

π E I NUMERI MODERNI

A.S. 2017/18

Liceo scientifico «Tullio Levi Civita»

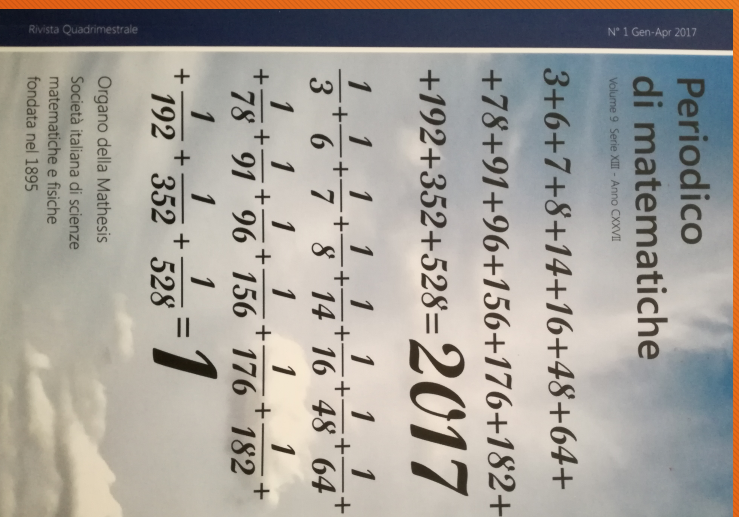
Lavoro svolto con gli alunni della classe II A potenziato

Prof.ssa Franca Donato

Introduzione



Documento di
Microsoft Word



L'idea del lavoro presentato oggi nasce dalla lettura di un articolo del periodico di matematiche della Mathesis n° 1 Gen-Apr 2017
«I tre Moschettieri della Matematica»
di Guido Trombetti

L'articolo presenta una sintesi della storia della popolarità dei numeri π , e ed i .
I numeri vengono identificati con i personaggi del romanzo di Dumas: I tre moschettieri.
 π : ...simpatico, gaudente, festaiolo come **Porthos**.
e: ...scontroso. Meno amante della ribalta. Saggio. Calcolatore ... Tra i moschettieri ricorda **Athos**.
i: ... E' ascetico. Silenzioso. Imperscrutabile. Sottile come **Aramis**.

Prof.ssa Franca Donato
L.S. «Tullio Levi Civita»

Introduzione



L'articolo era scritto in modo accattivante quindi, ho pensato che poteva coinvolgere gli alunni del liceo matematico.

Come compito delle vacanze ho assegnato la lettura dell'articolo e ho chiesto loro di lavorare in gruppo per approfondire e preparare una presentazione in power point. La presentazione sarebbe stata visionata all'inizio del nuovo anno scolastico.

Motivazioni

La finalità dell'attività è quella di cercare di ottenere una visione «ampia» di concetti legati al 'numero' includendo le diverse manifestazioni dell'esigenza di crearli. Si vuole:

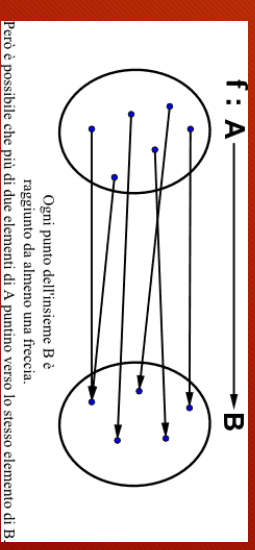
- sottolineare i nodi concettuali principali che hanno portato all'introduzione di nuovi 'numeri', mostrando ruolo e significato del formalismo matematico necessario alla loro caratterizzazione e quantificazione.
- far nascere la necessità di investigare, costruire un percorso, esprimere e comunicare
- stimolare al lavoro di gruppo apportando il proprio contributo secondo le personali competenze
- Creare una base di conoscenze per poter sviluppare gli argomenti a partire dalle proposte fatte dai ragazzi

Argomenti affrontati prima della 'partenza' del progetto



Nei mesi di settembre e ottobre sono stati ripresi argomenti che non erano stati affrontati lo scorso anno: **Relazioni e funzioni.**

In particolare, per le funzioni, si sono sottolineati i differenti modi per rappresentare una funzione e per ognuno di tali modi si sono ricavate le caratteristiche individuabili della funzione stessa.

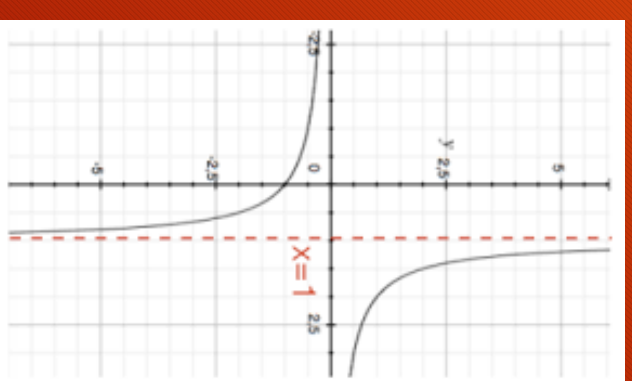
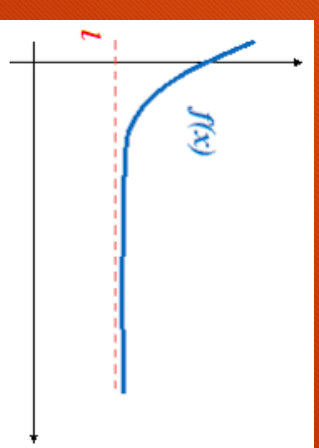


...prima di partire

Dal diagramma di una funzione:

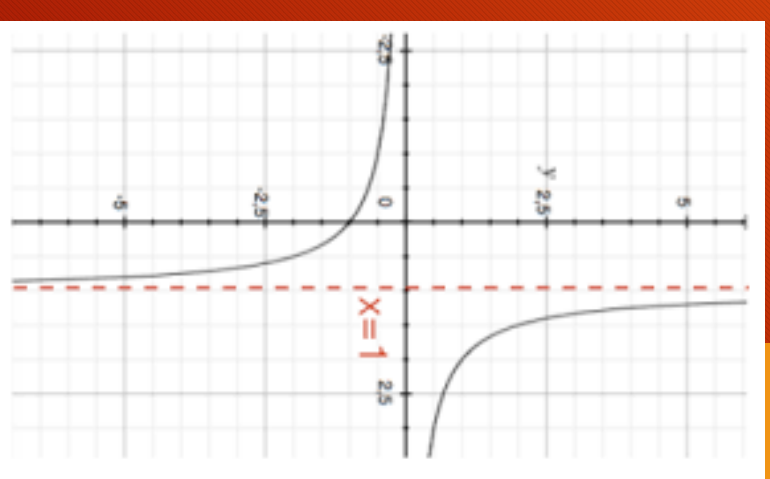
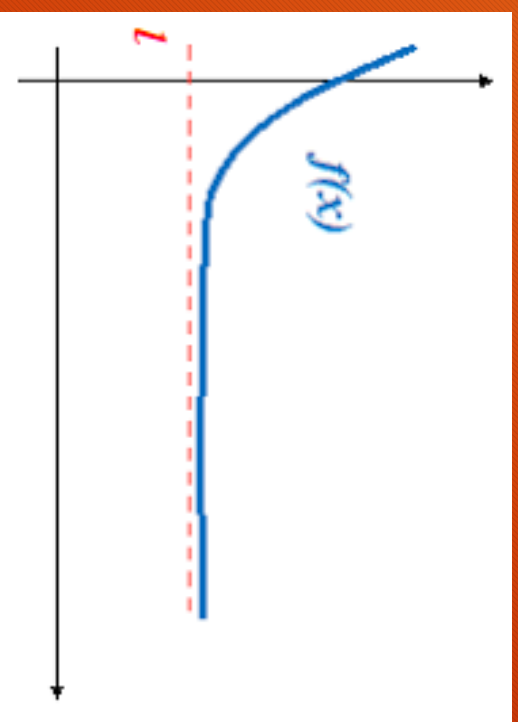
dominio, codominio, intersezioni con gli assi, zeri della funzione, segno della funzione, caratteristiche di suriettività, iniettività e biettività. Individuazione di eventuali comportamenti asintotici della funzione con determinazione delle equazioni degli asintoti orizzontali e verticali.

Determinazione della funzione inversa di funzioni biunivoche.



Nota Bene: Si sono introdotte delle notazioni simboliche per indicare gli andamenti individuati dalle funzioni

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$$
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l$$
$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = l$$



Programmazione del lavoro

A inizio novembre ho assegnato altro materiale ai ragazzi per riprendere e approfondire il lavoro fatto su « π e i numeri moderni» che come al solito doveva essere trattato in modo trasversale.

- Nel complesso ci sono stati 5 gruppi
- Le presentazioni elaborate in power point sono state messe a disposizione su una cartella di onedrive

Tempi

- Ho iniziato a sentire il primo gruppo a fine Novembre
- Il tempo dedicato ad ogni gruppo è stato di circa due ore: presentazione del lavoro + tempo dedicato all'approfondimento o al chiarimento dei concetti emersi durante l'esposizione.

Gli alunni spettatori, hanno preso nota dei suggerimenti e degli approfondimenti che man mano emergevano e, a volte, hanno corretto in corsa i loro lavori.

Prof.ssa Franca Donato
L.S. «Tullio Levi Civita»

Tempi (previsione)

Sono previste altre 3 ore di intervento:

- progettazione di una verifica scritta sull'argomento della durata di 1 ora fatta a cura dei vari gruppi
- revisione e unificazione della verifica a cura del docente
- somministrazione alla classe della verifica
- Correzione e discussione dei risultati

Tempi (previsione)

L'ultima fase del lavoro (2 ore complessive) prevede:

- realizzazione di una sola presentazione power point a cura di una commissione di alunni proveniente da vari gruppi.
- esposizione dell'unico lavoro finale ad altre classi.

Modalità di esposizione

- Ogni gruppo ha esposto in classe la presentazione prodotta.
 - La presentazione è stata valutata e motivata da tutti (alunni e docente), secondo tre principali indicatori:
 - Caratteristiche grafiche del lavoro in power point
 - Qualità dell'esposizione
 - Capacità di approfondimento dell'argomento in alcuni aspetti.
- Durante il periodo di lavoro, i ragazzi sono stati invitati a riassumere a voce quanto emerso dalle presentazione dei lavori dei vari gruppi, in seguito saranno valutati attraverso le compilazioni di schede redatte dagli alunni e dal docente.

Le presentazioni prodotte dai vari gruppi



1 numeri moderni
numeri moderni



2 numeri moderni
Andrea Tricarico,



3 bis numeri moderni
numeri moderni Del



3 numeri moderni
numeri moderni Del



4 numeri moderni
Briuglia, Feola, Perfetti e



5 numeri moderni
Besca, Sammartino,

1° GRUPPO

Il lavoro proposto dal quarto gruppo ha permesso i seguenti spunti di discussione:

- ✓ Significato di numero razionale e numeri trascendenti
- ✓ Poligoni inscritti e circoscritti in una circonferenza
- ✓ Approssimazione per eccesso e per difetto del valore di una grandezza
- ✓ Andamento di alcune funzioni (per es. funzioni esponenziali)
- ✓ Ripasso l'operatore fattoriale
- ✓ Ripasso sulle funzioni circolari



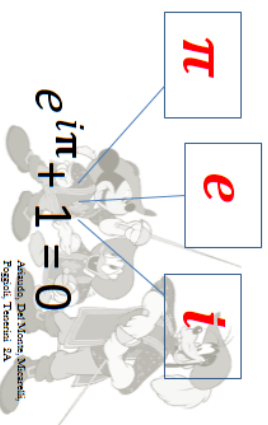
1° GRUPPO

I TRE MOSCHETTIERI DELLA MATEMATICA: π , e , i



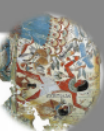
Autore: Dal Monte, Maccarelli, Tiggelli, Taramita, DA

Di cosa parleremo ?



Autore: Dal Monte, Maccarelli, Tiggelli, Taramita, DA

Esiste un numero che si indica con π .
Esso ha infinite cifre, è un numero decimale e irrazionale.
Oggi le cifre calcolate sono 1.240.000.000.000.
Già nell'antichità Egizi e Babilonesi avevano cominciato a studiare questo numero, ma entrambi usando ragionamenti ingenuosi, erano arrivati a risultati diversi.
Egizi = 3,160
Babilonesi = 3,125



Curiosità:
Festa del π greco
14 marzo

Autore: Dal Monte, Maccarelli, Tiggelli, Taramita, DA

Il ragionamento di Archimede

Senza l'uso delle trigonometrie, sono state i decimali, senza numeri irrazionali e la notazione posizionale e lavorando sulle sabbie riuscì a trovare le cifre di questo numero.



Aumentando il numero dei lati del poligono inscritto e di quello circoscritto i due perimetri si avvicinano verso il valore 2π .

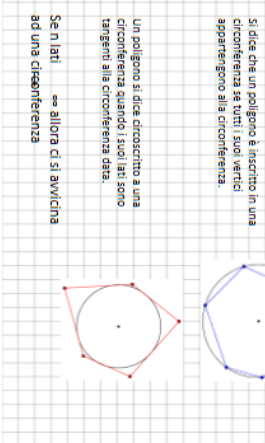
Autore: Dal Monte, Maccarelli, Tiggelli, Taramita, DA

L'esperimento della ruota

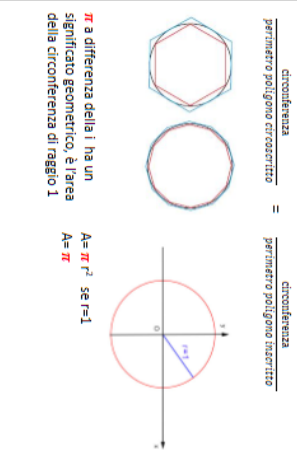


Autore: Dal Monte, Maccarelli, Tiggelli, Taramita, DA

NB:



Archimede si accorse che:



Se $n \rightarrow +\infty$

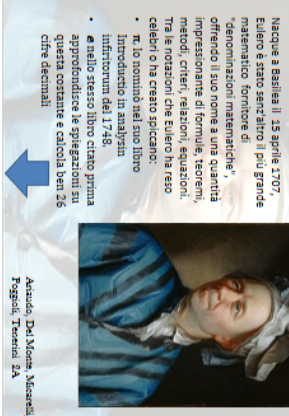
circonferenza

perimetro poligono circoscritto

=

perimetro poligono inscritto

Eulero



Nacque a Basilea il 15 aprile 1707, Eulero è stato senz'altro il più grande matematico, fornitore di "denominazioni matematiche", offrendo il suo nome a una quantità impressionante di formule, teoremi, metodi, criteri, relazioni, equazioni. Tra le notazioni che Eulero ha reso celebri o ha creato spiccano:

- π , lo notiamo nel suo libro "Introductio in analysin infinitorum" del 1748.
- e, nello stesso libro citato prima approfondisce le spiegazioni su questa costante e calcola ben 25 cifre decimali.



Autore: Dal Monte, Maccarelli, Tiggelli, Taramita, DA

Prof.ssa Franca Donato
L.S. «Tullio Levi Civita»

1. GRUPPO

NB:

L'obiettivo della notazione è quello di creare un linguaggio sintattico che permetta di sostituire efficacemente lunghe sequenze di parole con simboli e variabili simboliche.

In termini non matematici, una valida notazione stabilisce regole comuni per l'applicazione di "buone pratiche", perché ci consente di capirci a vicenda. L'attuale notazione non è perfetta ma si è molto evoluta.

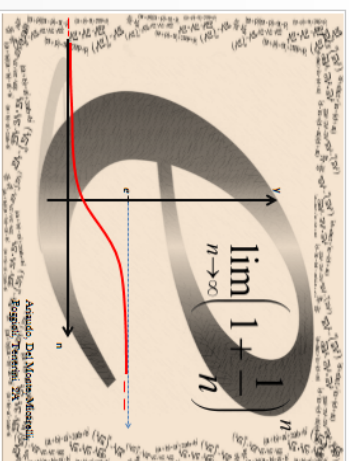
Per esempio: $a^2 = b^2 + c^2$



Il numero e è chiamato anche numero di Nepero e fu usato per la prima volta da Eulero. È un numero irrazionale che ha infinite cifre e non è periodico. Si dice che e trascende perché non è soluzione di nessuna equazione letterale. Per avvicinarsi di più a questo numero si usa la formula $(1 + 1/n)^n$, il più assurdo qualsiasi valore ma più n si eleva più il risultato si avvicina al numero e , si dice perciò che n tende a infinito. Esso vale $2,7182818284590$ ed è una costante matematica molto importante.



$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n$$



ESEMPLI:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)$$

Se $n=1 \rightarrow \left(1+\frac{1}{1}\right)^1 = 2$

$$n=2 \rightarrow \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} = 2.25$$

$$\text{Se } n=3 \rightarrow \left(1 + \frac{1}{3}\right)^3 = \frac{64}{27} = 2.37$$

...

Se $n = 10$ $\rightarrow \left(1 + \frac{1}{10}\right)^{10} = \left(\frac{11}{10}\right)^{10} = 2,593$

$$n = 100 \rightarrow \left(1 + \frac{1}{100}\right)^{100} = 2.7$$

così via



$$e = 1 + 1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2 \cdot 3} + \frac{1}{1.2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots$$

Curiosità!

Anche il simbolo sigma fu scelto da Eulero per indicare una somma di una successione di numeri.



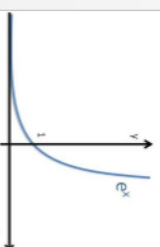
$$e^x = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{\frac{x}{\frac{x}{n}}} \equiv \left(1 + \frac{x}{l}\right)^l$$

con n che tende
ad infinito

$x \rightarrow +\infty$ allora $y \rightarrow +$

$f(x) = e^x \rightarrow y = e^x$
È una particolare funzione, detta **FUNZIONE ESPONENZIALE**, perché l'incognita appare all'esponente. In questo caso la base della potenza è

Il numero e
La funzione $y=e^x$ è sempre
maggiore di 0 perché y sarà
sempre diversa da 0 per ogni x del
dominio, essa ha un
comportamento asintotico
rispetto alla retta $y=0$ (asse delle
ascisse).

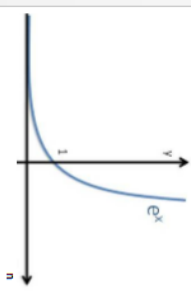


La derivata

La derivata è un'operazione che agisce su una funzione e dà luogo ad un'altra funzione. Con quest'ultima funzione (la derivata), l'alvario di x , si trova il coefficiente angolare della tangente alla curva passante per il punto corrispondente alla x scelta. Quando si determina la derivata di una funzione data si ha in genere una nuova funzione. Nel caso di $f(x) = e^x$ la derivata è un'altra funzione uguale alla principale $f'(x) = e^x$.

$$f(x) = f'(x) =$$

Grafico di:



x	y
0	1
1	2
2	1
2	$\frac{1}{2}$

ESERCIZI DI MEMORIA CON IL NUMERO

Esiste uno sport matematico che consiste nel recitare il maggior numero possibile di cifre decimali di una costante numerica. Dato che ricordarsi i decimali come semplice esercizio di memoria può essere noioso, si utilizzano invece i versi creati apposta (in inglese, mnemonic). Il numero di lettere di ciascun verso è identificato dalla sequenza numerica decimale che si vuole ricordare. Ad esempio, nel caso del verso eccoli dieci camosci per l'alto, del poeta spagnolo José de Espronceda:

Con	effect	canonci	per	info
3	5	7	3	4

si può identificare con la sequenza 35/374, è molto più facile ricordare il verso che il numero, poiché le parole sono dotate di significato. Va molto di moda ricordare le cifre di π , le filastrocche per ricordare le cifre della costante e sono meno comuni, ma comunque affascinanti. Su internet si trovano frasi come questa:

We present a mnemonic to memorize a constant so exciting that Eiselein exclaimed: "When first it was found, yea, loudly 'T. My students perhaps will compute it, use power or Taylor series, an easy summation formula, obvious, clear, elegant!"

dove il segno si rappresenta convenzionalmente lo zero. Se confermata, questa ipotesi consentirebbe di ottenere le sequenze di DNA corrispondenti a parole consecutive, ottenendo la sequenza:

1° GRUPPO

Elevando al quadrato un numero reale il risultato non è mai negativo quindi se si vuole ovviare a questo inconveniente si deve introdurre il numero i il cui quadrato da -1 .

i è un numero IMMAGINARIO



$$i = \sqrt{-1}$$

Arnaldo Di Muro, Marcelli, Tognoli, Tassinari 2A

17

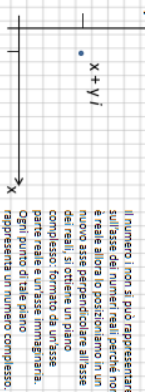


i è un numero non trascendente infatti è soluzione della seguente equazione :

$$X^2 + 1 = 0 \text{ infatti se } i^2 = -1 \text{ l'equazione sarà vera}$$

$$X^2 + 4 = 0 \text{ se } X = -2 \text{ o } X = 2$$

Rappresentazione dei numeri immaginari



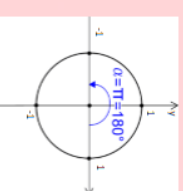
18



Prima di continuare...



Ricordiamo che il seno di π che in radianti rappresenta un angolo di 180 gradi è 0. Mentre il coseno è -1 .



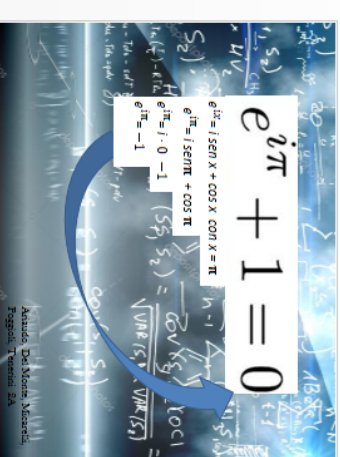
19



$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

$$e^{i\pi} = i \sin \pi + \cos \pi = -1$$

$$e^{i\pi} = -1$$



20



Grazie!

Matilde Ariando
Matteo Del Monte
Chiara Micarelli
Walter Poggioli
Marco Tenerini

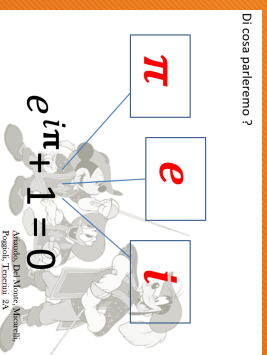


21



Prof.ssa Franca Donato
L.S. «Tullio Levi Civita»

Di cosa parleremo ?



Si introduce
l'argomento
partendo dalla
formula di Eulero e
si inizia ad
argomentare sui
vari numeri più o
meno noti.

π

- Caratteristiche
fisiche del numero

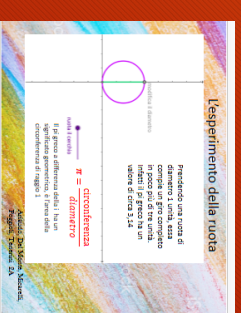


- Problema della sua
determinazione

Archimede intuì
la sua non
determinabilità e
da delle
approssimazioni
con considerazioni
geometriche

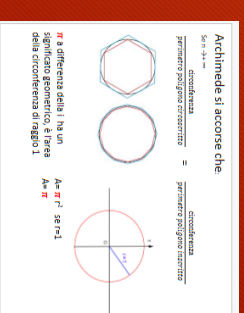


circonferenza
diametro



- Varie
definizioni di π

Area di
circonferenza
con raggio
unitario



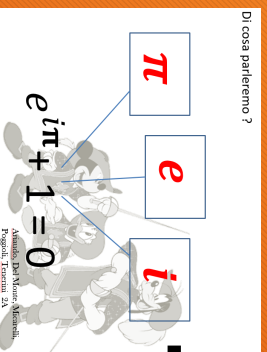
1° GRUPPO



ssa Franca Donato
«Tullio Levi Civita»

Concetti introdotti e discussi durante la trattazione dell'argomento

- Caratteristiche fisiche del numero

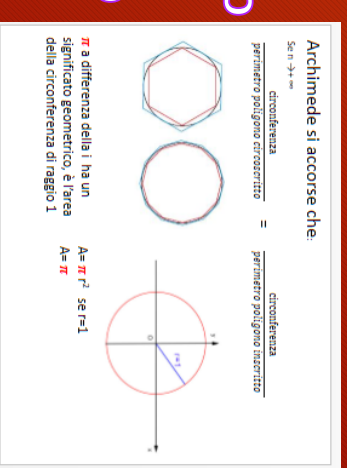
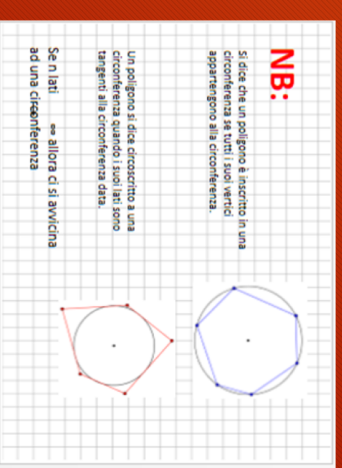


Breve introduzione dei numeri irrazionali e esempi di numeri irrazionali già conosciuti lo scorso anno

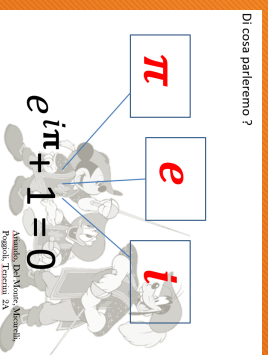
- Problema della sua determinazione

dividuale ricorsioni e
gnificato di periodo

- Stima di π
- Introduzione del concetto di approssimazione per difetto e per eccesso di una grandezza come il perimetro della circonferenza



1° GRUPPO



- Caratteristiche fisiche del numero Eulero e le notazioni simboliche



Importanza ed efficacia dell'uso dei simboli

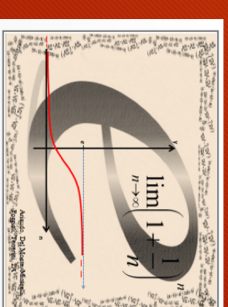
Alcuni simboli introdotti da Eulero



- Problema della sua determinazione
- Modi diversi che portano tendenzialmente allo stesso valore

- Varie definizioni di e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n$$



$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n \frac{1}{i!}$$

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots$$

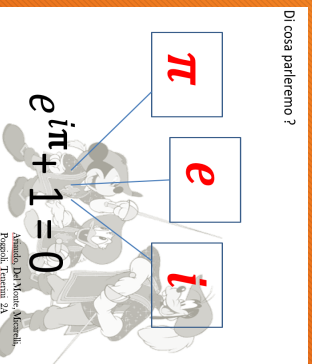
Conosciuti anche il simbolo e per la serie di Taylor e il simbolo e per la serie di Taylor.

sa Franca Donato
Tullio Levi Civita»

- Tecniche per ricordare il numero

Concetti introdotti e discussi durante la trattazione dell'argomento

Di cosa parleremo ?



- Caratteristiche fisiche del numero

Discussione sul contributo di Eulero alla trattazione simbolica degli argomenti



- Problema della sua determinazione

Richiami del significato di fattoriale e delle sue proprietà

(argomento già introdotto lo scorso anno)

e

$= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!}$

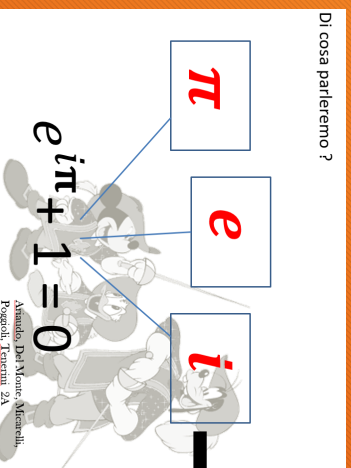
$e = 1 + 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots$

Curiosità!
Anche il simbolo sigma fu scelto da Eulero per indicare una somma di una successione di numeri.

Esiste anche quest'altra formula per definire il numero e

Dea Montis, Macerini, Rossetti, Trattato 2A

Concetti introdotti e discussi durante la trattazione dell'argomento



- Una semplice funzione che contiene il numero e :
 $y=e^x$

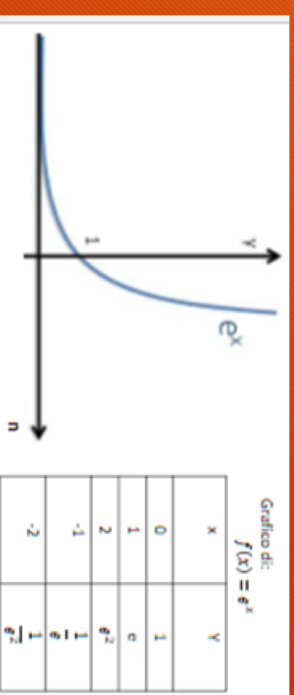
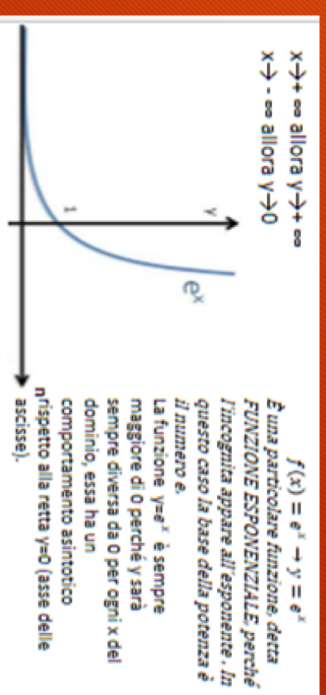


Grafico per punti della funzione $y=e^x$



Caratteristiche della funzione $y=e^x$ a partire dal suo grafico

(argomento già trattato per altri grafici)

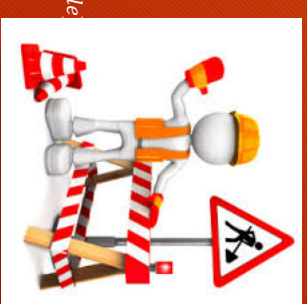
- Introduzione del concetto di derivata come operatore che agisce su una funzione: informazioni ricavabili dalla conoscenza della derivata di una funzione

Prof.ssa Franca Donato
L.S. «Tullio Levi Civita»

ATTIVITA' PROPOSTA PER CASA

Viene definita funzione esponenziale una funzione in cui l'elemento generico del dominio x compare come esponente di una potenza.

La più semplice delle funzioni esponenziali è del tipo : $y = a^x$ con $a > 0$ e $a \neq 1$ (per escludere il caso banale)



1° tipo

Disegnare sullo stesso piano cartesiano, usando penne colorate, tre funzioni esponenziali del tipo

$$y = a^x$$

con basi $0 < a < 1$

$$\text{es. } y = \left(\frac{1}{2}\right)^x ; y = \left(\frac{1}{3}\right)^x ; y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$$

Guardando i grafici delle funzioni esponenziali $y = a^x$ con basi $0 < a < 1$ determinare:

Dominio funzione

Codominio

Intersezione asse x

Intersezione asse y

Segno funzione

Andamento della funzione per $x \rightarrow +\infty$

Andamento della funzione per $x \rightarrow -\infty$

Eventuali comportamento asintotico

Equazione dell'asintoto

2° tipo

Disegnare sullo stesso piano cartesiano, usando penne colorate, tre funzioni esponenziali del tipo

$$y = a^x$$

con basi $a > 1$

$$\text{es. } y = (2)^x ; y = (3)^x ; y = (4)^x$$

Guardando i grafici delle funzioni esponenziali $y = a^x$ con basi $0 < a < 1$ determinare:

Dominio funzione

Codominio

Intersezione asse x

Intersezione asse y

Segno funzione

Andamento della funzione per $x \rightarrow +\infty$

Andamento della funzione per $x \rightarrow -\infty$

Eventuali comportamento asintotico

Equazione dell'asintoto

Determinare caratteristiche comuni ai due tipi di grafici esponenziali

Prof.ssa Franca Donato
L.S. «Tullio Levi Civita»

Di cosa parleremo ?

Di cosa parliamo?

$e^{i\pi} + 1 = 0$

π

e

i

Illustration: Da Vinci Research
Pisapia, Toranzo 20



Esigenza che ha portato all'introduzione di questa nuova quantità

- Caratteristiche fisiche del numero: numero trascendente
- I numeri immaginari e la loro rappresentazione.
- Piano complesso

Elvando al quadrato un numero reale il risultato non è mai negativo quindi se si vuole ovviare a questo inconveniente si deve introdurre il numero i il cui quadrato da -1 .

i è un numero
IMMAGINARIO

Ariada, Del Monn, Mawell, Tott
Trotter, TA

1. GRUPPO

**I TRE
MOSCHETTIERI
DELLA
MATEMATICA:**

π, e, i



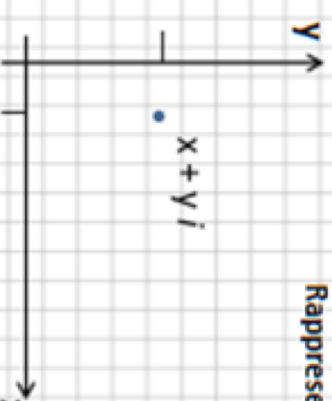
i è un numero non trascendente infatti è soluzione della seguente equazione :

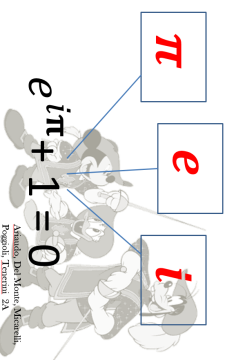
$x^2 + 1 = 0$ infatti se $i^2 = -1$ l'equazione sarà vera

$$X^2 + 4 = 0 \text{ se } X^2 = -4 = -1(4) = -4 \cdot -1 = 2 \cdot i$$

Rappresentazione dei numeri immaginari

Il numero i non si può rappresentare sull'asse dei numeri reali perché non è reale allora lo posizioniamo in un nuovo asse perpendicolare all'asse dei reali, si ottiene un piano complesso: formato da un'asse parte reale e un'asse immaginaria. Ogni punto di tale piano rappresenta un numero complesso.





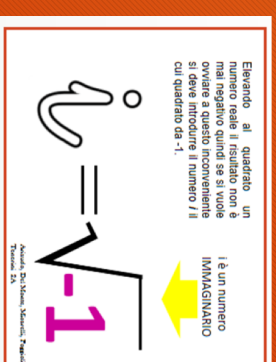
Esigenza che ha portato all'introduzione di questa nuova quantità

i è un numero non trascendente infatti è soluzione della seguente equazione:
 $X^2 + 1 = 0$ infatti se $i^2 = -1$ l'equazione sarà vera
 $X^2 + 4 = 0$ se $X^2 = -4 = -1(4) = \sqrt{4} \cdot \sqrt{-1} = 2 \cdot i$

Rappresentazione dei numeri immaginari

Il numero i non si può rappresentare sull'asse dei numeri reali perché non è reale allora lo posizioniamo in un nuovo asse perpendicolare all'asse dei reali, si ottiene un piano complesso: formato da un'asse parte reale e un'asse immaginaria. Ogni punto di tale piano rappresenta un numero complesso.

$x + y i$



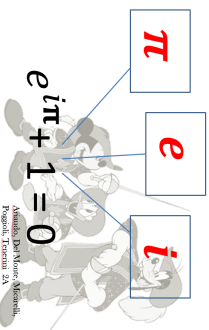
1° GRUPPO



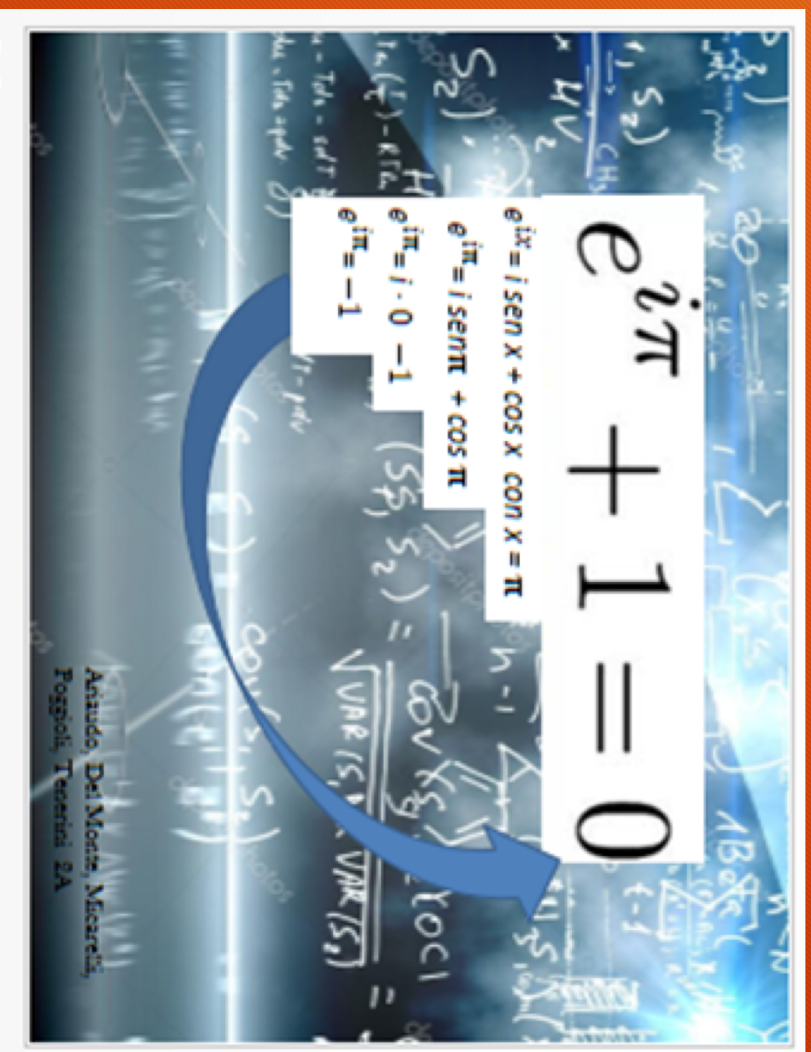
- Significato di numero trascendente
- Introduzione dei numeri immaginari e la loro rappresentazione.
- Introduzione del piano complesso
- Introduzione della forma dei numeri complessi

Prof.ssa Franca Donato
 L.S. «Tullio Levi Civita»

Di cosa parleremo ?



- Dall'equazione di Eulero alla formula di Eulero



1° GRUPPO

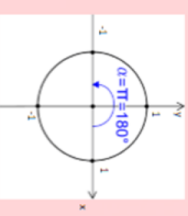


Ripasso delle funzioni circolari

Prima di continuare...



Ricordiamo che il seno di π che in radianti rappresenta un angolo di 180 gradi, è 0. Mentre il coseno è -1.



Prof.ssa Franca Donato
L.S. «Tullio Levi Civita»