Alessandra Caramanica-Maurizio Castellan, Liceo Ginnasio Statale Orazio, Roma
Liceo matematico, novembre 2017
Gruppo di lavoro in collaborazione con l'Università di Roma Tor Vergata

I numeri figurati

1. INTRODUZIONE

I numeri naturali:

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, …

sono i primi numeri che si apprendono nello studio della matematica. Essi possono essere classificati grazie alle loro diverse proprietà.

Per esempio:

- i numeri 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, … sono dispari;
- i numeri 0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, … sono multipli di 3;
- i numeri 4, 11, 18, 25, 32, … divisi per 7 danno resto 4;
- ecc …

Lo studio dei numeri naturali, che prende il nome di "teoria dei numeri", vanta una lunga storia ed è attualmente un settore molto attivo della ricerca pura ed applicata.

Prendendo spunto da un'idea nata nella scuola pitagorica, vedremo come utilizzando opportune "rappresentazioni grafiche" si possa dare "visibilità" alla struttura dei numeri naturali. Questo nuovo punto di vista renderà per certi aspetti più facile il loro studio.

Lungo la strada acquisiremo confidenza, inoltre, con alcuni concetti e costruzioni che giocano un ruolo fondamentale nel linguaggio matematico.

2. NUMERI COME FIGURE

2.1 Numeri e punti

I numeri[1] nascono per contare gli oggetti, in un modo molto semplice e intuitivo possiamo quindi pensarli come insiemi di punti. Proviamo dunque a rappresentare ogni numero mediante delle figure, contenenti tanti punti quanti ne indica il numero stesso.

[1] Nel seguito chiameremo i "numeri naturali" semplicemente "numeri".

Alessandra Caramanica-Maurizio Castellan, Liceo Ginnasio Statale Orazio, Roma
Liceo matematico, novembre 2017
Gruppo di lavoro in collaborazione con l'Università di Roma Tor Vergata

LABORATORIO 2.1

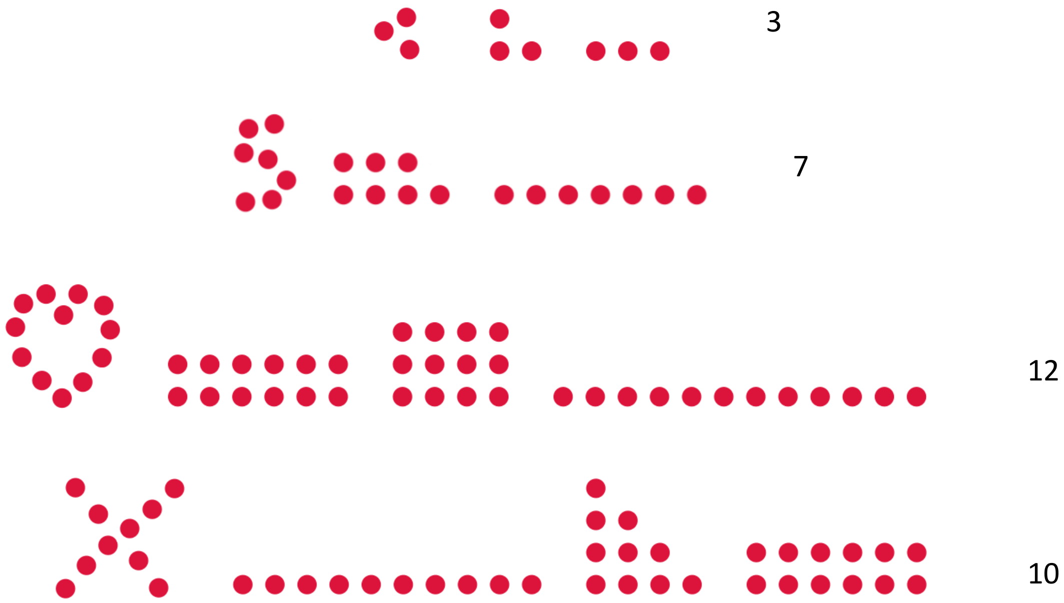
Attività 1
Rappresenta liberamente i numeri 3, 7, 12, 10, attraverso figure formate da punti.

Domande
Quali figure ti sembrano più interessanti ? Per quali motivi?

Attività 2
Rappresenta in vari modi i numeri 3, 7, 12, 10, attraverso figure formate da punti disposti su righe e colonne.

Domande
Quali figure mettono in risalto le proprietà del numero? Quali sono queste proprietà, e in che modo vengono messe in risalto dalle figure?

Risposte e commenti



Come possiamo osservare lo stesso numero può essere associato a differenti figure. Vedremo che alcune di queste hanno a che fare con proprietà note, ad esempio nel caso del 12 il primo rettangolo ci mostra che è pari e il secondo rettangolo che è un multiplo di 3.

Ogni numero che si scompone nel prodotto di due fattori si può rappresentare come un rettangolo che ha come numero di righe e di colonne i due fattori. Es: $10 = 2 \times 5$

$10 = 2 \times 5$

Tale numeri si dicono "rettangolari" (indicheremo un numero rettangolare con la lettera R munita di indici in basso per indicare il numero di righe e di colonne; nell'esempio precedente $10 = R_{2,5}$).

Se ammettiamo come rettangoli (particolari) anche quelli formati da una sola colonna o da una sola riga, risulta che tutti i numeri sono rettangolari.

Osserviamo inoltre che ogni numero primo (scomponendosi solo nel prodotto di 1 per il numero stesso) , può essere visto come un numero rettangolare in soli due modi. Esempio: il numero primo 5 si può rappresentare solo con due rettangoli:

$R_{5,1} = 5 \times 1$

$R_{1,5} = 1 \times 5$

L'idea di studiare i numeri con delle figure nasce nella matematica antica, ed è attribuito a Pitagora e alla sua scuola. Si parla in questo caso di "numeri figurati" o anche di "aritmogeometria" [1] [2].

Anche lo zero ha una sua "figura", essa consiste in un insieme vuoto di punti, cioè nessun punto:

0

Tuttavia ci occuperemo della sua rappresentazione solo in modo marginale[2].

Esercizi

2.1.1 Rappresenta in vari modi, su righe e colonne, i numeri da 1 a 15

2.1.2 Rappresenta i numeri rettangolari $R_{5,7}$, $R_{7,5}$, $R_{1,6}$, $R_{6,1}$, $R_{5,5}$.

2.1.3* Qual è la proprietà rappresentata dall'uguaglianza $R_{5,7} = R_{7,5}$?

2.1.4 Il numero 10 può essere rappresentato da un triangolo formato da righe che aumentano progressivamente di un punto.

10

Trova e rappresenta altri 4 numeri che hanno questa proprietà.

[2] Ricordiamo che nella matematica pitagorica lo zero non era oggetto di studio, fa la sua comparsa come numero in solo nel VII secolo grazie alla matematica indiana.

2.1.5* Il numero 38 può essere rappresentato da un triangolo come il 10? Giustifica la tua risposta.

2.1.6* Il numero 15 può essere rappresentato da un triangolo come il 10, ma anche da un rettangolo formato da 3 righe e 5 colonne.

15

Trova altri due numeri maggiori di 15, rappresentati da un triangolo come il 10, ma anche da un rettangolo con tre righe.

Attività libera

Sperimenta, congettura, dimostra.

2.2 Numeri pari e dispari figurati

Ricordiamo che i numeri pari sono i multipli di 2, mentre i numeri dispari sono quelli che divisi per 2 danno resto 1. Abbiamo visto che ogni numero può essere rappresentato con diverse figure. Se però vogliamo evidenziare il suo essere pari o dispari conviene rappresentarlo in modo opportuno.

LABORATORIO 2.2

Attività
Rappresenta, con figure formate da punti, i tre numeri pari 2, 6, 12 e i tre numeri dispari 3, 7, 15.

Domande
Qual è la figura che descrive meglio l'essere "pari"? Perché?
Qual è la figura che descrive meglio l'essere "dispari"? Perché?

Risposte e commenti

Rappresentiamo i numeri utilizzando due righe di punti nel modo seguente:

NUMERO PARI	FIGURA
2	● ●
6	● ● ● ● ● ●
12	● ● ● ● ● ● ● ● ● ● ● ●

NUMERO DISPARI	FIGURA
3	● ● ●
7	● ● ● ● ● ● ●
15	● ● ● ● ● ● ● ● ● ● ● ● ● ● ●

Possiamo riassumere il risultato per due numeri "generici" nel seguente modo:

NUMERO	FIGURA
Pari	● ● ··· ● ● ● ● ··· ● ● DUE RIGHE UGUALI DI PUNTI
Dispari	● ● ··· ● ● ● ··· ● ● DUE RIGHE DI PUNTI CHE DIFFERISCONO PER UN SOLO PUNTO

Nel caso del numero dispari 1 si ha:

NUMERO	FIGURA
1	●

Osserviamo infine che la scelta di figure formate da due sole righe è arbitraria, si poteva in alternativa optare in maniera del tutto equivalente per figure contenenti solo due colonne.

Esercizi

2.2.1 Scelto un numero rappresentato da un rettangolo con un numero pari di righe e un numero dispari di colonne, seziona il rettangolo e ricomponi i pezzi per mostrare che si tratta di un numero pari.

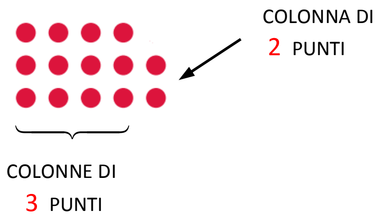
2.2.2 Scelto un numero rappresentato da un rettangolo con un numero dispari di righe e un numero pari di colonne, seziona il rettangolo e ricomponi i pezzi per mostrare che si tratta di un numero pari.

2.2.3 Scelti un numero rappresentato da un rettangolo con un numero dispari di righe e un numero dispari di colonne, seziona il rettangolo e ricomponi i pezzi per mostrare che si tratta di un numero dispari.

2.2.4 Se dividiamo il numero 14 per 3 otteniamo:

14 : 3 = 4 con resto 2

Possiamo mostrare questo fatto rappresentando il 14 nel modo seguente:



Dove il numero dei punti dell'ultima colonna indica il resto.

Dove possiamo ritrovare nella figura il divisore (3) e il quoziente (4)?

2.2.5* Rappresenta nello stesso modo un numero che diviso per 4 dà resto 1, ed un altro che diviso per 6 dà resto 3.

2.2.6* Rappresenta i numeri 11, 12, 13, 14, 15 mostrando i loro resti quando vengono divisi per 5.

2.2.7** Come posso rappresentare un "generico" numero che diviso per 5 dà come resto 3?

Attività libera

Sperimenta, congettura, dimostra.

2.3 Le regole della somma dei numeri pari e dei numeri dispari

I numeri pari e i numeri dispari si sommano rispettando le seguenti regole:

PARI + PARI = PARI

PARI + DISPARI = DISPARI

DISPARI + DISPARI = PARI

Proviamo a verificarle attraverso le figure di alcuni numeri pari e alcuni numeri dispari.

LABORATORIO 2.3

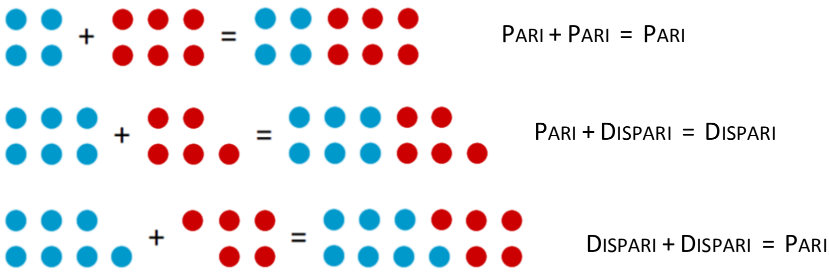
Attività

Rappresenta il numero pari 4 e, con un colore diverso, il numero pari 6.
Componi le due figure per mostrare che la loro somma è un numero pari.
Rappresenta il numero pari 6 e, con un colore diverso, il numero dispari 5.
Componi le due figure per mostrare che la loro somma è un numero dispari.
Rappresenta il numero dispari 7 e, con un colore diverso, il numero dispari 5.
Componi le due figure per mostrare che la loro somma è un numero pari.

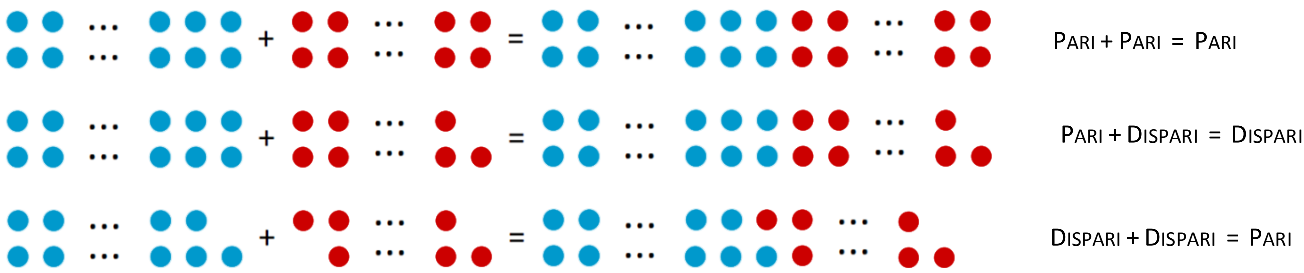
Domande

L'attività svolta ci permette di verificare le regole della somma dei numeri pari e dispari per i numeri dati, ma questo non ci autorizza ad affermare che esse siano sempre vere. Perché?
Come possiamo provare che le regole valgano per tutti i numeri pari e dispari?

Risposte e commenti



Dunque le regole valgono per i numeri dati, tuttavia non possiamo affermare che ciò avvenga per tutti i numeri: non è sufficiente mostrare che un fatto sia vero in alcuni casi per concludere che sia sempre così! Se vogliamo "dimostrare" che le regole valgano in generale dobbiamo rinunciare ad esempi specifici; possiamo però utilizzare tutto ciò che è applicabile ad un "qualsiasi" numero pari e dispari. Possono tornarci utile allo scopo le "figure" di un numero pari e di un numero dispari generici (cfr. 2.2); possiamo allora procedere nel seguente modo:



Esercizi

2.3.1 Scelti e rappresentati tre numeri dispari prova attraverso le figure che la loro somma è un numero dispari.

2.3.2 Scelti e rappresentati quattro numeri dispari prova attraverso le figure che la loro somma è un numero pari.

2.3.3* Rappresenta (vedi es.2.2.4) un numero che diviso per 5 dà resto 1 e (con un colore diverso) un altro che diviso per 5 dà resto 2. Mostra che, separando le colonne dei resti e ricomponendo il tutto, si ottiene un numero che diviso per 5 dà resto 3.

2.3.4* Rappresentato un numero che diviso per 3 dà resto 1 e un altro che diviso per 3 dà resto 2, mostra che la loro somma è un multiplo di 3.

2.3.5** Dimostra che la somma di due numeri che divisi per 3 danno resto 1 è uguale ad un numero che diviso per 3 dà resto 2. Cosa avviene se si sommano due numeri che divisi per 3 danno resto 2?

2.3.6** Dimostra utilizzando le figure che ogni multiplo di 4 è pari?

2.3.7** Dimostra utilizzando i numeri figurati che ogni numero pari si può scrivere come somma di due numeri uguali.

2.3.8** Dimostra utilizzando le figure, le regole della moltiplicazione tra numeri pari e dispari:

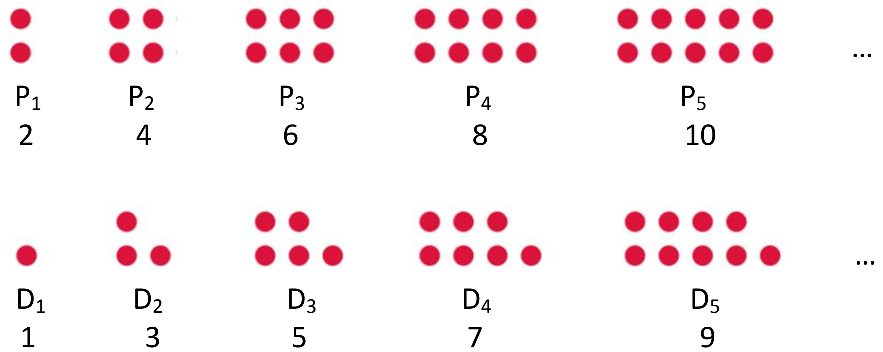
PARI × PARI = PARI
PARI × DISPARI = PARI
DISPARI × DISPARI = DISPARI

Attività libera

Sperimenta, congettura, dimostra.

2.4 Le successioni dei numeri pari e dei numeri dispari.

Può essere conveniente indicare i numeri pari e i numeri dispari in ordine crescente uno dopo l'altro nel seguente modo:



Abbiamo così la "successione" (cioè una lista ordinata di infiniti oggetti) dei numeri pari e quella dei numeri dispari[3].

LABORATORIO 2.4

Attività
Nelle due separate tabelle, elenca e rappresenta uno dopo l'altro i primi 10 numeri pari e i primi 10 numeri dispari.

Domande
Noti qualche relazione tra il numero che indica il "posto" del numero pari e la relativa figura?
Noti qualche relazione tra il numero che indica il "posto" del numero dispari e la relativa figura?
Quanto valgono P_{17} , P_{1002} , D_{11} , D_{502}?
Quali indici vanno sostituiti al posto dei puntini per rendere vere le scritture: $P_{....}$ = 26 , $D_{....}$ = 23?

Risposte e commenti

n	FIGURA	P_n
1		2
2		$4 \longleftrightarrow P_2$
3		6
…	…	…

n	FIGURA	D_n
1		1
2		3
3		$5 \longleftrightarrow D_3$
…	…	…

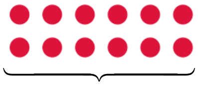
Nelle due tabelle n indica un "generico" posto e P_n e D_n il numero pari e il numero dispari di posto n.

Indicato con P_n il numero pari di posto n, P_{n+1} indica il numero pari successivo, P_{n-1} indica il numero pari precedente, P_{n+2} indica il numero pari di due posti più avanti e così via; e analogamente per i numeri dispari. Se vogliamo indicare due numeri pari o dispari non fissati e non necessariamente uguali dobbiamo usare lettere diverse (ad es. P_m e P_n).

Tornando ai numeri figurati, si noti che gli indici in basso accanto alla P e alla D indicano, oltre che il "posto" del numero, anche il numero di colonne della figura che lo rappresenta (nel caso dei numeri dispari l'ultima colonna non è completa perché è formata da un solo punto).

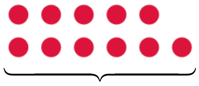
[3] In realtà la successione dei pari inizia con lo zero essendo anch'esso un multiplo di 2 (0 = 2 × 0) e che potremmo indicare con P_0, ma abbiamo detto che in questa prima parte esso non verrà considerato.

Esempi:



6 COLONNE

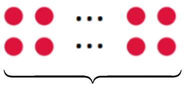
P_6
12



6 COLONNE

D_6
11

e in generale:



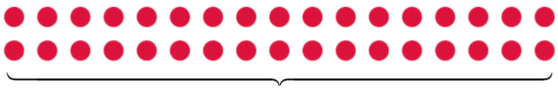
n COLONNE

P_n

n COLONNE

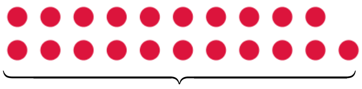
D_n

Questa osservazione ci permette di associare ad ogni indice di posto il numero pari e dispari corrispondente e viceversa. Esempi:



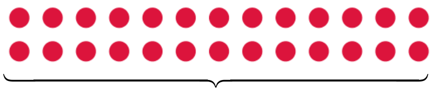
17 COLONNE

P_{17} = 17 (colonne) × 2 (punti) = 34



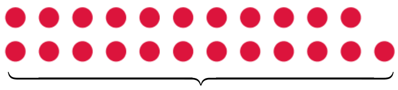
11 COLONNE

D_{11} = 11 (colonne) × 2 (punti) - 1 (punto) = 21



13 COLONNE

P_{13} = 26 = 13 (colonne) × 2 (punti)



12 COLONNE

D_{12} = 23 = 12 (colonne) × 2 (punti) - 1

Vedremo nei prossimi paragrafi altri due modi di associare agli indici i corrispondenti numeri pari e dispari utilizzando opportune procedure di calcolo.

Esercizi

2.4.1 Completa le seguenti scritture inserendo il numero corretto:

a) P_{133} = ...
b) P_{2016} = ...
c) D_{51} = ...
d) D_{2016} = ...

2.4.2 Completa le seguenti scritture inserendo l'indice corretto:

a) $P_{....} = 24$
b) $P_{....} = 100$
c) $P_{....} = 36$
d) $D_{....} = 25$
e) $D_{....} = 31$
f) $D_{....} = 123$

2.4.3 Completa le seguenti scritture utilizzando le lettere P e D con i relativi indici:

a) $P_4 - 1 =$ .....
b) $D_6 + 1 =$ .....
c) $P_4 + 4 =$ .....
d) $D_6 + 3 =$ .....

2.4.4* Completa le seguenti scritture utilizzando le lettere P e D con i relativi indici:

a) $P_n - 1 =$ .....
b) $D_n + 1 =$ .....
c) $D_n + 2 =$ .....
d) $P_n + 2 =$ .....
e) $P_n + P_n =$ .....
f) $D_n + D_n =$ .....
g) $P_n + D_n =$ .....
h) $P_n + P_n + P_n =$ .....
i) $D_n + D_n + D_n =$ .....
j) $P_m + P_n =$ .....
k) $D_m + D_n =$ .....
l) $P_m + D_n =$ .....

2.4.5* Se $P_m = P_n$ cosa puoi dire dei numeri m e n? Giustifica la risposta.

2.4.6* Stabilisci se la seguente frase è vera o falsa: "Scelto un qualsiasi numero m esiste sempre un numero n tale che: $D_n = m$"

2.4.7* Vale la seguente uguaglianza: $P_{n+2} = P_n + 2$? Giustifica la risposta.

Attività libera

Sperimenta, congettura, dimostra.

2.5 . Numeri pari e numeri dispari per ricorsività

Vediamo ora come sia possibile ottenere la successione dei numeri pari e quella dei dispari partendo dal 2 per i pari e dall'1 per i dispari, ottenendo da questi, tramite un calcolo, il successivo elemento della successione, e a partire da quest'ultimo il successivo del successivo, e da questo il successivo del successivo del successivo e così via. In questo modo ogni elemento delle due successioni, eccetto quelli iniziali, sarà ottenuto tramite un calcolo effettuato sull'elemento precedente.

LABORATORIO 2.5

Attività
Nelle due separate tabelle dei primi 10 numeri pari e i primi 10 numeri dispari, sostituisci al posto dei puntini nelle colonne centrali il calcolo che occorre fare per ottenere il numero pari o il numero dispari della riga, a partire da quello della riga precedente.

Domande
Quale calcolo occorre fare per ottenere un numero pari a partire da quello precedente?
Quale calcolo occorre fare per ottenere un numero dispari a partire da quello precedente?
Come puoi descrivere tali calcoli usando le lettere P e D e gli indici in basso?

Risposte e commenti

n	CALCOLO	P_n
1	—	2
2	2 + 2	4
3	4 + 2	6
4	6 + 2	8
5	8 + 2	10
...	...	...

n	CALCOLO	D_n
1	—	1
2	1 + 2	3
3	3 + 2	5
4	5 + 2	7
5	7 + 2	9
...	...	...

In matematica si dice ricorsivo quel procedimento in grado di generare una successione nel modo seguente:

PASSO BASE: a_1	SI FISSA L'ELEMENTO INIZIALE DELLA SUCCESSIONE
PASSO RICORSIVO: $a_{n-1} \Rightarrow a_n$	OGNI ALTRO ELEMENTO, ECCETTO QUELLO INIZIALE, SI OTTIENE ATTRAVERSO UN CALCOLO A PARTIRE DA QUELLO PRECEDENTE

Esempio

Passo base: $a_1 = 2$
Passo ricorsivo: $a_n = a_{n-1} \times 3$

n	CALCOLO	a_n
1	—	2
2	2×3	6
3	6×3	18
4	18×3	54
…	…	…

Una volta scelto l'elemento iniziale: $a_1 = 2$ ogni altro elemento si ottiene da quello che lo precede: $a_2 = a_1 \times 3 = 2 \times 3 = 6$, $a_3 = a_2 \times 3 = 6 \times 3 = 18$, $a_4 = a_3 \times 3 = 18 \times 3 = 54$ e così via …

Osserviamo che entrambi i passi sono importanti. Se nell'esempio precedente si pone $a_1 = 1$ si ottiene la successione:

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	….
1	3	9	27	81	….

Se invece $a_1 = 0$, si ha:

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	….
0	0	0	0	0	….

Per i numeri pari e per i numeri dispari si ha:

Passo base: $P_1 = 2$
Passo ricorsivo: $P_n = P_{n-1} + 2$

n	CALCOLO	P_n
1	—	2
2	2 + 2	4
3	4 + 2	6
4	6 + 2	8
5	8 + 2	10
…	…	…

Passo base: $D_1 = 1$
Passo ricorsivo: $D_n = D_{n-1} + 2$

n	CALCOLO	D_n
1	—	1
2	1 + 2	3
3	3 + 2	5
4	5 + 2	7
5	7 + 2	9
…	…	…

I procedimenti ricorsivi risultano vantaggiosi perché spesso il passo ricorsivo consiste in un calcolo "semplice", hanno però lo svantaggio che per la determinazione di un elemento della successione occorre aver calcolato tutti quelli precedenti.

Esercizi

2.5.1 Calcola i primi dieci elementi della successione ottenuta per ricorsività nel seguente modo:

Passo base: $a_1 = 3$
Passo ricorsivo: $a_n = 2 \times a_{n-1} + 4$

2.5.2 Calcola i primi dieci elementi della successione ottenuta per ricorsività nel seguente modo:

Passo base: $a_1 = \frac{1}{2}$

Passo ricorsivo: $a_n = \frac{1}{2} \times a_{n-1}$

2.5.3 Trova il passo base e il passo ricorsivo per ottenere la seguente successione:

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	….
3	7	11	15	19	….

2.5.4 Trova il passo base e il passo ricorsivo per ottenere la seguente successione:

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	....
3	9	27	81	243	....

2.5.5* Trova il passo base e il passo ricorsivo per ottenere la successione dei pari ad iniziare da 0:

P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	....
0	2	4	6	8	10	....

2.5.6* Trova il passo base e il passo ricorsivo per ottenere la successione dei dispari se si indica 1 con D_0 , cioè:

D_0	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	....
1	3	5	7	9	11	....

2.5.7* Calcola i primi dieci elementi della successione ottenuta per ricorsività nel seguente modo:

Passo base: $a_1 = 2$

Passo ricorsivo: $a_n = \dfrac{1}{a_{n-1}}$

2.5.8* All'interno del calcolo del passo ricorsivo può comparire a volte l'indice della successione. Esempio:

Passo base: $a_1 = 2$
Passo ricorsivo: $a_n = n + a_{n-1}$

n	CALCOLO	a_n
1	—	2
2	1 + 2	3
3	2 + 3	5
4	3 + 5	8
...	...	...

2.5.9* Calcola i primi cinque elementi della successione ottenuta per ricorsività nel seguente modo:

Passo base: $a_1 = 100$
Passo ricorsivo: $a_n = a_{n-1} - n^2$

2.5.10* Calcola i primi dieci elementi della successione ottenuta per ricorsività nel seguente modo:

Passo base: $a_1 = 1$
Passo ricorsivo: $a_n = (-1)^n \times a_{n-1}$

2.5.11** Trova il passo base e il passo ricorsivo per ottenere la seguente successione:

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	....
1	2	1	2	1	....

2.5.12* ("Fattoriale") Calcola i primi cinque elementi della successione ottenuta per ricorsività nel seguente modo:

Passo base: $a_1 = 1$
Passo ricorsivo: $a_n = n \times a_{n-1}$

2.5.13** ("Numeri di Fibonacci") Calcola i primi cinque elementi della successione ottenuta per ricorsività nel seguente modo:

Passi base: $a_1 = 1$, $a_2 = 1$
Passo ricorsivo: $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$

Attività libera

Sperimenta, congettura, dimostra.

2.6 . Espressione algebrica dei numeri pari e dei numeri dispari.

Un'espressione algebrica è una scrittura contenente numeri, simboli di operazione e lettere.

Esempi:

$5 \times n$ $\qquad$ $n + m - 1$ $\qquad$ $n^2 + n$

Se si sostituiscono le lettere con dei numeri, si ottengono delle espressioni numeriche, cioè un "calcolo da fare" con un risultato:

$$\begin{array}{ccccc} 6 \quad 4 & & & & \\ \downarrow \quad \swarrow & & & & \\ n + m - 1 & \longrightarrow & 6 + 4 - 1 & \longrightarrow & 9 \end{array}$$

A partire da una espressione algebrica è possibile ottenere una successione nel modo seguente: sia data un'espressione algebrica, ad esempio: $n^2 + n$

n	SI SOSTITUISCE NELL'ESPRESSIONE ALGEBRICA $n^2 + n$ LA LETTERA n CON IL NUMERO ALL'INIZIO DELLA RIGA E SI EFFETTUA IL CALCOLO	a_n	
1	$1^2 + 1$	2	
2	$2^2 + 2$	6	a_2
3	$3^2 + 3$	12	
…	…	…	

L'elemento della successione associato ad un certo indice, si ottiene cioè sostituendo l'indice al posto della n nell'espressione algebrica ed eseguendo il calcolo.

Si noti che a differenza di quanto avviene per la ricorsività per determinare un elemento della successione non è necessario aver calcolato tutti quelli che lo precedono, ad esempio:

$$a_{1002} = 1002^2 + 1002 = 1004004 + 1002 = 1005006$$

L'espressione algebrica di una successione può essere inoltre pensata come il "valore" dell'elemento generico della successione stessa. Nel caso dell'esempio possiamo dunque scrivere:

$$a_n = n^2 + n$$

Cerchiamo ora le espressioni algebriche delle successioni dei numeri pari e dei numeri dispari.

LABORATORIO 2.6

Attività
Trova le espressioni algebriche dei numeri pari e dei numeri dispari e completa le relative tabelle.

Domande
Come puoi, usando le espressioni algebriche, determinare il posto che occupano nella successione dei numeri pari 202, 1004 e 506?
Come puoi, usando le espressioni algebriche, determinare il posto che occupano nella successione dei numeri dispari 225, 1027 e 529?
Come puoi dimostrare, tramite le espressioni algebriche trovate, la seguente relazione:
$P_n - 1 = D_n$?
Come puoi dimostrare, tramite le espressioni algebriche trovate, la seguente relazione:
$D_n + 1 = P_n$?

Risposte e commenti

$P_n = 2 \times n$

n	CALCOLO	P_n
1	2×1	2
2	2×2	4
3	2×3	6
...	...	...

$D_n = 2 \times n - 1$

n	CALCOLO	D_n
1	$2 \times 1 - 1$	1
2	$2 \times 2 - 1$	3
3	$2 \times 3 - 1$	5
...	...	...

Per trovare il posto dei numeri 202, 1004 e 506 nella successione dei numeri pari, occorre trovare i valori che sostituiti nella formula $2 \times n$, permettono di ottenerli come risultato. E siccome:

$$2 \times 101 = 202 \quad , \quad 2 \times 502 = 1004 \quad , \quad 2 \times 253 = 506$$

si ha:

$$P_{101} = 202 \quad , \quad P_{502} = 1004 \quad , \quad P_{253} = 506$$

Analogamente, per trovare il posto dei numeri 225, 1027 e 529 nella successione dei numeri dispari, occorre trovare i valori che sostituiti nella formula $2 \times n - 1$, permettono di ottenerli come risultato. E siccome:

$$2 \times 113 - 1 = 225 \quad , \quad 2 \times 514 - 1 = 1027 \quad , \quad 2 \times 265 - 1 = 529$$

si ha:

$$D_{113} = 225 \quad , \quad D_{514} = 1027 \quad , \quad D_{265} = 529$$

Considerati un numero pari P_n e un numero dispari generici D_n possiamo scrivere:

$$P_n = 2 \times n \quad e \quad D_n = 2 \times n - 1$$

quindi:

$$P_n - 1 = 2 \times n - 1 = D_n \qquad e \qquad D_n + 1 = 2 \times n - 1 + 1 = 2 \times n = P_n$$

Esercizi

2.6.1 Crea una tabella con i primi 5 elementi della successione determinata dall'espressione algebrica: $3 \times n + 4$

2.6.2 Crea una tabella con i primi 5 elementi della successione determinata dall'espressione algebrica: $\dfrac{n}{n+1}$

2.6.3 Crea una tabella con i primi 5 elementi della successione determinata dall'espressione algebrica: $2^n - 1$

2.6.4* Crea una tabella con i primi 5 elementi della successione determinata dall'espressione algebrica: $(-1)^n \times n$

2.6.5 Completa utilizzando l'espressione algebrica dei pari: P_{12} = ... , P_{23} = ..., P_{1001} = ...

2.6.6 Completa utilizzando l'espressione algebrica dei pari: D_{12} = ... , D_{24} = ..., D_{1001} = ...

2.6.7* Completa utilizzando l'espressione algebrica dei pari: P_{n+1} = ... , P_{n+2} = ..., P_{2n} = ...

2.6.8* Completa utilizzando l'espressione algebrica dei pari: D_{n+1} = ... , D_{n+2} = ..., D_{2n} = ...

2.6.9 Completa utilizzando l'espressione algebrica dei pari: $P_{....} = 8$, $P_{....} = 24$, $P_{....} = 82$

2.6.10 Completa utilizzando l'espressione algebrica dei dispari: $D_{....} = 7$, $D_{....} = 51$, $D_{....} = 33$

2.6.11** Completa utilizzando l'espressione algebrica dei dispari: $P_{....} = 2 \times n + 2$, $P_{....} = 2 \times n + 1$, $P_{....} = 2 \times n + 4$

2.6.12** Completa utilizzando l'espressione algebrica dei dispari: $D_{....} = 2 \times n + 3$, $D_{....} = 2 \times n + 1$, $D_{....} = 2 \times n + 5$

2.6.13** Completa e dimostra utilizzando le espressioni algebriche dei pari e dei dispari:

$P_m + P_n = P_{...}$

$P_m + D_n = D_{...}$

$D_m + D_n = P_{...}$

Suggerimento: usa la proprietà distributiva : $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$

2.6.14* Trova l'espressione algebrica della successione dei pari ad iniziare da 0:

P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	....
0	2	4	6	8	10	....

2.6.15* Trova l'espressione algebrica della successione dei dispari se si indica 1 con D_0 , cioè:

D_0	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	....
1	3	5	7	9	11	....

Attività libera

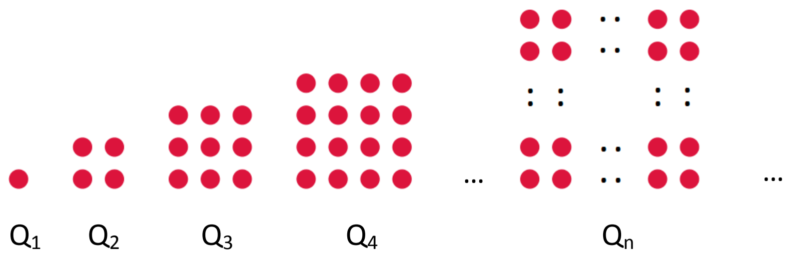
Sperimenta, congettura, dimostra.

2.7 I numeri quadrati

Tutti i numeri sono rettangolari, ma non tutti possono essere rappresentati come quadrati, come il 16 e il 25.

Questi numeri prendono il nome di numeri "quadrati", essi coincidono semplicemente con i quadrati perfetti: 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, …

Indichiamo la loro successione nel seguente modo:



dove Q_n indica il numero quadrato di posto generico n.

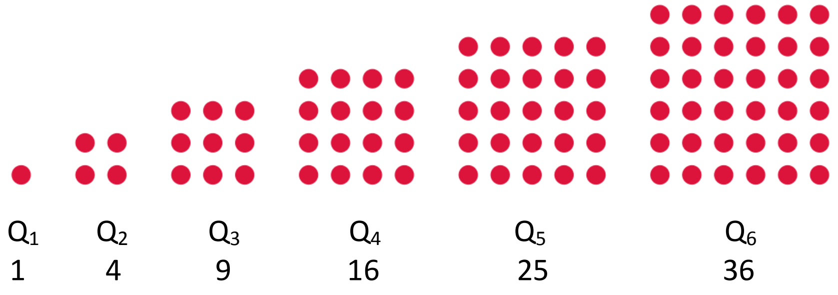
Notiamo che l'indice in basso che indica il posto corrisponde anche al numero di righe e di colonne di punti presenti nel quadrato (es. nella figura di Q_4 ci sono 4 righe e 4 colonne)[4]. Studiamo ora alcune proprietà dei numeri quadrati utilizzandone la figura, e determiniamo la loro espressione algebrica.

LABORATORIO 2.7

Attività
Disegna i numeri quadrati da Q_1 fino a Q_6.
Completa la tabella che permette di ottenere gli stessi elementi della successione tramite un'espressione algebrica.

Domande
Il quadruplo di un numero quadrato è ancora un numero quadrato? Come puoi provarlo con le figure?
Q_6 - 1 può essere rappresentato da un rettangolo in cui il numero delle righe differisce di due unità rispetto al numero delle colonne. Puoi verificarlo con le figure?
La proprietà appena vista vale anche per gli altri numeri quadrati? Come potresti dimostrarlo con le figure?

Risposte e commenti



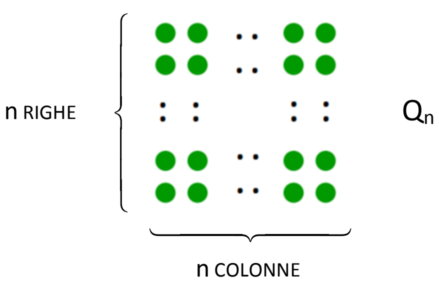
L'espressione algebrica della successione dei numeri quadrati è banalmente: n^2, infatti:

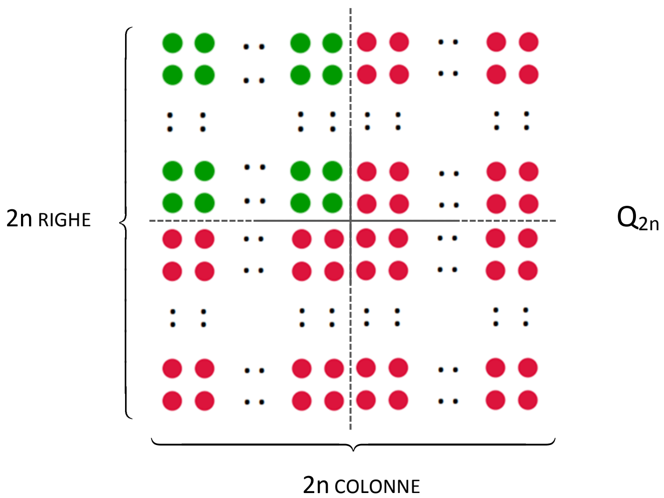
[4] Avremmo potuto considerare anche il numero quadrato $Q_0 = 0^2 = 0$ rappresentato dalla figura senza punti.

$$Q_n = n^2$$

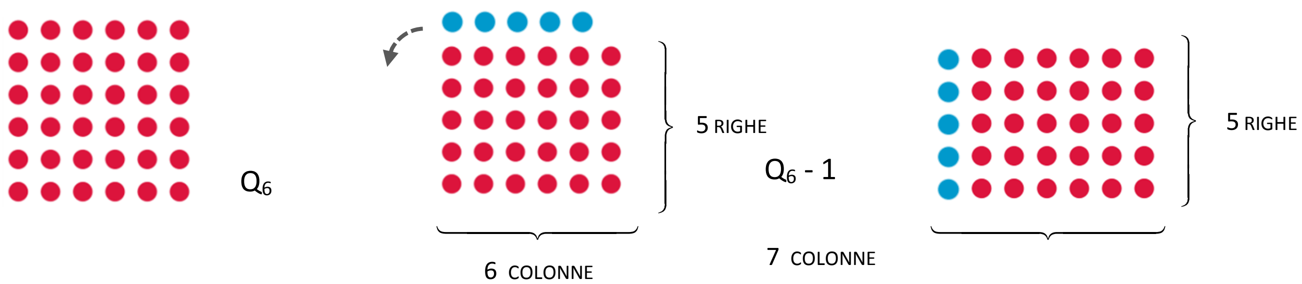
n	CALCOLO	Q_n
1	1^2	1
2	2^2	4
3	3^2	9
…	…	…

Dato il numero quadrato generico Q_n si ha: $4 \times Q_n = Q_{2n}$, infatti:

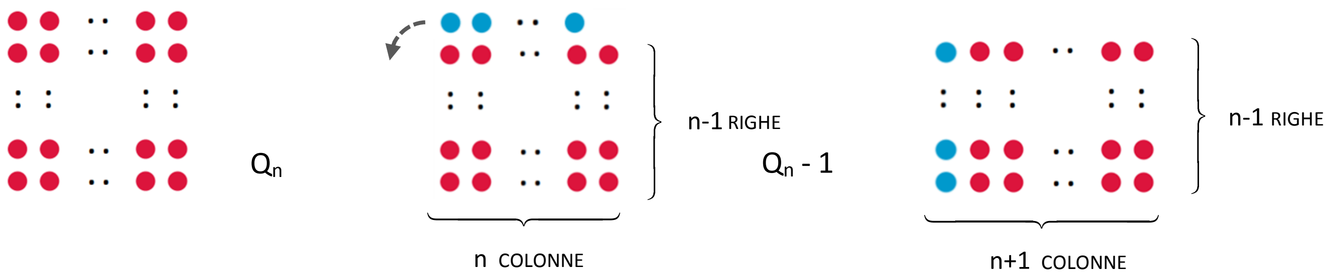




Se al quadrato Q_6 togliamo 1 punto otteniamo un numero rettangolare con 5 righe e 7 colonne, infatti:



In generale se al numero quadrato Q_n togliamo 1 otteniamo un numero rettangolare con n -1 righe e n+1 colonne, infatti:



Esercizi

2.7.1 Trova l'espressione algebrica della successione dei numeri quadrati a partire da 0, cioè:

Q_0	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4	Q_5	....
0	1	4	9	16	25	....

2.7.2 Tramite le figure, verifica con degli esempi che se n è pari, il numero quadrato Q_n è pari.

2.7.3 Tramite le figure, verifica con degli esempi che se n è dispari, il numero quadrato Q_n è dispari.

2.7.4* Dimostra che se n è pari, il numero quadrato Q_n è pari.

2.7.5* Dimostra che se n è dispari, il numero quadrato Q_n è dispari.

2.7.6* Verifica tramite le figure che Q_7 è uguale alla somma dei due numeri quadrati Q_3 e Q_4 e dei due numeri rettangolari $R_{3,4}$ e $R_{4,3}$.

2.7.7** Dimostra che $Q_{m+n} = Q_m + Q_n + R_{m,n} + R_{n,m}$

2.7.8* Verifica tramite le figure che $Q_7 - Q_3$ è uguale al numero rettangolare $R_{10,4}$.

2.7.9** Dimostra che, se m è maggiore di n, $Q_m - Q_n = R_{m+n,m-n}$

2.7.10* Trova l'espressione algebrica della seguente successione:

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	....
2	5	10	17	26	....

2.7.11** Trova l'espressione algebrica della seguente successione:

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	....
-1	4	-9	16	-25	....

Attività libera

Sperimenta, congettura, dimostra

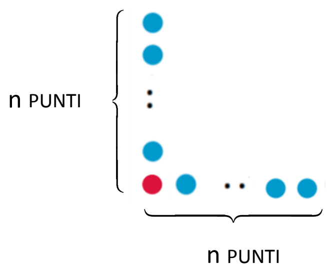
2.8 Gli gnomoni

Chiameremo gnomoni[5] i numeri che possono essere rappresentati nel seguente modo:

Anche qui è conveniente indicare la successione degli gnomoni nel seguente modo:

G_1 G_2 G_3 G_4 G_n

Il generico gnomone G_n ha quindi la seguente figura:



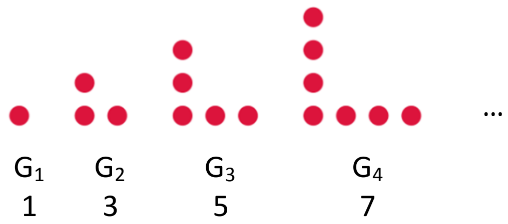
LABORATORIO 2.8

Attività
Completa l'elenco degli gnomoni da G_1 fino a G_9 indicandone il valore.

Domande
Il 162 è uno gnomone? Nel caso lo fosse, qual è il suo numero di posto?
Il 307 è uno gnomone? Qual è il suo numero di posto?
Quali sono i numeri che possono essere rappresentati come gnomoni?
Come si può dimostrare tramite le figure che $G_n + 1 = P_n$?

[5] Il nome richiama appunto la forma dello gnomone della meridiana, formato da un'asta verticale conficcata nella terra e dalla sua ombra.

Risposte e commenti



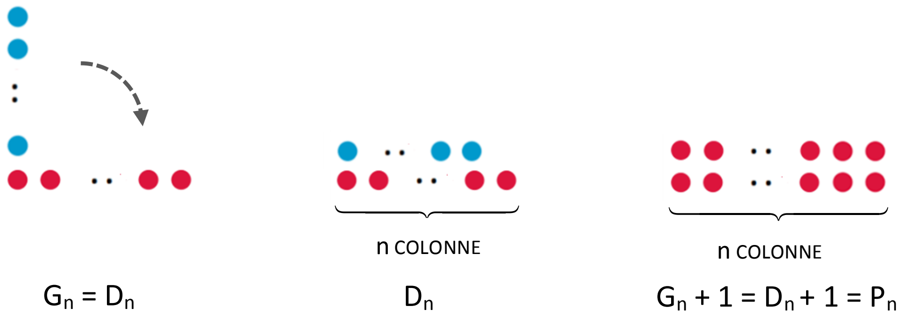
Come è evidente, si ha:

$$G_1 = 1 = D_1 \quad , \quad G_2 = 3 = D_2 \quad , \quad G_3 = 5 = D_3 \quad , \quad G_4 = 7 = D_4 \quad , \quad \ldots$$

Gli gnomoni sono dunque un modo alternativo di rappresentare i numeri dispari, ma la loro "nuova" forma ci tornerà utile in seguito.

162 essendo pari non può essere rappresentato come uno gnomone, mentre lo è 307. Per il calcolo del suo posto si può procedere come per i numeri dispari: $307 = 2 \times 154 - 1 = G_{154}$

Considerato lo gnomone generico G_n si ha:



Esercizi

2.8.1 Completa la seguente scrittura: $G_7 - 4 = G_{\ldots}$.

2.8.2 Completa la seguente scrittura: $G_{\ldots} - 7 = 8$.

2.8.3 Completa la seguente scrittura: $G_{\ldots} - 7 = 8$.

2.8.4 Completa la seguente scrittura: $G_9 - 5 = P_{\ldots}$.

2.8.5* Completa la seguente scrittura sapendo che m è maggiore di n: $G_m - n - n = G_{\ldots}$.

2.8.6* Completa la seguente scrittura sapendo che n è maggiore di 3: $G_n - 3 = P_{\ldots}$.

Attività libera

Sperimenta, congettura, dimostra.

2.9 I numeri quadrati come somma di gnomoni

Possiamo ora occuparci di un'interessante proprietà che lega i numeri quadrati e gli gnomoni.

LABORATORIO 2.9

Attività
Costruisci il numero quadrato Q_6 utilizzando gnomoni.

Domande
Quale relazione esiste tra numeri quadrati e gnomoni?
Quanti gnomoni occorrono per ottenere il numero quadrato Q_6?
Quanti gnomoni occorrono per ottenere un generico numero quadrato Q_n?

Risposte e commenti

Q_6

Nella figura è rappresentato il numero quadrato $Q_6 = 36$. Si vede chiaramente che il quadrato è formato dagli gnomoni a partire da G_1 fino allo gnomone G_6 ;

vale quindi la relazione:

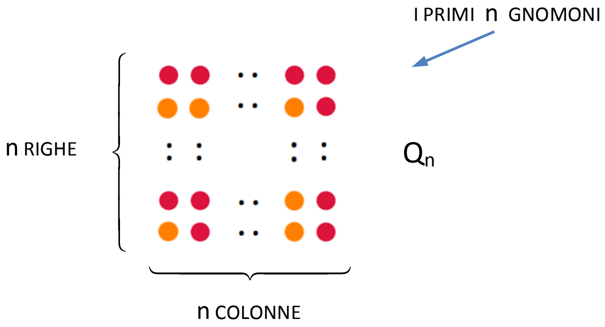
$$Q_6 = G_1 + G_2 + G_3 + G_4 + G_5 + G_6$$

e siccome gli gnomoni coincidono con i numeri dispari, si ottiene l'interessante proprietà:

$$36 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11$$

Dimostriamo ora che tale risultato vale per tutti i numeri quadrati.

Consideriamo un generico numero quadrato Q_n :



La figura ci mostra che il quadrato di n righe e di n colonne risulta composto dai primi n gnomoni.

Si ha dunque per un qualsiasi numero quadrato Q_n :

$$Q_n = G_1 + G_2 + G_3 + \dots + G_n = D_1 + D_2 + D_3 + \dots + D_n$$

Ne segue che il quadrato di un numero n è la somma dei primi n numeri dispari.

Esercizi

2.9.1 Costruisci tramite gli gnomoni il numero quadrato Q_{10} .

2.9.2 Costruisci tramite gli gnomoni il numero quadrato Q_1 .

2.9.3* Utilizzando la relazione $Q_n = D_1 + D_2 + D_3 + \dots + D_n$, dimostra che:

- se n è pari allora Q_n è pari;
- se n è dispari allora Q_n è dispari.

Attività libera

Sperimenta, congettura, dimostra.

2.10. I numeri quadrati per ricorsività

Vediamo ora come, grazie agli gnomoni, sia possibile ottenere la successione dei numeri quadrati per ricorsività.

LABORATORIO 2.10

Attività
Trova una relazione che leghi tra loro il numero quadrato Q_6 , il quadrato Q_5 e lo gnomone G_6 .
Cosa puoi dire in generale per il numero quadrato Q_n e lo gnomone G_n?

Domande
Quale calcolo occorre fare per ottenere un numero quadrato da quello precedente?
Come è possibile ottenere per ricorsività la successione dei numeri quadrati?

Risposte e commenti

Q_5 G_6 Q_6

Nell’esempio si vede che: $Q_6 = Q_5 + G_6$

E in generale si ha:

Q_{n-1} G_n Q_n

Cioè: $Q_n = Q_{n-1} + G_n$. Questo risultato si può leggere nel seguente modo: per ottenere un numero quadrato Q_n dal precedente Q_{n-1} basta aggiungere a quest’ultimo lo gnomone G_n .

Siamo quasi giunti alla forma ricorsiva dei numeri quadrati. Dobbiamo solo esplicitare il calcolo dello gnomone G_n. Nel paragrafo 2.6 abbiamo visto che per i numeri dispari possiamo scrivere: $D_n = 2 \times n - 1$, dunque $G_n = 2 \times n - 1$.

Siamo ora in grado di ottenere la successione dei numeri quadrati per ricorsività:

Passo base: $Q_1 = 1$
Passo ricorsivo: $Q_n = Q_{n-1} + (2 \times n - 1)$

n	CALCOLO	Q_n
1	—	1
2	1 + (2 × 2 - 1)	4
3	4 + (2 × 3 - 1)	9
4	9 + (2 × 4 - 1)	16
5	16 + (2 × 5 - 1)	25
6	25 + (2 × 6 - 1)	36
…	…	…

Esercizi

2.10.1 Trova una relazione tra la differenza: $Q_9 - Q_7$ e un'opportuna somma di gnomoni.

2.10.2* Cosa puoi dire in generale sulla differenza: $Q_{n+2} - Q_n$?

2.10.3** Dimostra che la differenza: $Q_{n+2} - Q_n$ è sempre un multiplo di 4.

2.10.4 Calcola per ricorsività il numero quadrato Q_{13}.

2.10.5 Calcola i primi 5 elementi della successione definita per ricorsività nel seguente modo:

Passo base: $a_1 = 4$
Passo ricorsivo: $a_n = a_{n-1} + (2 \times n - 1)$

2.10.6* Trova il passo base e il passo ricorsivo per ottenere la seguente successione:

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	....
1	4	9	16	25	....

2.10.7** Trova il passo base e il passo ricorsivo per ottenere la seguente successione:

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	....
16	25	36	49	81	....

2.10.8* Trova il passo base e il passo ricorsivo per ottenere la successione dei numeri quadrati a partire da 0, cioè:

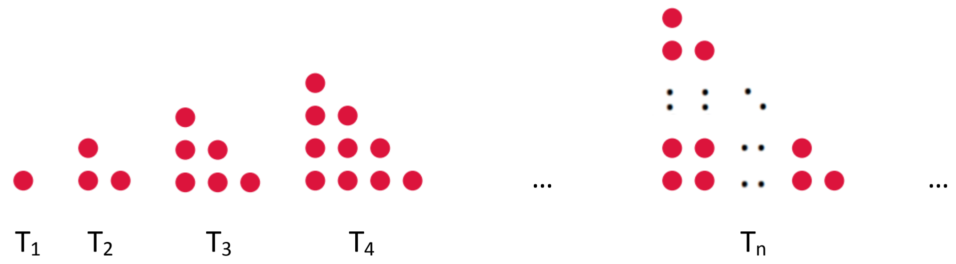
Q_0	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4	Q_5	....
0	1	4	9	16	25	....

Attività libera

Sperimenta, congettura, dimostra.

2.11. I numeri triangolari

Studiamo ora un'altra importante successione, quella dei numeri "triangolari". Essi sono così rappresentati:



Osserviamo che l'indice di posto del numero triangolare corrisponde al numero di punti disposti sui tre lati al bordo della figura.[6] .

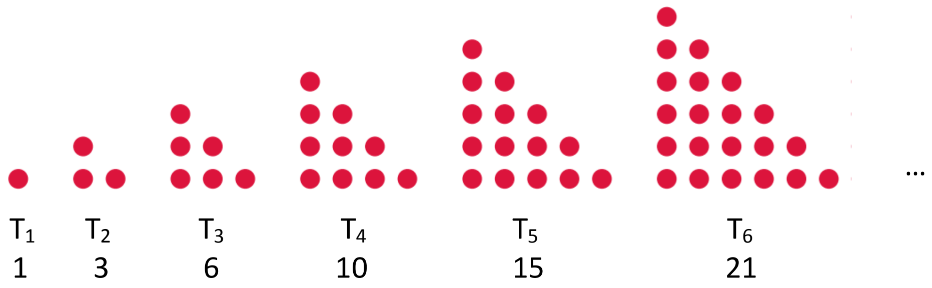
LABORATORIO 2.11

Attività
Elenca i numeri triangolari da T_1 fino a T_9 indicandone il valore.

Domande
Qual è la caratteristica principale dei numeri triangolari?
Quali tra i numeri triangolari rappresentati sono pari e quali sono dispari? Noti qualche regolarità?
Che relazione c'è tra T_3 e T_4 , e tra T_5 e T_6 ? E tra T_n e T_{n+1} ?

[6] Come per i numeri quadrati, anche in questo caso potremmo considerare il numero triangolare $T_0 = 0$ corrispondente alla figura senza punti.

Risposte e commenti



Esaminando le figure si osserva che i numeri triangolari sono la somma dei numeri naturali che vanno da 1 all'indice del numero triangolare [7], infatti:

$T_1 = 1$

$T_2 = 1 + 2$

$T_3 = 1 + 2 + 3$

$T_4 = 1 + 2 + 3 + 4$

$T_5 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5$

…

$T_n = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots + n$

…

Osserviamo che si sviluppano secondo lo schema ciclico: <u>pari-pari-dispari-dispari</u> :

$T_1 = 1$ (dispari)

$T_2 = 3$ (dispari)

$T_3 = 6$ (pari)

$T_4 = 10$ (pari)

$T_5 = 15$ (dispari)

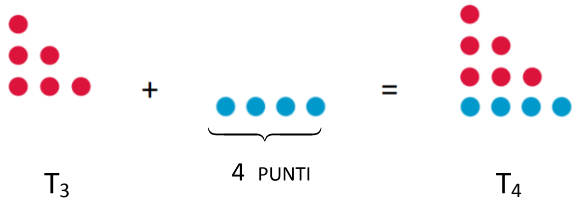
$T_6 = 21$ (dispari)

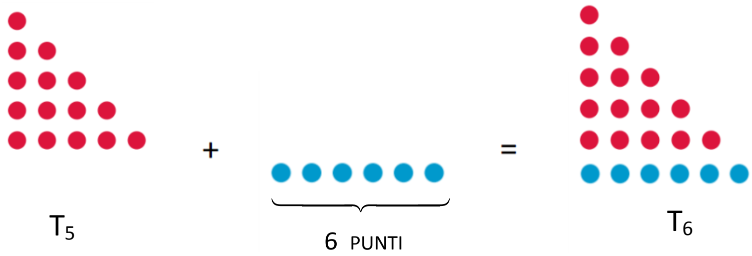
$T_7 = 28$ (pari)

…

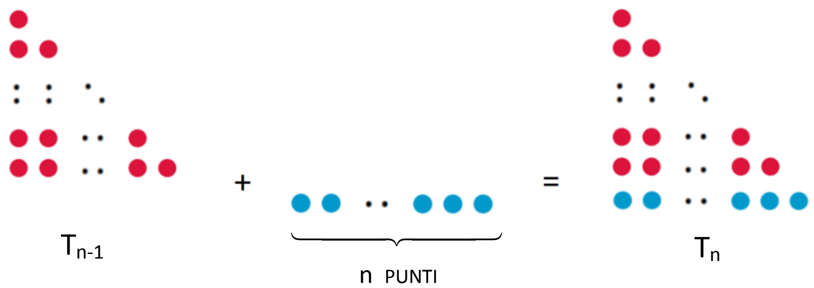
[7] Nella scuola pitagorica occupava un posto di assoluto rilievo per i suoi significati simbolici il numero $T_4 = 10$ ottenuto come somma di 1+2+3+4 e noto come "tetraktys".

Si può ottenere T_4 a partire da T_3 , e T_6 a partire da T_5 aggiungendo una nuova riga di punti nel seguente modo: $T_4 = T_3 + 4$ e $T_6 = T_5 + 6$, infatti:





In generale si ha: $T_n = T_{n-1} + n$, infatti:



Esercizi

2.11.1 Quali numeri triangolari possono essere rappresentati come gnomoni ?

2.11.2 Come puoi esprimere in generale la relazione individuata nell'esercizio precedente?

2.11.3 Rappresenta il numero triangolare T_6 come somma di gnomoni.

2.11.4 Rappresenta il numero triangolare T_7 come somma di gnomoni.

2.11.5* Ripeti gli esercizi precedenti con altri numeri triangolari. Noti qualche regolarità? Descrivila.

2.11.6 Rappresenta la differenza $T_8 - T_5$. Vedi qualche relazione con altri numeri figurati?

2.11.7 Ripeti l'esercizio precedente con numeri triangolari distanti di tre posti (es: $T_5 - T_2$, $T_6 - T_3$, ..)

2.11.8** Per quale numero sono divisibili i numeri ottenuti nei due esercizi precedenti? Dimostralo.

2.11.9* Verifica con qualche esempio che ogni numero triangolare T_{4n} e T_{4n+3} è pari , mentre ogni numero triangolare T_{4n+1} e T_{4n+2} è dispari.

2.11.10** Dimostra la proprietà illustrata nell'esercizio precedente.

Attività libera

Sperimenta, congettura, dimostra

2.12 I numeri triangolari per ricorsività

Sulla base delle proprietà illustrate nel paragrafo precedente vediamo come sia possibile ottenere la successione dei numeri triangolari per ricorsività.

LABORATORIO 2.12

Attività
Utilizza le proprietà viste dei numeri triangolari per ricostruirli ricorsivamente.

Domande
Quale proprietà dei numeri triangolari hai usato?
Quali sono il passo base e il passo ricorsivo?
Quali sono il passo base e il passo ricorsivo per ottenere la successione:

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	...
6	10	15	21	28	...

dei numeri triangolari a partire da 6?

Risposte e commenti

La proprietà chiave per costruire i numeri triangolari per ricorsività è: $T_n = T_{n-1} + n$. Questa ci permette di ottenere il numero triangolare T_n a partire da quello precedente T_{n-1}. Siamo ora in grado di fornire la costruzione ricorsiva:

Passo base: $T_1 = 1$
Passo ricorsivo: $T_n = T_{n-1} + n$

n	CALCOLO	T_n
1	—	1
2	1 + 2	3
3	3 + 3	6
4	6 + 4	10
5	10 + 5	15
…	…	…

Per ottenere la successione:

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	…
6	10	15	21	28	…

occorre modificare oltre al passo base anche quello ricorsivo:

Passo base: $T_1 = 6$
Passo ricorsivo: $T_n = T_{n-1} + n + 2$

n	CALCOLO	T_n
1	—	6
2	6 + 2 + 2	10
3	10 + 3 + 2	15
4	15 + 4 + 2	21
5	21 + 5 + 2	28
…	…	…

Esercizi

2.12.1 Calcola per ricorsività il numero triangolare T_{13}.

2.12.2* Calcola e rappresenta i primi 5 elementi della successione definita per ricorsività nel seguente modo:

Passo base: $a_1 = 1$
Passo ricorsivo: $a_n = a_{n-1} + n + 1$

2.12.3* Trova il passo base e il passo ricorsivo per ottenere la seguente successione:

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	....
1	5	10	16	23	....

Confronta il risultato con quello ottenuto nell'attività.

2.12.4** Che relazione intercorre tra la successione dell'esercizio precedente e quello dei numeri triangolari?

2.12.5* Trova il passo base e il passo ricorsivo per ottenere la successione dei numeri triangolari ad iniziare da 0:

T_0	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	....
0	1	3	6	10	15	....

Attività libera

Sperimenta, congettura, dimostra

2.13 Somma di numeri triangolari

Ci occupiamo ora di una importante proprietà dei numeri triangolari che ci permetterà, nel prossimo paragrafo, di determinare la loro espressione algebrica.

LABORATORIO 2.13

Attività
Esplora le figure che si ottengono sommando numeri triangolari.

Domande
Che figura si ottiene sommando T_3 e T_4 ? E sommando T_6 e T_7 ?
Cosa si ottiene sommando T_{n-1} e T_n? Come puoi esprimere il risultato generale?
Che figura si ottiene sommando T_3 a se stesso, e quale sommando T_6 a se stesso?
Cosa si ottiene in generale sommando T_n a se stesso? Come puoi esprimere il risultato generale?

Risposte e commenti

T_3 T_4 Q_4

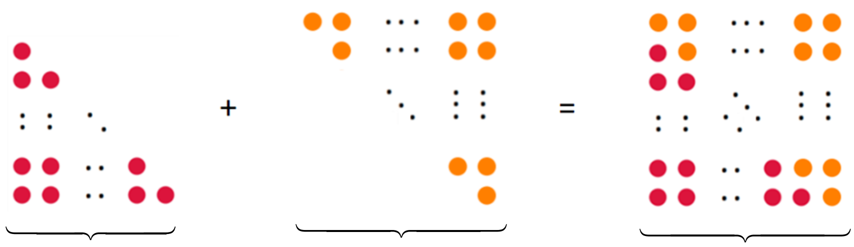
6 10 16

T_6 T_7 Q_7

21 28 49

Come si vede nei due esempi sommando tra loro due numeri triangolari consecutivi si ottiene un numero quadrato.

Vale in generale la seguente relazione: $T_{n-1} + T_n = Q_n$. Infatti:



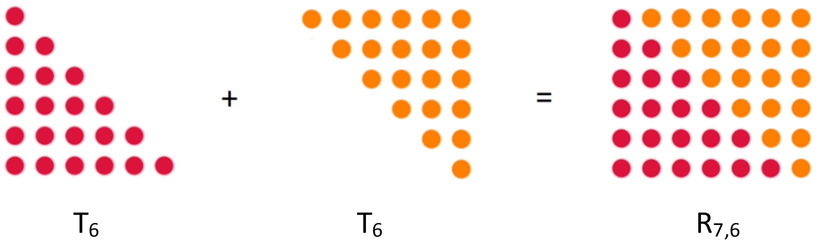
n-1 COLONNE n COLONNE n COLONNE

T_{n-1} T_n Q_n

Vediamo ora cosa succede quando si sommano due numeri triangolari uguali.

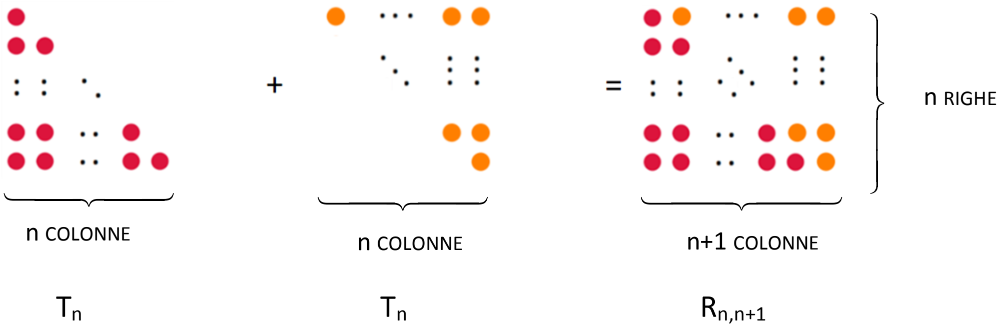
T_3 T_3 $R_{3,4}$

6 6 12



Nei due esempi si nota che in questo caso si ottiene un numero rettangolare nel quale il numero delle colonne e delle righe differiscono per una unità.

Vale in generale la relazione: $T_n + T_n = R_{n,n+1}$, infatti:



Esercizi

2.13.1 Verifica tramite le figure che vale: $R_{7,8} = Q_7 + 7$.

2.13.2* Dimostra la seguente relazione: $R_{n,n+1} = Q_n + n$.

2.13.3 Verifica tramite le figure che vale: $Q_6 = 2\times T_5 + 6$.

2.13.4* Dimostra la seguente relazione: $Q_n = 2\times T_{n-1} + n$.

2.13.5* Inserisci al posto dei puntini i numeri giusti: $Q_{15} = 4\times Q_{....} + G_{....}$.

Attività libera

Sperimenta, congettura, dimostra.

2.14 L'espressione algebrica dei numeri triangolari

Grazie alle proprietà descritte nel paragrafo 2.13 possiamo pervenire all'espressione algebrica dei numeri triangolari.

LABORATORIO 2.14

Attività
Utilizzando una opportuna proprietà dei numeri triangolari, trova la loro espressione algebrica e completa la relativa tabella.

Domande
Quale proprietà hai usato ?
Qual è l'espressione algebrica trovata?
Usa l'espressione algebrica trovata per stabilire se 36 sia un numero triangolare. Qualora lo fosse, quale sarebbe il suo numero di posto?
Usa l'espressione algebrica trovata per stabilire se 23 sia un numero triangolare. Qualora lo fosse, quale sarebbe il suo numero di posto?

Nel paragrafo 2.13 abbiamo visto che raddoppiando un numero triangolare si ottiene un numero rettangolare con un numero di righe e di colonne che differiscono per una unità , precisamente:

$$T_n + T_n = R_{n,n+1}$$

Il numero di punti di un numero rettangolare si ottiene, come abbiamo visto, moltiplicando tra loro il numero di righe e quello delle colonne, quindi:

$$T_n + T_n = R_{n,n+1} = n \times (n+1)$$

ma allora:

$$T_n + T_n = n \times (n + 1)$$

da cui:

$$T_n = \frac{n \times (n+1)}{2}$$

Abbiamo così trovato l'espressione algebrica dei numeri triangolari

$$T_n = \frac{n \times (n+1)}{2}$$

n	CALCOLO	T_n
1	$\frac{1 \times (1+1)}{2}$	1
2	$\frac{2 \times (2+1)}{2}$	3
3	$\frac{3 \times (3+1)}{2}$	6
4	$\frac{4 \times (4+1)}{2}$	10
5	$\frac{5 \times (5+1)}{2}$	15
…	…	…

Si ha: $36 = \frac{8 \times 9}{2} = \frac{8 \times (8+1)}{2}$, quindi 36 si ottiene dalla formula sostituendo a n il numero 8.

Il 36 è dunque il numero triangolare T_8.

Il numero 23 , invece, non può essere un numero triangolare, perché se lo fosse, il suo doppio 46 dovrebbe essere ottenuto dalla formula $n \times (n + 1)$ come prodotto di due numeri consecutivi; ma 46 si può scrivere come prodotto di due numeri solo nei seguenti modi:

$$46 = 1 \times 46 \quad \text{e} \quad 46 = 2 \times 23$$

Esercizi

2.14.1 Utilizza l'espressione algebrica dei numeri triangolari per completare le seguenti scritture:

T_{12} = …. , T_{99} = …., T_{1003} = ….

2.14.2 Utilizza l'espressione algebrica dei numeri triangolari per completare le seguenti scritture:

$T_{....}$ = 45 , $T_{....}$ = 55, $T_{....}$ = 820.

2.14.3* Cerca un procedimento che ci permetta di stabilire se un numero è triangolare oppure no.

2.14.4* Spiega perché l'espressione algebrica dei numeri triangolari, nonostante la frazione, dia sempre come risultato un numero naturale.

2.14.5** Dimostra, usando le espressioni algebriche, la seguente relazione: $Q_n = 2 \times T_{n-1} + n$.

2.14.6* Trova l'espressione algebrica dei numeri triangolari ad iniziare da 0:

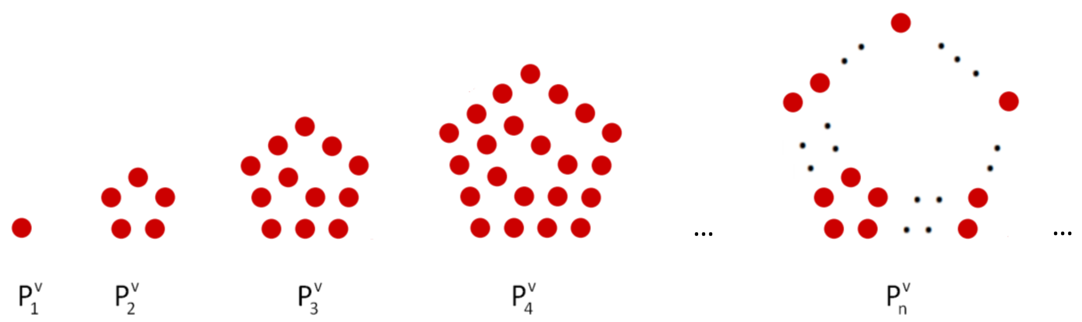
T_0	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	....
0	1	3	6	10	15	....

Attività libera

Sperimenta, congettura, dimostra.

2.15 I numeri pentagonali

Introduciamo ora un'altra successione, quella dei numeri "pentagonali". Essi sono così rappresentati e indicati:



Osserviamo che l'indice di posto del numero pentagonale, in maniera analoga a quelli triangolari e quadrati, corrisponde al numero di punti disposti sui cinque lati al bordo della figura [8] .

[8] Anche in questo caso potremmo considerare il numero triangolare $P_0^v = 0$, corrispondente alla figura senza punti.

LABORATORIO 2.15

Attività

Elenca i numeri pentagonali da P_1^v fino a P_6^v indicandone il valore.

Domande

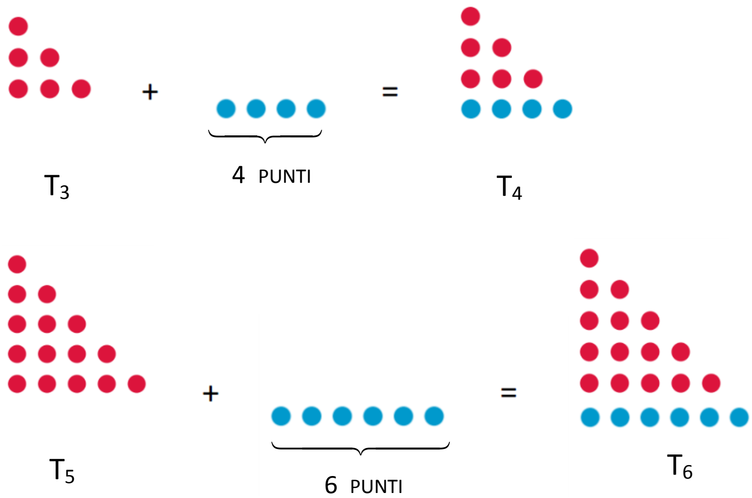
Che relazione c'è tra P_2^v e P_3^v, e tra P_4^v e P_5^v?

In generale che relazione sussiste tra P_{n-1}^v e P_n^v?

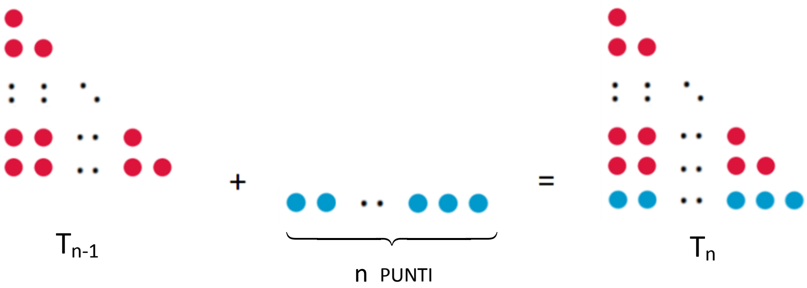
Risposte e commenti

P_1^v	P_2^v	P_3^v	P_4^v	P_5^v
1	5	12	22	35

Si può ottenere P_3^v a partire da P_2^v aggiungendo una nuova riga di punti nel seguente modo: $T_4 = T_3 + 4$ e $T_6 = T_5 + 6$, infatti:



In generale si ha: $T_n = T_{n-1} + n$, infatti:



Esercizi

2.11.1 Quali numeri triangolari possono essere rappresentati come gnomoni ?

2.11.2 Come puoi esprimere in generale la relazione individuata nell'esercizio precedente?

2.11.3 Rappresenta il numero triangolare T_6 come somma di gnomoni.

2.11.4 Rappresenta il numero triangolare T_7 come somma di gnomoni.

2.11.5* Ripeti gli esercizi precedenti con altri numeri triangolari. Noti qualche regolarità? Descrivila.

2.11.6 Rappresenta la differenza $T_8 - T_5$. Vedi qualche relazione con altri numeri figurati?

2.11.7 Ripeti l'esercizio precedente con numeri triangolari distanti di tre posti (es: $T_5 - T_2$, $T_6 - T_3$, ..)

2.11.8** Per quale numero sono divisibili i numeri ottenuti nei due esercizi precedenti? Dimostralo.

2.11.9* Verifica con qualche esempio che ogni numero triangolare T_{4n} e T_{4n+3} è pari , mentre ogni numero triangolare T_{4n+1} e T_{4n+2} è dispari.

2.11.10** Dimostra la proprietà illustrata nell'esercizio precedente.

Attività libera

Sperimenta, congettura, dimostra

Esercizi

2.15.1 Utilizza l'espressione algebrica dei numeri triangolari per completare le seguenti scritture:

$$T_{12} = \dots, \qquad T_{99} = \dots, \qquad T_{1003} = \dots$$

Attività libera

Sperimenta, congettura, dimostra.

3. GENERALITA’ SULLE SUCCESSIONI

In preparazione …

Numeri pentagonali

- Proprietà grafiche
- Gnomoni con tre lati
- Costruzione ricorsiva degli gnomoni con tre lati
- Espressione algebrica degli gnomoni con tre lati
- Costruzione ricorsiva dei numeri pentagonali
- Espressione algebrica dei numeri pentagonali

Generalizzazione: numeri poligonali

- Proprietà grafiche
- Gnomoni con n lati
- Costruzione ricorsiva degli gnomoni con n lati
- Espressione algebrica degli gnomoni con n lati
- Costruzione ricorsiva dei numeri poligonali
- Espressione algebrica dei numeri poligonali

Successioni

- Successioni come casi particolari di funzioni
- Progressioni aritmetiche
- Gnomoni come casi particolari di progressioni aritmetiche
- Numeri poligonali come somme dei primi termini di una progressione aritmetica

4. BIBLIOGRAFIA

[1] Carl B. Boyer. *Storia della Matematica*. Arnoldo Mondadori Editore, Milano, 2000.

[2] php.math.unifi.it/convegnostoria/materiali/GiacardiNumeriFigurati.pdf

[3] Eric T. Bell, *I grandi matematici*, BUR, Biblioteca Universale Rizzoli, 2010.

[4] http://areeweb.polito.it/didattica/polymath/htmlS/argoment/ParoleMate/Mag_09/

Aritmogeometria.htm

[5] http://www.matematicamente.it/magazine/dicembre2011/164-Borgogni-Numeri_figurati.pdf