

Paolo Francini, Liceo Scientifico Statale "Tullio Levi Civita", Roma
Liceo Matematico, incontro del 15 novembre 2017
Gruppo di lavoro in collaborazione con l'Università di Roma Tor Vergata

L'aritmetica al primo anno di liceo matematico

Assi portanti:

- ripensamento e approfondimento dei temi aritmetici
- contestualizzazione storica

Spunti "pitagorici":

- famiglie di numeri "interessanti"
(numeri primi, numeri triangolari, numeri perfetti, etc.)

Lavoro su congetture, interpretazione geometrica, aspetti combinatorici, dimostrazioni

- lavoro interdisciplinare (contesto storico, scuola pitagorica, Magna Graecia, etc.)

Esempi di problemi affrontati (non sempre risolti):

- quali numeri triangolari sono pari e quali dispari?
- quanti numeri triangolari sono dei quadrati?
- in quante parti è diviso il piano da n rette?
- quanti sono i numeri primi?
- quanti sono i numeri perfetti e come sono fatti?
- quante e quali sono le terne pitagoriche?
- tra un numero e il suo doppio si trova sempre almeno un numero primo?

Spunti "euclidei":

- scienza e civiltà dell'età ellenistica, in particolare Alessandria;
- il contesto storico (espansione romana, guerre puniche, Siracusa, etc.);
- la figura e l'opera di Euclide;

L'aritmetica in Euclide

(7° e 9° libro degli *Elementi*)

Dalle *Indicazioni Nazionali*:

Lo studio dell'algoritmo euclideo per la determinazione del MCD permetterà di approfondire la conoscenza della struttura dei numeri interi e di un esempio importante di procedimento algoritmico.

- La relazione di divisibilità (in Euclide "misurare"):

$a|b$ se esiste x tale che $ax=b$

- proprietà di questa relazione
- struttura reticolare
- struttura dei divisori di un dato intero

Due nuove operazioni:

MCD e mcm

Ma cosa significano qui *massimo* e *minimo*?

L'algorithmo euclideo:

$$\mathbf{MCD(a,b)=MCD(a-b,b)=MCD(a+b,b)}$$

- $\text{MCD}(a,b)$ è combinazione lineare degli interi a e b
(si ottiene sommando-sottraendo ripetutamente a e b)

Se p è un numero primo e $p|ab$,
allora $p|a$ oppure $p|b$

La fattorizzazione unica degli interi

Esempi di esercizi (e problemi)

- esercizi sulla divisibilità: Per quali n la frazione $(7n-3)/(n+2)$ è un numero intero? Con quanti zeri termina 2017!
- esercizi sul conteggio dei divisori: quanti sono i divisori dispari di 30^{30} ?
- esercizi legati all'algoritmo euclideo: trovare $\text{MCD}(28000000013; 28)$, problemi di travasi, etc.
- problemi dimostrativi di varia difficoltà
- esercizi e problemi da gare di vario livello

L'infinito comincia a manifestarsi in più occasioni

L'infinità dei numeri primi

L'esistenza degli irrazionali

Ancora numerosi spunti di lavoro:

- rappresentazioni di numeri razionali e non;
- l'algoritmo euclideo e la *commensurabilità*;
- conseguenze della scoperta degli irrazionali

Equazioni diofantee non lineari:

$$x^2 - y^2 = k, \quad x^2 + y^2 = k \text{ (fissato)}, \quad x^2 + y^2 = z^2, \quad x^2 - 3y^2 = 1$$

Sistemi di numerazione,
classi di resto ed aritmetica modulare, etc.

Il valore dell'aritmetica nel liceo

- Rilevanza concettuale e fondazionale
- Interesse storico e possibilità interdisciplinari
- Attività esplorative, dimostrative, laboratoriali
- Via rapida verso problemi complessi o aperti
- Ponte verso la matematica discreta