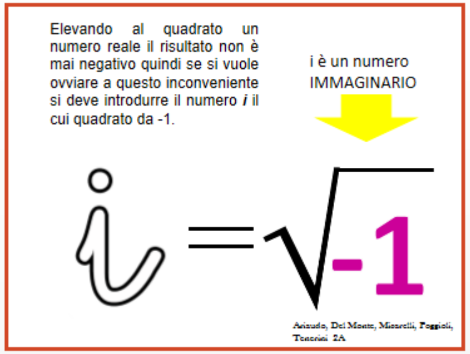
Prof.ssa Franca Donato
L.S. «Tullio Levi Civita»

1° GRUPPO

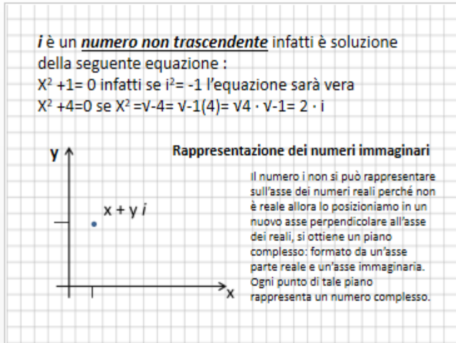


Prof.ssa Franca Donato
L.S. «Tullio Levi Civita»

1 ° GRUPPO

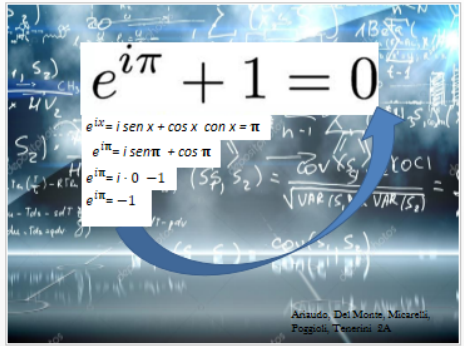


17



18

19

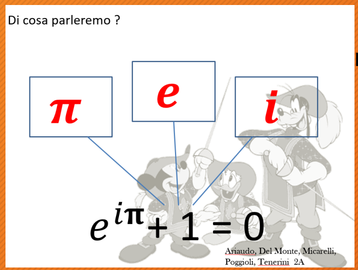


20

21

Prof.ssa Franca Donato
L.S. «Tullio Levi Civita»

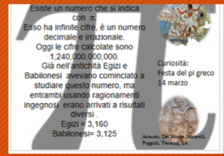
1° GRUPPO



Si introduce l'argomento partendo dalla formula di Eulero e si inizia ad argomentare sui vari numeri più o meno noti.

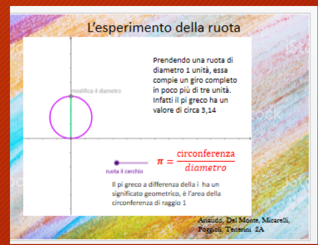
π

- Caratteristiche fisiche del numero



- Problema della sua determinazione

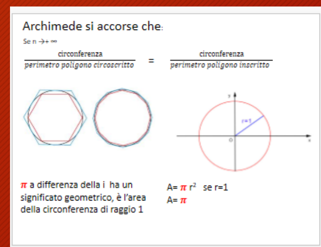
Archimede intuisce la sua non determinabilità e da delle approssimazioni con considerazioni geometriche



- Varie definizioni di π

$$\frac{circonferenza}{diametro}$$

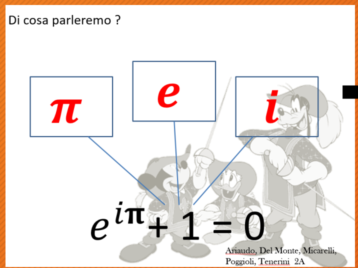
Area di circonferenza con raggio unitario



.ssa Franca Donato
«Tullio Levi Civita»

Concetti introdotti e discussi durante la trattazione dell'argomento

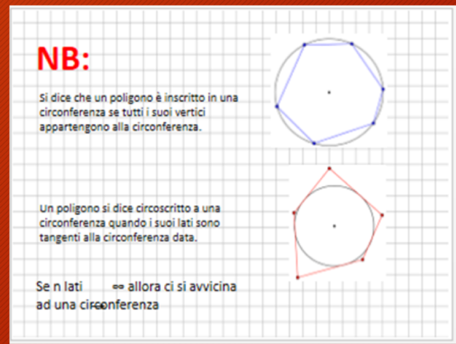
1° GRUPPO



π

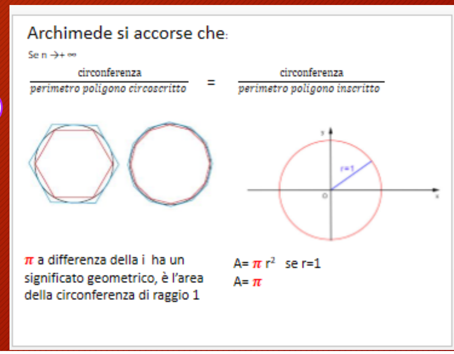
- Caratteristiche fisiche del numero — Breve introduzione dei **numeri irrazionali** e esempi di numeri irrazionali già conosciuti lo scorso anno

- Problema della sua determinazione — Definizione di **poligoni inscritti** e **circoscritti** ad una circonferenza (argomento non ancora trattato)



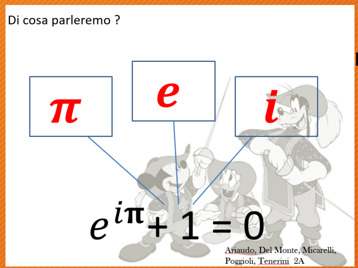
dividuare ricorsioni e
gnificato di periodo

- Stima di π — Introduzione del concetto di **approssimazione per difetto e per eccesso** di una grandezza come il perimetro della circonferenza



Donato
Civita»

1 ° GRUPPO



$\rightarrow$ e

- Caratteristiche fisiche del numero

Eulero e le notazioni simboliche

Importanza ed efficacia dell'uso dei simboli

Alcuni simboli introdotti da Eulero → π, e, Σ

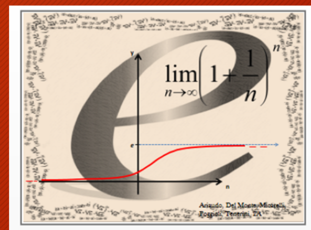
- Problema della sua determinazione

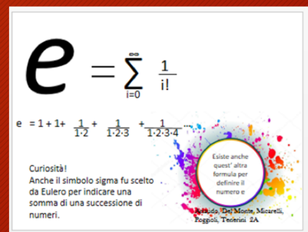
Modi diversi che portano tendenzialmente allo stesso valore

- Varie definizioni di *e*

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{i!}$$



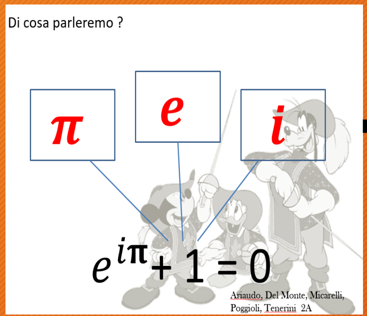


- Tecniche per ricordare il numero

sa Franca Donato
Tullio Levi Civita»

Concetti introdotti e discussi durante la trattazione dell'argomento

1 ° GRUPPO



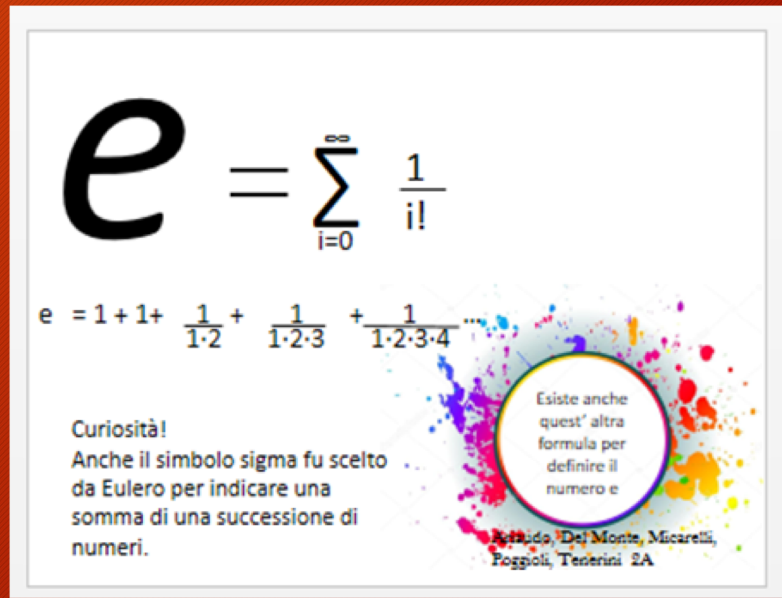
e

- Caratteristiche fisiche del numero

Discussione sul contributo di Eulero alla trattazione simbolica degli argomenti

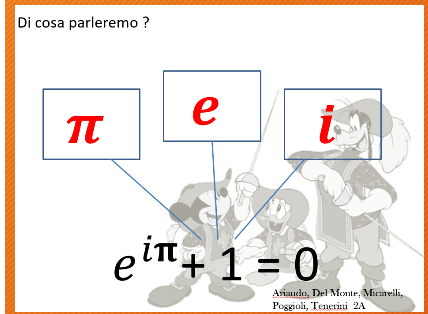
- Problema della sua determinazione

Richiami del significato di fattoriale e delle sue proprietà
(argomento già introdotto lo scorso anno)



1 ° GRUPPO

Concetti introdotti e discussi durante la trattazione dell'argomento



e

- Problema della sua determinazione

Interpretazione intuitiva del limite notevole

ESEMPI:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

Se $n = 1 \Rightarrow \left(1+\frac{1}{1}\right)^1 = 2$

Se $n = 2 \Rightarrow \left(1+\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} = 2{,}25$

Se $n = 3 \Rightarrow \left(1+\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{64}{27} = 2{,}37$

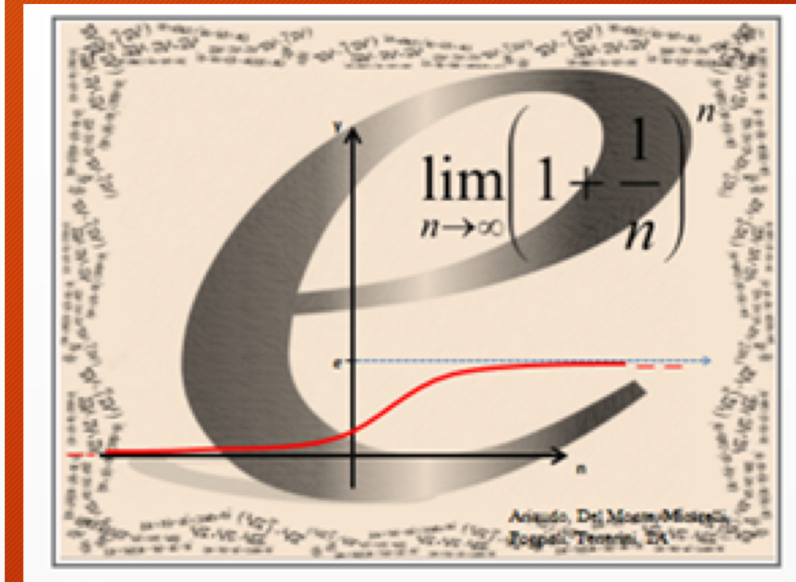
...

Se $n = 10 \Rightarrow \left(1+\frac{1}{10}\right)^{10} = \left(\frac{11}{10}\right)^{10} = 2{,}593$

...

Se $n = 100 \Rightarrow \left(1+\frac{1}{100}\right)^{100} = 2{,}70$

... e così via

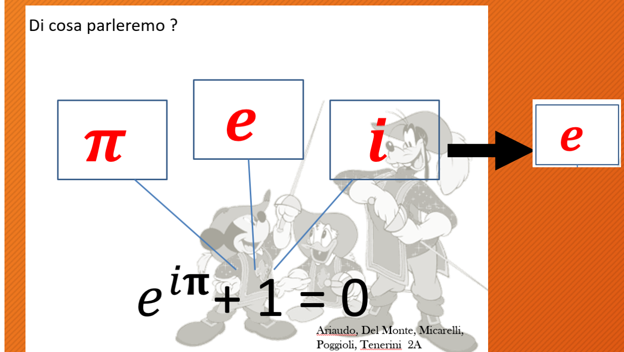


Interpretazione grafica

Prof.ssa Franca Donato
L.S. «Tullio Levi Civita»

1° GRUPPO

Concetti introdotti e discussi durante la trattazione dell'argomento



- Una semplice funzione che contiene il numero *e*:

  $y=e^x$

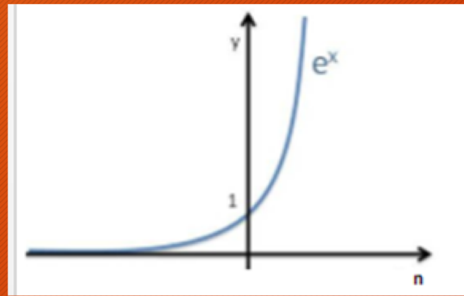
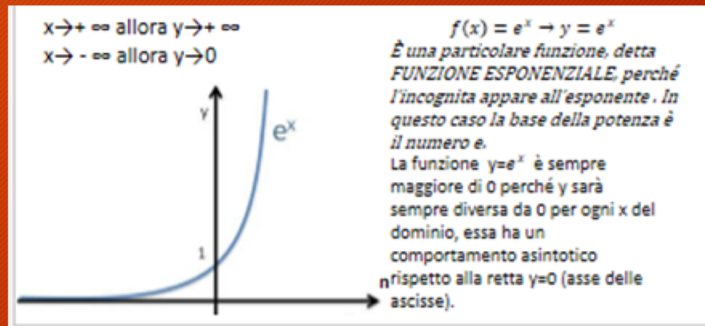


Grafico di:
$f(x) = e^x$

x	Y
0	1
1	e
2	e^2
-1	$\frac{1}{e}$
-2	$\frac{1}{e^2}$

Grafico per punti della funzione $y=e^x$



Caratteristiche della funzione $y=e^x$ a partire dal suo grafico

(argomento già trattato per altri grafici)

- Introduzione del concetto di derivata come operatore che agisce su una funzione: informazioni ricavabili dalla conoscenza della derivata di una funzione

Prof.ssa Franca Donato
L.S. «Tullio Levi Civita»

ATTIVITA' PROPOSTA PER CASA

Viene definita funzione esponenziale una funzione in cui l'elemento generico del dominio x compare come esponente di una potenza.

La più semplice delle funzioni esponenziali è del tipo : $y = a^x \quad con \quad a > 0 \quad e \quad a \neq 1$ *(per escludere il caso banale)*

1° tipo

Disegnare sullo stesso piano cartesiano, usando penne colorate, tre funzioni esponenziali del tipo $y = a^x$

con basi 0<*a*<1

es. $y = (\frac{1}{2})^x$; $y = (\frac{1}{3})^x$; $y = (\frac{1}{4})^x$

Guardando i grafici delle funzioni esponenziali $y = a^x$ con basi 0<*a*<1 determinare:

Dominio funzione
Codominio
Intersezione asse x
Intersezione asse y
Segno funzione
Andamento della funzione per $x \to +\infty$
Andamento della funzione per $x \to -\infty$
Eventuali comportamento asintotico
Equazione dell'asintoto

2° tipo

Disegnare sullo stesso piano cartesiano, usando penne colorate, tre funzioni esponenziali del tipo $y = a^x$

con basi *a*>1

es. $y = (2)^x$; $y = (3)^x$; $y = (4)^x$

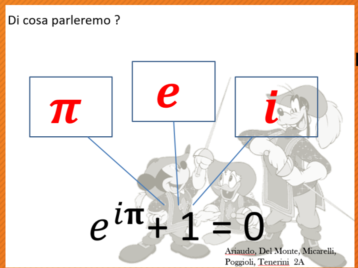
Guardando i grafici delle funzioni esponenziali $y = a^x$ con basi 0<*a*<1 determinare:

Dominio funzione
Codominio
Intersezione asse x
Intersezione asse y
Segno funzione
Andamento della funzione per $x \to +\infty$
Andamento della funzione per $x \to -\infty$
Eventuali comportamento asintotico
Equazione dell'asintoto

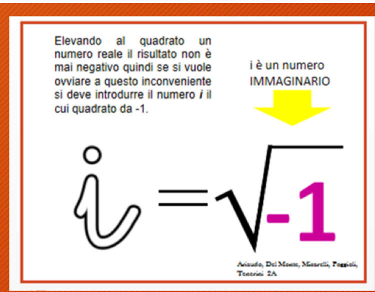
Determinare caratteristiche comuni ai due tipi di grafici esponenziali

Prof.ssa Franca Donato
L.S. «Tullio Levi Civita»

1 ° GRUPPO



Esigenza che ha portato all'introduzione di questa nuova quantità

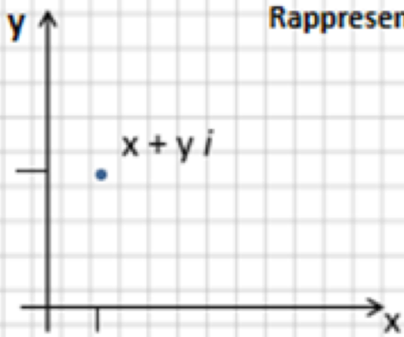


- Caratteristiche fisiche del numero: numero trascendente

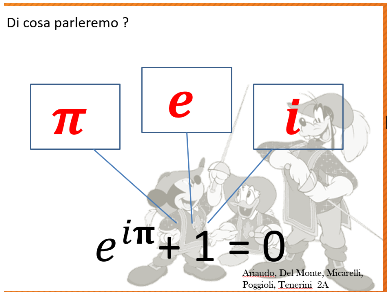
i è un ***numero non trascendente*** infatti è soluzione della seguente equazione :
$X^2 + 1 = 0$ infatti se $i^2 = -1$ l'equazione sarà vera
$X^2 + 4 = 0$ se $X^2 = \sqrt{-4} = \sqrt{-1(4)} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{-1} = 2 \cdot i$

- I numeri immaginari e la loro rappresentazione.
- Piano complesso

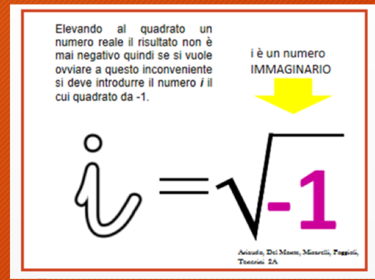
Rappresentazione dei numeri immaginari



Il numero i non si può rappresentare sull'asse dei numeri reali perché non è reale allora lo posizioniamo in un nuovo asse perpendicolare all'asse dei reali, si ottiene un piano complesso: formato da un'asse parte reale e un'asse immaginaria. Ogni punto di tale piano rappresenta un numero complesso.



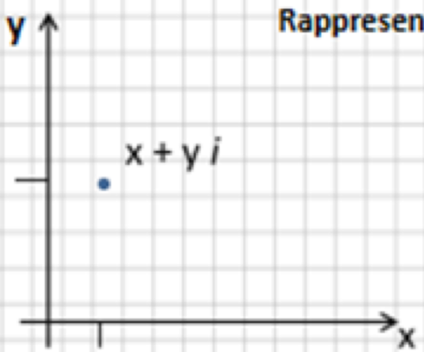
Esigenza che ha portato all'introduzione di questa nuova quantità



1° GRUPPO

i è un ***numero non trascendente*** infatti è soluzione della seguente equazione :
$X^2 + 1 = 0$ infatti se $i^2 = -1$ l'equazione sarà vera
$X^2 + 4 = 0$ se $X^2 = \sqrt{-4} = \sqrt{-1(4)} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{-1} = 2 \cdot i$

Rappresentazione dei numeri immaginari

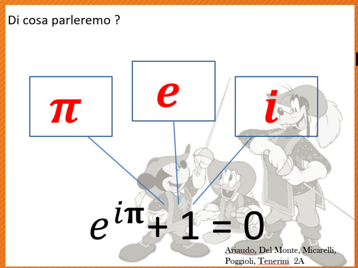


Il numero i non si può rappresentare sull'asse dei numeri reali perché non è reale allora lo posizioniamo in un nuovo asse perpendicolare all'asse dei reali, si ottiene un piano complesso: formato da un'asse parte reale e un'asse immaginaria. Ogni punto di tale piano rappresenta un numero complesso.

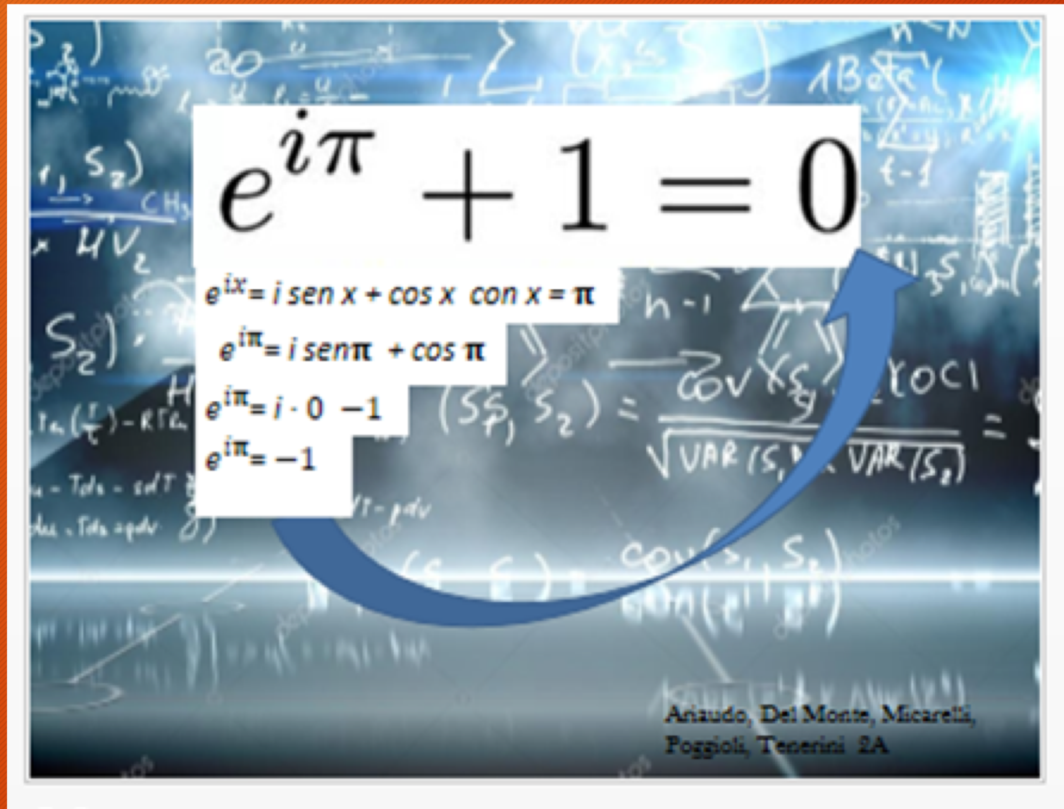
- Significato di numero trascendente
- Introduzione dei numeri immaginari e la loro rappresentazione.
- Introduzione del piano complesso
- Introduzione della forma dei numeri complessi

Prof.ssa Franca Donato
L.S. «Tullio Levi Civita»

1 ° GRUPPO



- Dall'equazione di Eulero alla formula di Eulero



Ripasso delle funzioni circolari

Prof.ssa Franca Donato
L.S. «Tullio Levi Civita»