

# Π E I NUMERI MODERNI

A.S. 2017/18

Liceo scientifico «Tullio Levi Civita»

Lavoro svolto con gli alunni della classe IIA potenziato

# Introduzione



Documento di  
Microsoft Word

N° 1 Gen-Apr 2017  
Periodico  
di matematiche  
Volume 9 Serie XIII - Anno CXXII

L'idea del lavoro presentato oggi nasce dalla lettura  
di un articolo del periodico di matematiche della  
**Mathesis n° 1 Gen-Apr 2017**

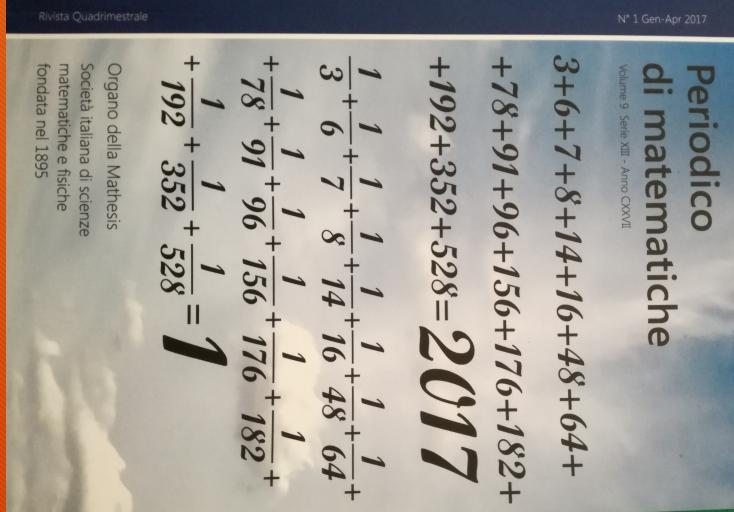
«I tre Moschettieri della Matematica»  
di Guido Trombetti

L'articolo presenta una sintesi della storia della  
popolarità dei numeri  $\pi$ , e ed i.

I numeri vengono identificati con i personaggi del  
romanzo di Dumas: I tre moschettieri.

$\pi$ : ...simpatico, gaudente, festaiolo come Porthos.

e: ...scontroso. Meno amante della ribalta. Saggio.  
Calcolatore ... Tra i moschettieri ricorda Athos.  
i: ... E' ascetico. Silenzioso. Imperscrutabile. Sottile  
come Aramis.



Rivista Quadrimestrale  
Organizzazione  
Società Italiana di scienze  
matematiche e fisiche  
fondata nel 1895

Prof.ssa Franca Donato  
L.S. «Tullio Levi Civita»

# Introduzione

L'articolo era scritto in modo accattivante quindi,  
ho pensato che poteva coinvolgere gli alunni del  
liceo matematico.

Come compito delle vacanze ho assegnato la  
lettura dell'articolo e ho chiesto loro di lavorare  
in gruppo per approfondire e preparare una  
presentazione in power point. La presentazione  
sarebbe stata visionata all'inizio del nuovo anno  
scolastico.



## Motivazioni

**La finalità dell'attività è quella di cercare di ottenere una visione «ampia» di concetti legati al ‘numero’, includendo le diverse manifestazioni dell’esigenza di crearli. Si vuole:**

- sottolineare i nodi concettuali principali che hanno portato all’introduzione di nuovi ‘numeri’, mostrando ruolo e significato del formalismo matematico necessario alla loro caratterizzazione e quantificazione.
- far nascere la necessità di investigare, costruire un percorso, esprimere e comunicare
- stimolare al lavoro di gruppo apportando il proprio contributo secondo le personali competenze
- Creare una base di conoscenze per poter sviluppare gli argomenti a partire dalle proposte fatte dai ragazzi

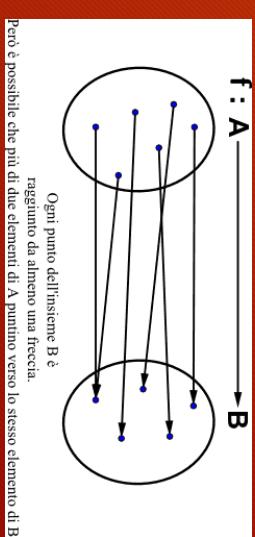
# Argomenti affrontati prima della 'partenza' del progetto



Nei mesi di settembre e ottobre sono stati ripresi argomenti che non erano stati affrontati lo scorso anno:

## Relazioni e funzioni.

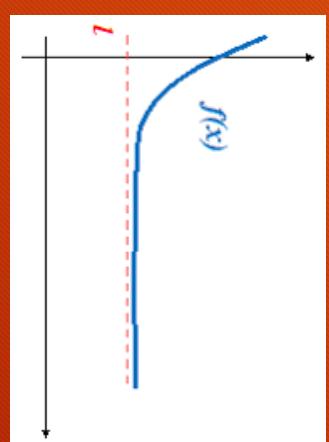
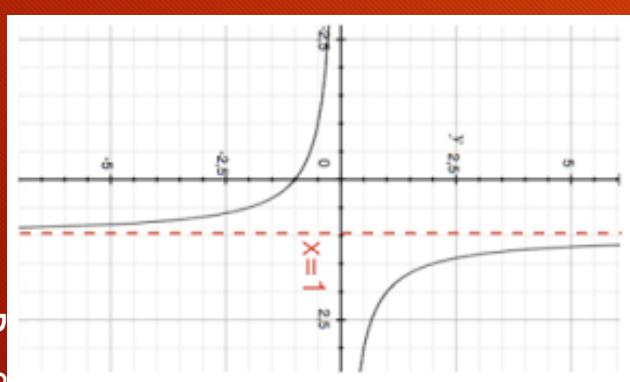
In particolare, per le funzioni, si sono sottolineati i differenti modi per rappresentare una funzione e per ognuno di tali modi si sono ricavate le caratteristiche individuabili della funzione stessa.



# ...prima di partire

**Dal diagramma di una funzione:** dominio, codominio, intersezioni con gli assi, zeri della funzione, segno della funzione, caratteristiche di suriettività, iniettività e biettività. Individuazione di eventuali comportamenti asintotici della funzione con determinazione delle equazioni degli asintoti orizzontali e verticali.

Determinazione della funzione inversa di funzioni biunivoche.

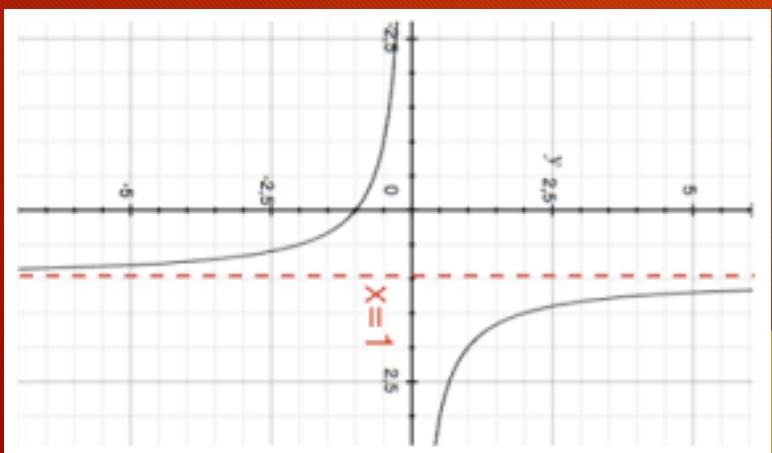
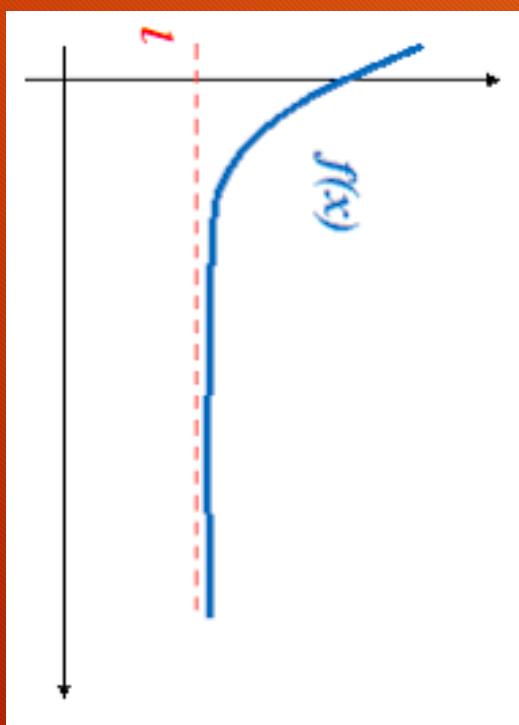


**Nota Bene:** Si sono introdotte delle notazioni simboliche per indicare gli andamenti individuati dalle funzioni

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = l$$



# Programmazione del lavoro

A inizio novembre ho assegnato altro materiale ai ragazzi per riprendere e approfondire il lavoro fatto su « $\pi$  e i numeri moderni» che come al solito doveva essere trattato in modo trasversale.

- Nel complesso ci sono stati 5 gruppi
  - Le presentazioni elaborate in power point sono state messe a disposizione su una cartella di onedrive

# Tempi

- Ho iniziato a sentire il primo gruppo a fine Novembre
- Il tempo dedicato ad ogni gruppo è stato di circa due ore: presentazione del lavoro + tempo dedicato all'approfondimento o al chiarimento dei concetti emersi durante l'esposizione.

Gli alunni spettatori, hanno preso nota dei suggerimenti e degli approfondimenti che man mano emergevano e, a volte, hanno corretto in corsa i loro lavori.

# Tempi (previsione)

Sono previste altre 3 ore di intervento:

- progettazione di una verifica scritta sull'argomento della durata di 1 ora fatta a cura dei vari gruppi
- revisione e unificazione della verifica a cura del docente
- somministrazione alla classe della verifica
- Correzione e discussione dei risultati

# Tempi (previsione)

L'ultima fase del lavoro (2 ore complessive) prevede:

- realizzazione di una sola presentazione power point a cura di una commissione di alunni proveniente da vari gruppi.
- esposizione dell'unico lavoro finale ad altre classi.

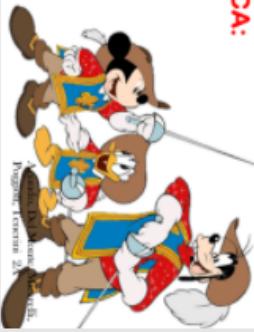
# Modalità di esposizione

- Ogni gruppo ha esposto in classe la presentazione prodotta.
  - La presentazione è stata valutata e motivata da tutti (alunni e docente), secondo tre principali indicatori:
    - Caratteristiche grafiche del lavoro in power point
    - Qualità dell'esposizione
    - Capacità di approfondimento dell'argomento in alcuni aspetti.
- Durante il periodo di lavoro, i ragazzi sono stati invitati a riassumere a voce quanto emerso dalle presentazioni dei lavori dei vari gruppi, in seguito saranno valutati attraverso le compilazioni di schede redatte dagli alunni e dal docente.

# Le presentazioni prodotte dai vari gruppi

I TRE MOSCHETTIERI DELLA MATEMATICA:

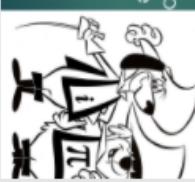
$\pi, e, i$



$\pi, i$  ed  $e$

■ presentazione parleremo  
costanti matematiche

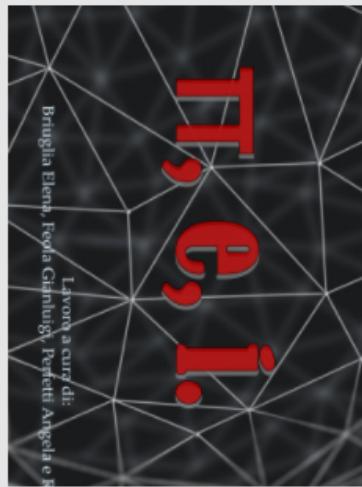
■ valori analitici sono tra loro  
e mezzo di una formula che  
amo successivamente.



I TRE MOSCHETTIERI DE  
MATEMAT

$\pi$        $i$        $e^{i\pi+1}$

3 numeri moderni  
numeri moderni Del



I tre moschettieri:  $\pi, e$  ed  $i$

1 numeri moderni  
numeri moderni

2 numeri moderni  
Andrea Tricarico,

3 bis numeri moderni  
numeri moderni Del



Prof.ssa Franca Donato  
L.S. «Tullio Levi Civita»

## 1° GRUPPO

Il lavoro proposto dal quarto gruppo ha permesso i seguenti spunti di discussione:

- ✓ Significato di numero razionale e numeri trascendenti
- ✓ Poligoni inscritti e circoscritti in una circonferenza
- ✓ Approssimazione per eccesso e per difetto del valore di una grandezza
- ✓ Andamento di alcune funzioni (per es. funzioni esponenziali)
- ✓ Ripasso l'operatore fattoriale
- ✓ Ripasso sulle funzioni circolari

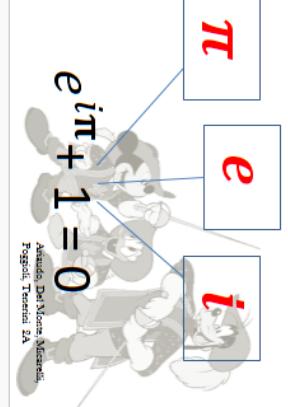
I TRE  
MOSCHETTERI  
DELLA  
MATEMATICA:

$\pi, e, i$



1° GRUPPO

Di cosa parleremo



7

Dici cosa parliremo?

$e^{i\pi} + 1 = 0$

$\pi$

$e$

$i$

6

Esiste un numero che si indica con  $\pi$ .  
 Esso ha infinite cifre, è un numero decimale e irrazionale.  
 Oggi le cifre calcolate sono 1.240.000.000.000.  
 Già nell'antichità Egizie e Babilonesi avevano cominciato a studiare questo numero, ma entrambi usando ragionamenti ingegnosi erano arrivati a risultati diversi.

Egizi = 3,160  
 Babilonesi = 3,125

**CURIOSITÀ:**  
**Festa del pi greco**  
**14 marzo**




4

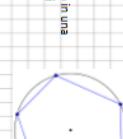
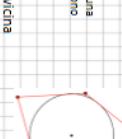
6

**N.B.:**

Si dice che un poligono è inscritto in una circonferenza se tutti i suoi vertici appartengono alla circonferenza.

Un poligono si dice circoscritto a una circonferenza quando i suoi lati sono tangenti alla circonferenza data.

Se i lati  
» allora ci si avvicina  
ad una circonferenza



1

Archimede si accorse che

$\pi < n \rightarrow \pi <$

$$\frac{\text{circonferenza}}{\text{perimetro poligono circoscritto}} = \frac{\text{circonferenza}}{\text{perimetro poligono inscritto}} = \frac{\text{circonferenza}}{\text{circonferenza}}$$

$A = \pi r^2$   
 $\text{se } r=1$

1

**Euler**

Nacque a Basilea il 15 aprile 1707.  
Euler è stato senz'altro il più grande  
matematico romano di  
“demonstrazioni matematiche”,  
offrendo il suo nome a una quantità  
impressionante di formule, teoremi,  
metodi, criteri, relazioni, equazioni.  
Tra le nozioni che Euler ha reso  
celebre o ha creato spaccando:  
• n. lo nominò nel suo libro  
intitolato *Introductio in analysin  
infinitorum* del 1748.  
• nello stesso libro citò prima  
di approfondire le spiegazioni su  
questa costante e calcolò ben 15  
cifre decimali

A portrait painting of Leonhard Euler, an 18th-century Swiss mathematician and physicist. He is shown from the chest up, wearing a dark blue robe over a white cravat and a white shirt. His hair is powdered and powdered white. He has a thoughtful expression, looking slightly to his left.

**Avvocato Del Mondo Macmillan**  
Poggio, Ternana RA

1 ° GRUPPO

NB:

L'obiettivo della notazione è quello di creare un linguaggio sintetico che permetta di sostituire efficacemente lunghe sequenze di parole con simboli simbolici.

In termini non matematici, una valida notazione stabilisce regole comuni d'applicazione per le operazioni pratiche, perché ci consente di capirci a vicenda. L'attuale notazione non è perfetta ma si è molto evoluta.

10

۲۰

=  $1 + \frac{1}{1+} + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \dots$

Curiosità!  
Anche il simbolo  $\sum$  fu scelto  
da Euler per indicare una  
somma di una successione di  
numeri.

Estate anche  
quest'altra  
formula per  
definire il  
numero e

**Enrico De Monte, Masseroli,**  
Sestola, Trentino, 2A

1

$$e^x = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{\frac{1}{\frac{1}{n}}} \equiv \left(1 + \frac{x}{1}\right)^{\frac{1}{1}} \text{ con } n \rightarrow \infty$$

ad infinito  
con n che tende  
a infinito

$$e^x = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{X}{n}\right)^n \equiv \left(1 + \frac{X}{1}\right)^1$$

con  $n \rightarrow \infty$   
ad infinitum

↑

f(x) =  $e^x - 1 = y^x$

è una parrocchia funzione detta  
FONCTION EXPONENTIELLE perché  
l'incognita assume all'esponente. In  
oltre

**La derivata** è un operatore che agisce su una funzione e dà luogo ad un'altra funzione. Con quest'ultima funzione e il derivato, al variare di  $x$ , si trovano i coefficienti a riguardo della curva passanti per il punto corrispondente alla  $x$  scelta. Quando si determina la derivata di un'equazione data da  $y = f(x)$  si ha in genere una nuova funzione, nel senso di  $f'(x) = e^x$  è la derivata di  $f(x) = e^x$ . La funzione  $f'(x) = e^x$  è chiamata **funzione principale**.

1



1

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

ESEM

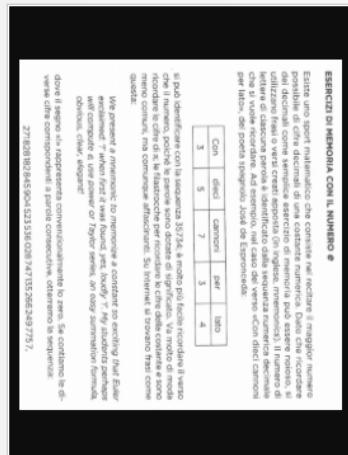
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

1

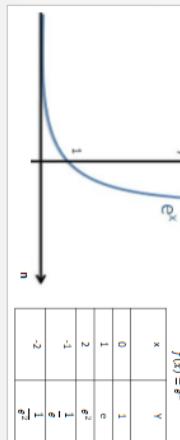
Con el fin de evaluar la eficiencia del sistema de control, se realizó un experimento.

Esempio: per esempio, una scuola di matematica ha deciso di utilizzare il maggior numero di decimali per i suoi risultati. Dato che nonostante i decimali frai si verifici sempre un errore di arrotondamento, la scuola ha deciso di arrotondare tutti i risultati al quinto decimale. Al momento del suo esame, un allievo deve dare la risposta a una domanda del tipo: "Quanto è  $\pi$ ?" e la risposta corretta è  $3,14159$ . Il risultato che l'allievo deve dare è invece  $3,1415926535897931155997933473346349223693$ , perché l'errore di arrotondamento si è propagato oltre il quinto decimale.

1



1



1

Prof.ssa Franca Donato  
L.S. «Tullio Levi Civita»

# 1° GRUPPO

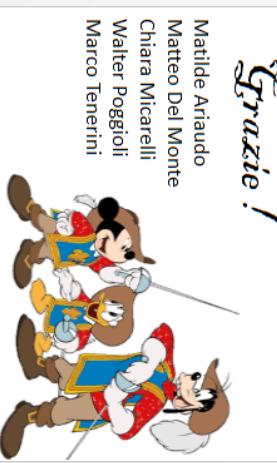
17

Elevando al quadrato un numero reale il risultato non è mai negativo quindi se si vuole ovviare a questo inconveniente si deve introdurre il numero  $i$  il cui quadrato da  $-1$ .

$i$  è un numero  
IMMAGINARIO

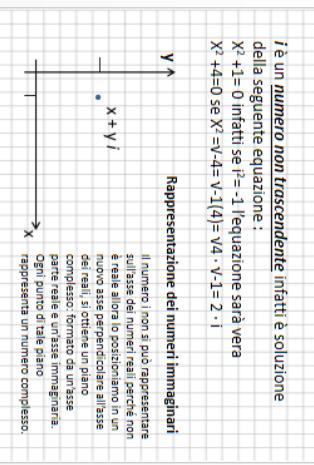
$$i = \sqrt{-1}$$

Autore: Di Matteo, Mancini, Tullio.



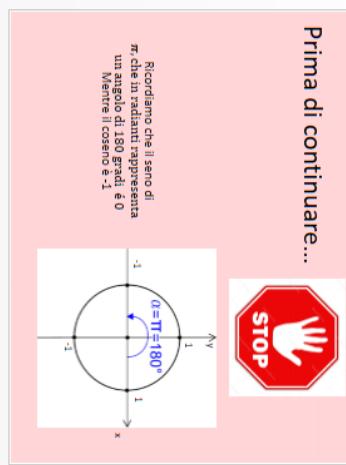
21

18



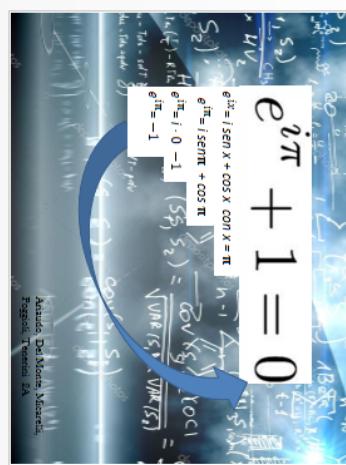
★

19



★

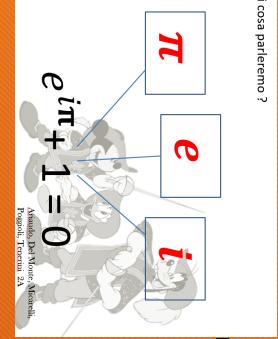
20



★



Di cosa parleremo?



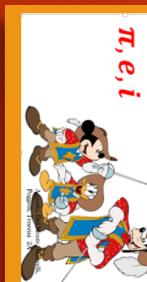
→  **$\pi$**

- Caratteristiche fisiche del numero



# 1° GRUPPO

I TRE MOSCHETTERI DELLA MATEMATICA:  
 **$\pi, e, i$**



Si introduce l'argomento partendo dalla formula di Eulero e si inizia ad argomentare sui vari numeri più o meno noti.

- Problema della sua determinazione

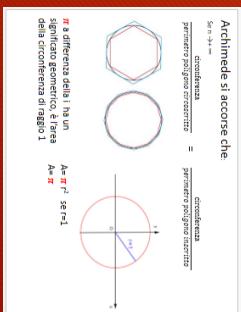
Archimede intuisce la sua non determinabilità e da delle approssimazioni con considerazioni geometriche

$circonferenza$   
 $diametro$



Area di circonferenza con raggio unitario

• Varie definizioni di  $\pi$



.ssa Franca Donato  
«Tullio Levi Civita»

# 1° GRUPPO

Concetti introdotti e discussi durante la trattazione  
dell'argomento



$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

Almanacco dei Matemagici, 2011  
Postino, Cattivini 24

- Caratteristiche fisiche del numero

Breve introduzione dei numeri irrazionali e esempi di numeri irrazionali già conosciuti lo scorso anno

dividuare ricorsioni e significato di periodo

- Problema della sua determinazione

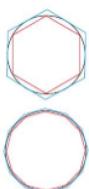
Definizione di poligoni inscritti e circoscritti ad una circonferenza

(argomento non ancora trattato)

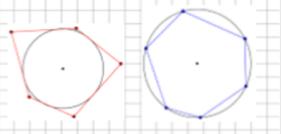
Introduzione del concetto di

- Stima di  $\pi$  approssimazione per difetto

e per eccesso di una grandezza come il perimetro della circonferenza



Archimede si accorse che:  
Se  $n \rightarrow \infty$   
 $\frac{\text{circonferenza}}{\text{perimetro poligono circoscritto}} = \frac{\text{circonferenza}}{\text{perimetro poligono inciso}}$



NB:  
Si dice che un poligono è inscritto in una circonferenza se tutti i suoi vertici appartengono alla circonferenza.

Un poligono si dice circoscritto a una circonferenza quando suoi lati sono tangenti alla circonferenza data.

Se i lati  $\Rightarrow$  allora ci si avvicina ad una circonferenza

$\pi$  a differenza della  $i$  ha un significato geometrico, è l'area della circonferenza di raggio 1

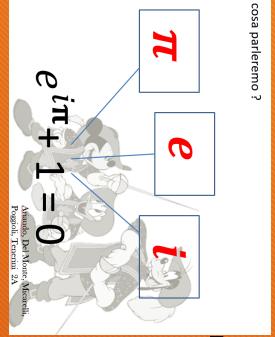
$$A = \pi r^2$$

$$A = \frac{\pi}{r}$$

Donato Civita»



Di cosa parleremo?



- Caratteristiche fisiche del numero Eulero e le notazioni simboliche

Importanza ed efficacia dell'uso dei simboli



Alcuni simboli introdotti da Eulero

$\pi$   
 $e$   
 $\Sigma$

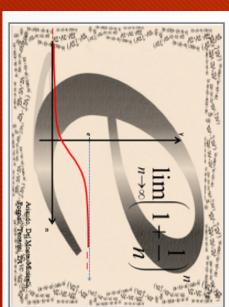
# 1° GRUPPO



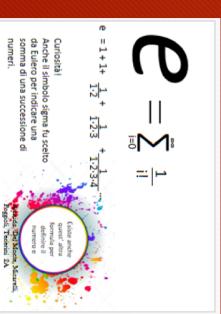
- Problema della sua determinazione valore
- Modi diversi che portano tendenzialmente allo stesso valore

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n \frac{1}{i!}$$



sa Franca Donato  
Tullio Levi Civita»



Giusti

Accadeva

ogni giorno

da solo per indicare un

numero.

ma non

era

una

soluzio-

n

ne

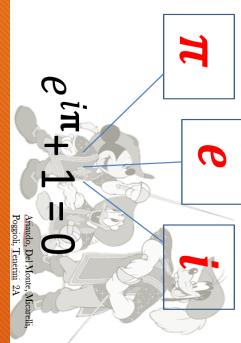
per

che

# Concetti introdotti e discorsi durante la trattazione

## dell'argomento

Di cosa parleremo?



- Caratteristiche fisiche del numero

Discussione sul contributo di Eulero alla trattazione simbolica degli argomenti

- Problema della sua determinazione

Richiami del significato di fattoriale e delle sue proprietà

(argomento già introdotto lo scorso anno)

$$e = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!}$$

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \dots$$

Curiosità!

Anche il simbolo sigma fu scelto da Eulero per indicare una somma di una successione di numeri.



Esesta anche  
quest'altra  
formula per  
definire il  
numero e

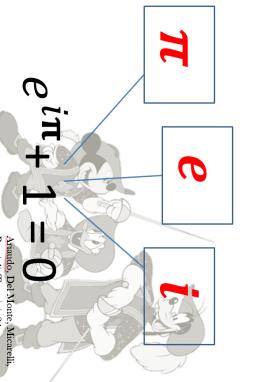
## 1° GRUPPO



# Concetti introdotti e discorsi durante la trattazione dell'argomento

## 1° GRUPPO

Di cosa parleremo?



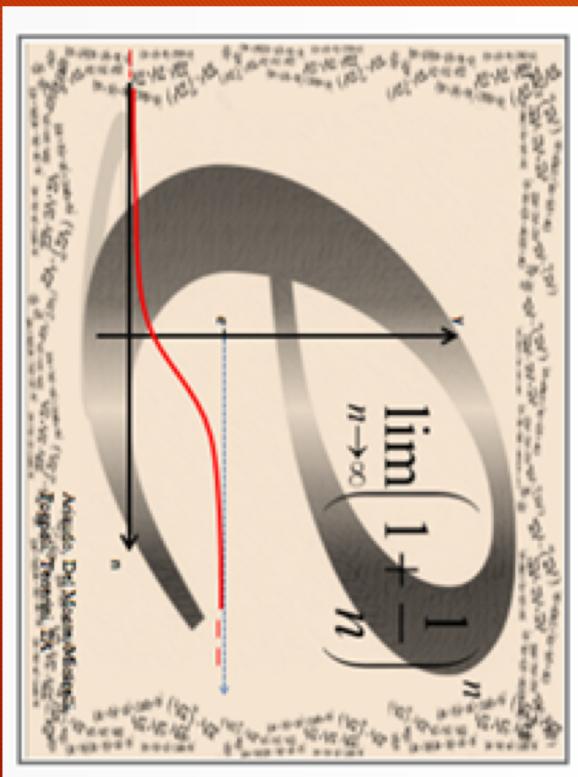
- Problema della sua determinazione

Interpretazione intuitiva del limite notevole

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

### ESEMPI:

$$\begin{aligned} \text{Se } n = 1 &\rightarrow \left(1 + \frac{1}{1}\right)^1 = 2 \\ \text{Se } n = 2 &\rightarrow \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} = 2.25 \\ \text{Se } n = 3 &\rightarrow \left(1 + \frac{1}{3}\right)^3 = \frac{64}{27} = 2.37 \\ \dots \\ \text{Se } n = 10 &\rightarrow \left(1 + \frac{1}{10}\right)^{10} = \left(\frac{11}{10}\right)^{10} = 2.593 \\ \dots \\ \text{Se } n = 100 &\rightarrow \left(1 + \frac{1}{100}\right)^{100} = 2.70 \end{aligned}$$



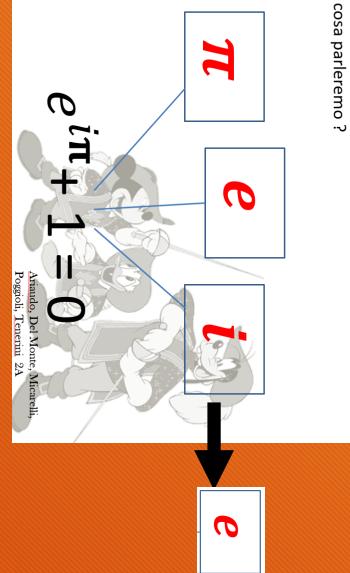
Interpretazione grafica



# Concetti introdotti e discussi durante la trattazione

## dell'argomento

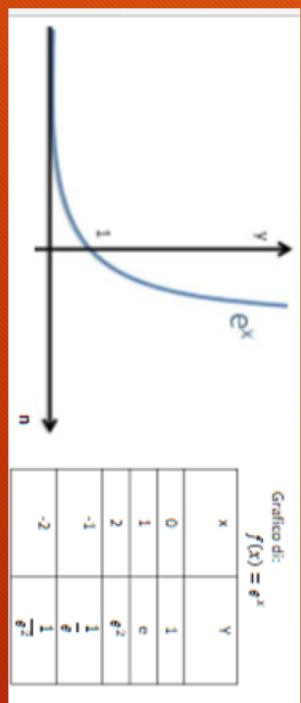
Di cosa parleremo?



- Una semplice funzione che contiene il numero  $e$ :

$$y = e^x$$

Grafico per punti della funzione  $y = e^x$



$x \rightarrow +\infty$  allora  $y \rightarrow +\infty$   
 $x \rightarrow -\infty$  allora  $y \rightarrow 0$

$f(x) = e^x \rightarrow y = e^x$

È una particolare funzione, detta FUNZIONE ESPONENZIALE, perché l'incognita appare all'esponente. In questo caso la base della potenza è il numero  $e$ .

La funzione  $y = e^x$  è sempre maggiore di 0 perché y sarà sempre diversa da 0 per ogni  $x$  del dominio, essa ha un comportamento asintotico rispetto alla retta  $y=0$  (asse delle ascisse).

Caratteristiche della funzione  $y = e^x$  a partire dal suo grafico  
(argomento già trattato per altri grafici)

- Introduzione del concetto di derivata come operatore che agisce su una funzione: informazioni ricavabili dalla conoscenza della derivata di una funzione

# 1° GRUPPO



# ATTIVITA' PROPOSTA PER CASA

Viene definita funzione esponenziale una funzione in cui l'elemento generico del dominio  $x$  compare come esponente di una potenza.

La più semplice delle funzioni esponenziali è del tipo :  $y = a^x$  con  $a > 0$  e  $a \neq 1$  (per escludere il caso banale)

## 1° tipo

Disegnare sullo stesso piano cartesiano, usando penne colorate, tre funzioni esponenziali del tipo

$$y = a^x$$

con basi  $0 < a < 1$

es.  $y = (\frac{1}{2})^x$ ;  $y = (\frac{1}{3})^x$ ;  $y = (\frac{1}{4})^x$

Guardando i grafici delle funzioni esponenziali  $y = a^x$  con basi  $0 < a < 1$  determinare:

Dominio funzione

Codominio

Intersezione asse  $x$

Intersezione asse  $y$

Segno funzione

Andamento della funzione per  $x \rightarrow +\infty$

Andamento della funzione per  $x \rightarrow -\infty$

Eventuali comportamento asintotico

Equazione dell'asintoto

## 2° tipo

Disegnare sullo stesso piano cartesiano, usando penne colorate, tre funzioni esponenziali del tipo

$$y = a^x$$

con basi  $a > 1$

es.  $y = (2)^x$ ;  $y = (3)^x$ ;  $y = (4)^x$

Guardando i grafici delle funzioni esponenziali  $y = a^x$  con basi  $0 < a < 1$  determinare:

Dominio funzione

Codominio

Intersezione asse  $x$

Intersezione asse  $y$

Segno funzione

Andamento della funzione per  $x \rightarrow +\infty$

Andamento della funzione per  $x \rightarrow -\infty$

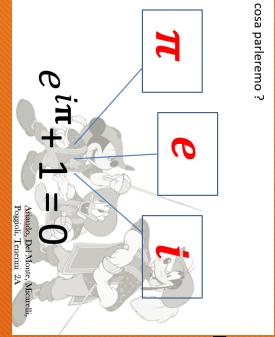
Eventuali comportamento asintotico

Equazione dell'asintoto

Determinare caratteristiche comuni ai due tipi di grafici esponenziali



Di cosa parleremo?

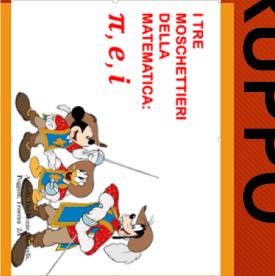


→ ***i*** Esigenza che ha portato all'introduzione di questa nuova quantità

Elevando al  $i$  quadrato un numero reale si risulta non è mai negativo quindi se si vuole arrivare a questo è conveniente introdurre il numero  $i$  il cui quadrato da  $-1$ .

***i*** è un numero IMMAGINARIO

$$i = \sqrt{-1}$$

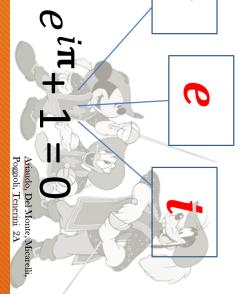


# 1° GRUPPO

***i*** è un numero non trascendente infatti è soluzione della seguente equazione :  
 $X^2 + 1 = 0$  infatti se  $i^2 = -1$  l'equazione sarà vera  
 $X^2 + 4 = 0$  se  $X^2 = \sqrt{-4} = \sqrt{-1}(4) = \sqrt{4} \cdot \sqrt{-1} = 2 \cdot i$

- I numeri immaginari e la loro rappresentazione.
- Piano complesso



$\pi$  $e$  $i$ 

Esigenza che ha portato all'introduzione di questa nuova quantità



Elevando al quadrato un numero reale si risulta non è mai negativo quindi se si vuole arrivare a questo inconveniente si deve introdurre il numero  $i$  il cui quadrato da -1.

$$\hat{i} = \sqrt{-1}$$

i è un numero IMMAGINARIO

# 1° GRUPPO



I TRE MOSCHETTIERI DELLA MATEMATICA:  
 $\pi, e, i$

- Significato di numero trascendente

$i$  è un numero non trascendente infatti è soluzione della seguente equazione :  
 $X^2 + 1 = 0$  infatti se  $i^2 = -1$  l'equazione sarà vera  
 $X^2 + 4 = 0$  se  $X^2 = \sqrt{-4} = \sqrt{-1}(4) = \sqrt{4} \cdot \sqrt{-1} = 2 \cdot i$

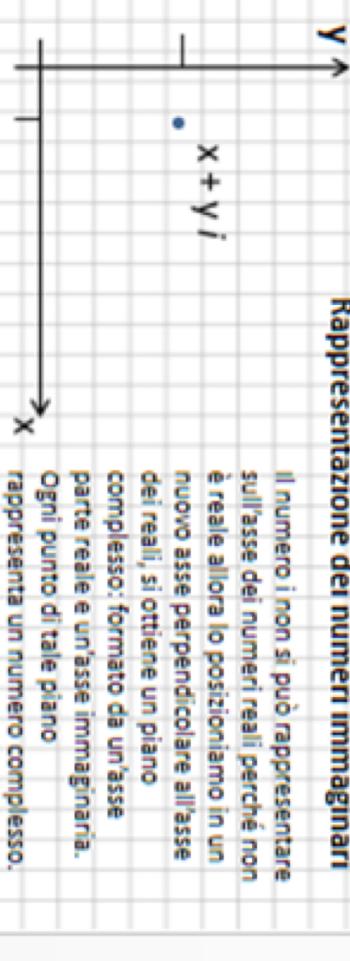
## Rappresentazione dei numeri immaginari

Il numero  $i$  non si può rappresentare sull'asse dei numeri reali perché non è reale allora lo posizioniamo in un

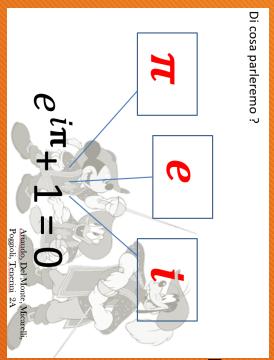
nuovo asse perpendicolare all'asse dei reali, si ottiene un piano complesso: formato da un'asse

parte reale e un'asse immaginaria.  
Ogni punto di tale piano rappresenta un numero complesso.

- Introduzione dei numeri immaginari e la loro rappresentazione.
- Introduzione del piano complesso
- Introduzione della forma dei numeri complessi



Di cosa parleremo ?



- Dall'equazione di Eulero alla formula di Eulero

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

$$e^{i\pi} = \cos \pi + i \sin \pi$$

6-1

1-1

Anzùdo, Del Monte, Mezzelana  
Poggoli, Tenerini 2A

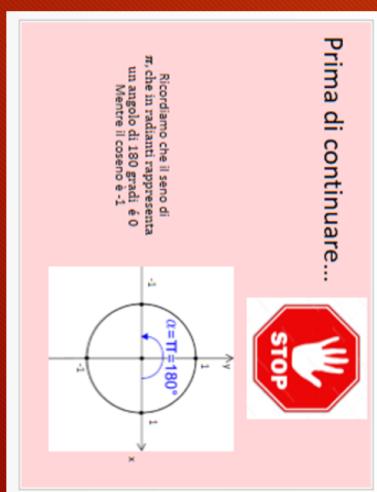
Prof.ssa Franca Donato  
L.S. «Tullio Levi Civita»

## Ripasso delle funzioni circolari

Prima di continuare...



Ricordiamo che il seno di  $\pi$ , che in radianti rappresenta un angolo di 180 gradi è 0. Mentre il coseno è -1.



I TRE  
MOSCHETTIERI  
DELLA  
MATEMATICA:

1° GRUPPO