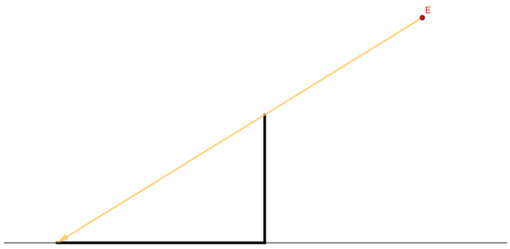
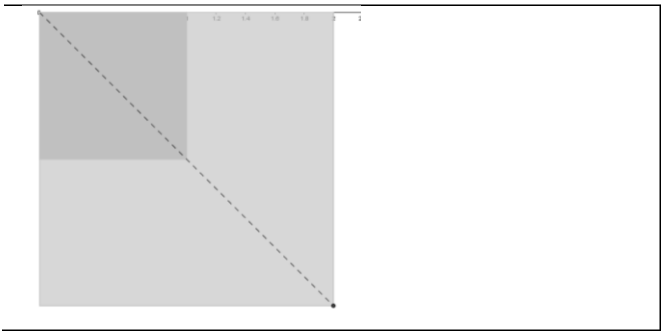
2. Calcolo approssimato del lato del quadrato di area 2

Si presenta un metodo di natura geometrica per il calcolo della radice quadrata di un numero che usa il concetto di gnomone, la figura ottenuta come differenza di due quadrati. Il metodo consiste dato il quadrato A di lato x espresso in metri, scelta come unità di misura, la cui area sia di 2 m^2, nel costruire *gnomoni esterni* via via sempre più piccoli che approssimano sempre meglio A.

Occorrono due parole sul concetto di gnomone. Lo gnomone era uno strumento matematico che permetteva di ottenere, data una figura geometrica, piana o solida che fosse, un'altra simile mediante l'aggiunta di una ulteriore figura. Questa tecnica, ampiamente diffusa nell'antichità, rispondeva all'esigenza di ingrandire o rimpicciolire una forma conservandone l'aspetto. Nel tempo il temine «gnomone» assunse quello di stilo, più o meno monumentale, la cui ombra indicava l'ora solare.

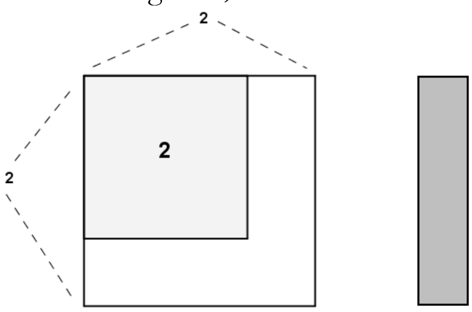


Non solo: con i Pitagorici, il termine gnomone cambiò ancora indicando la superficie che si otteneva dalla differenza di due quadrati "uno dentro l'altro". Questo è il concetto di gnomone che interessa in questo contesto. In particolar maniera se il quadrato grigio scuro piccolo avesse area 2 m^2, consideriamo il primo quadrato più grande di cui sia noto il lato, cioè 2 m. Lo gnomone, in questo caso, è la superficie grigia chiara che avrebbe area 2m^2. L'idea è quella di costruire gnomoni (esterni al quadrato grigio scuro) via via di area sempre più piccola che si avvicinino sempre più al quadrato incognito. Se si trovasse un sistema per determinare i lati dei vari gnomoni, saremmo dunque in grado di dare un'approssimazione del lato del quadrato.



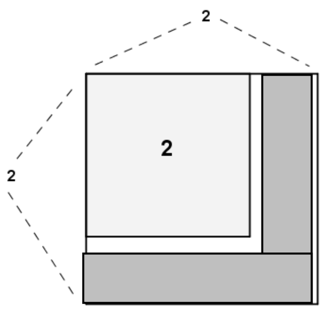
Attività preliminare.

Per arrivare a trovare un algoritmo che segua questa idea, dobbiamo premettere la seguente attività:
Si consegni una tavola contenente la figura a lato, ed cartoncino rettangolare; un lato del rettangolo coincide con il lato del quadrato, quindi 2 m, mentre l'altro essendone un quarto (mediante anche verifica diretta), sarà 0,5m. Pertanto l'area del rettangolo è 1m^2 cioè la metà dello gnomone.



Si riesce a costruire uno gnomone interno allo gnomone precedente?

Sicuramente si e la sua area sarà sicuramente minore di quella dello gnomone cioè di 2, a causa della sovrapposizione dei due rettangoli. Questo non è un caso particolare, ma varrà sempre!

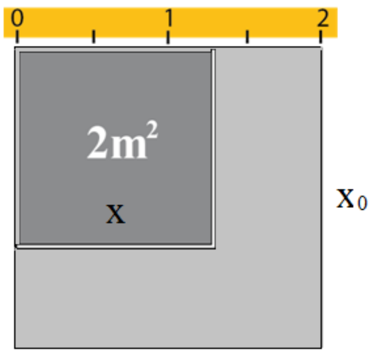


Conclusione:

dato uno gnomone A, considerato un rettangolo di area metà A/2, si riesce sempre a costruire con questo rettangolo uno gnomone B contenuto in A di area minore.

A questo punto si è pronti per mostrare l'algoritmo.

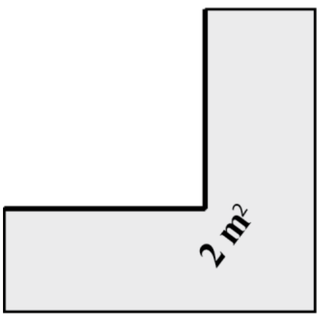
Si porterà avanti, diciamo parallelamente, l'approccio geometrico con quello aritmetico, lavorando direttamente sul foglio elettronico di Excel. L'uso dello strumento informatico assume in questo contesto particolare valenza in quanto permette di fare un'operazione, un'iterazione, che una volta capita, risulta essere particolarmente noiosa dovendosi ripetere sempre allo stesso modo per molte volte; inoltre questi calcoli, diventano a volte molto lunghi, generando altri tipi di difficoltà, distogliendo l'attenzione del problema centrale. Il foglio Excel, infatti, permette di tenere in un'unica tabella tutti i risultati che si stanno via via ottenendo, e consente allo stesso tempo, di evitare di introdurre termini come x_1, x_2, x_3,..... x_n, G_1, G_2...G_n...di solito ostici per la maggior parte degli alunni. Queste variabili allora vengono sostituite con le celle A1 A2, ...che è vero che necessitano anch'esse di una simbologia, ma è altrettanto vero che le celle hanno una collocazione spaziale, possono essere "viste" e quindi meglio memorizzate. Inoltre l'individuazione delle celle è di tipo cartesiano solitamente ben compreso dagli alunni.



Il quadrato grigio scuro di lato x avrà area $A = 2m^2$ e sia x_0 il più piccolo intero tale che $x_0^2 > A$ cioè $x_0 = 2$ m. Pertanto 1m < x < 2m. A e x_0 sono i due valori che di volta in volta bisogna fornire per poter calcolare il lato del quadrato di area A, cioè la $\sqrt{A}$. Servendoci di un foglio Excel, nella cella B1 si digiterà il valore di A, mentre in F2 il valore di x_0;

la tabella apparirà in questo modo.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1			Area gnomone	Area rettangolo	lato corto rett.	lato quad. appr		
2	**A =**	**2**	G	G/2	d	x		
3						**2**	**=**	**x_0**



Da qui in avanti, per il foglio di lavoro, risulterà che la cella B1 ha valore 2, come pure la cella F2 avrà valore 2.

La superficie grigia a lato è il primo gnomone che si viene a creare, ed è dato dalla differenza del quadrato di area maggiore x_0^2 e quello di area A;

La sua area si ottiene digitando:

=(F3^2-B2)

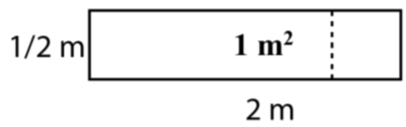
e tale formula occuperà la cella C4, mentre nella cella D4 ci sarà la metà del valore relativo, cioè 1 m^2 che si otterrà digitando

=(C4/2)

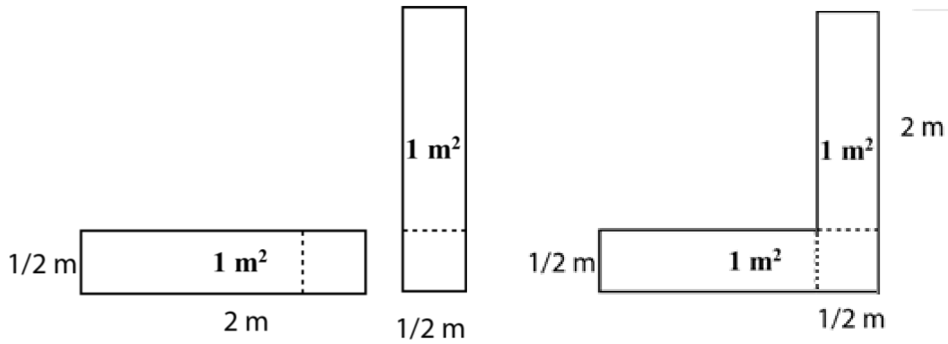
	A	B	C	D	E	F	G	H
1			Area gnomone	Area rettangolo	lato corto rett.	lato quad. appr		
2	**A =**	**2**	G	G/2	d	x		
3						**2**	**=**	**X0**
4			2,0000	1,0000	0,5000	1,5000		

Se si considera un rettangolo con tale area, 1 m^2, e lato x_0 = 2m, l'altro lato sarà dunque lungo $\frac{1}{2}$ m che deve essere visualizzato nella cella E4 digitando:

=(D4/F3)

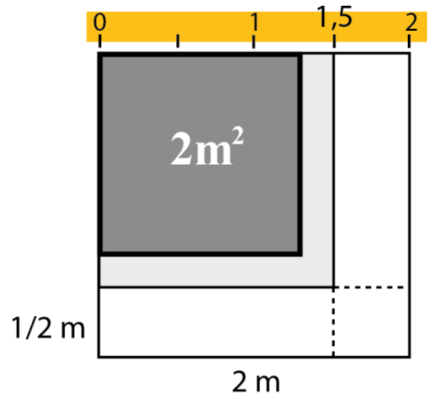


Abbiamo già visto che due rettangoli di questo tipo, appositamente disposti formano un secondo gnomone di lati 2 e ½, che avrà un'area minore di 2 m^2 e quindi *sarà contenuto nello gnomone iniziale*.[1]



Questo comporterà che il lato incognito x del quadrato iniziale A sarà:

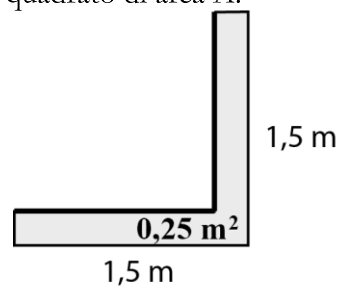
$$1\text{m} < x < 2\text{m} - (1/2)\text{m} = 3/2\text{ m}.$$



Tale valore, lato di un nuovo quadrato, comparirà nella cella F4 mediante il comando:

=(F3- E4)

pertanto la prima riga della tabella si conclude con il valore del lato $\frac{3}{2}$ m del nuovo quadrato che sarà più piccolo del quadrato di lato 2 m iniziale ma più grande di quello da trovare. In sostanza un'approssimazione migliore del quadrato di lato 2m del quadrato di area A.



A questo punto si itera la procedura; si ricomincia dalla superficie differenza tra il nuovo quadrato di area $(\frac{3}{2}\text{ m})^2$ e quello iniziale di area 2 m^2 ossia dallo gnomone di area

$$(\tfrac{3}{2}\text{m})^2 - 2\text{m}^2 = \tfrac{1}{4}\text{ m}^2 = 0{,}25\text{ m}^2.$$

Tale valore andrà nella cella C4 digitando

=(F3^2-B1)

mentre nella cella D4, c'è la sua metà cioè 0,125 m^2 = 1/8 m^2, basterà digitare

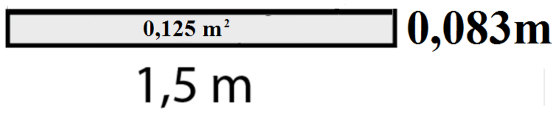
= (C4 / 2)

[1] Dato un gnomone di area A e un'area B minore di A, esiste un unico gnomone simile, contenuto nel primo, di area B. Due gnomoni sono simili se il rapporto tra le braccia è lo stesso.

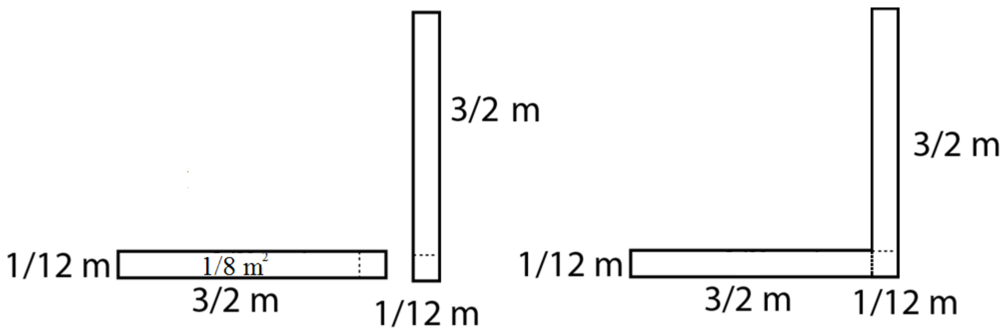
	A	B	C	D	E	F	G	H
1			Area gnomone	Area rettangolo	lato corto rett.	lato quad. appr		
2	A =	2	G	G/2	d	x		
3						2	=	x_0
4			2,0000	1,0000	0,5000	1,5000		
5			0,2500	0,1250	0,0833	1,4167		

Se si considera un rettangolo con tale area 0,125 m^2 = 1/8 m^2 e lato 1,5 m = 3/2 m, l'altro lato sarà dunque lungo (1/8):(3/2)=1/12 m = 0,083m = presente nella cella E4 mediante il comando

=(D4 / F3).



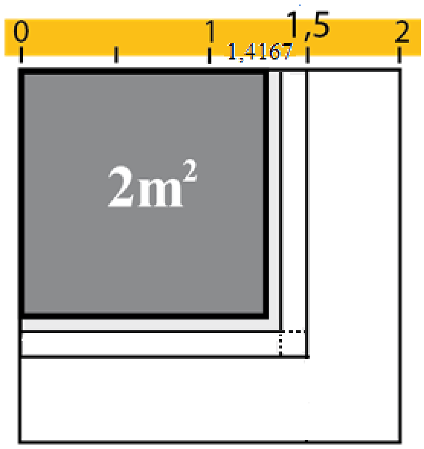
Due rettangoli di questo tipo, appositamente disposti formano uno terzo gnomone di lati $\frac{3}{2}$m e $\frac{1}{12}$ m, che avrà un'area minore di 0,125 m^2 = 1/4 m^2 dato che, i due quadrati tratteggiati si



sovrappongono, e quindi sarà contenuto nello gnomone iniziale. Questo comporterà che il lato incognito x del quadrato iniziale A sarà $1\text{m} < x < (3/2)\text{m} - (1/12)\text{m} = 17/12\text{m} = 1{,}4167\text{m}$. Tale valore, lato di un nuovo quadrato, comparirà nella cella F5 grazie alla digitazione

=(F4-E5);

pertanto la seconda riga si conclude con la determinazione del lato $\frac{17}{12}$ m del nuovo quadrato che sarà più piccolo del quadrato di lato $\frac{3}{2}$ m ma più grande di quello da trovare.



Il nuovo gnomone avrà un lato di 17/12 m e area $(17/12)^2 m^2 - 2m^2 = (289/144) - 2 = 1/144\ m^2$ = 0,00694 m^2, valore che comparirà nella cella C5 per mezzo della digitazione:
=(F4^2-B1).

	A	B	C	D	E	F	G	H
1			Area gnomone	Area rettangolo	lato corto rett.	lato quad. appr		
2	A =	2	G	G/2	d	x		
3						2	=	x_0
4			2,0000	1,0000	0,5000	1,5000		
5			0,2500	0,1250	0,0833	1,4167		
6			0,0069	0,0035	0,0025	1,4142		

In quella al suo fianco, D5, digitando

=(C5 / 2)

si otterrà la metà di questa area. Supponendo di costruire un rettangolo con tale area e di lato 17/12 m, l'altro lato sarà di 1/288 : 17/12 = 1/408 m, valore inserito nella cella E5. Il quarto gnomone che si

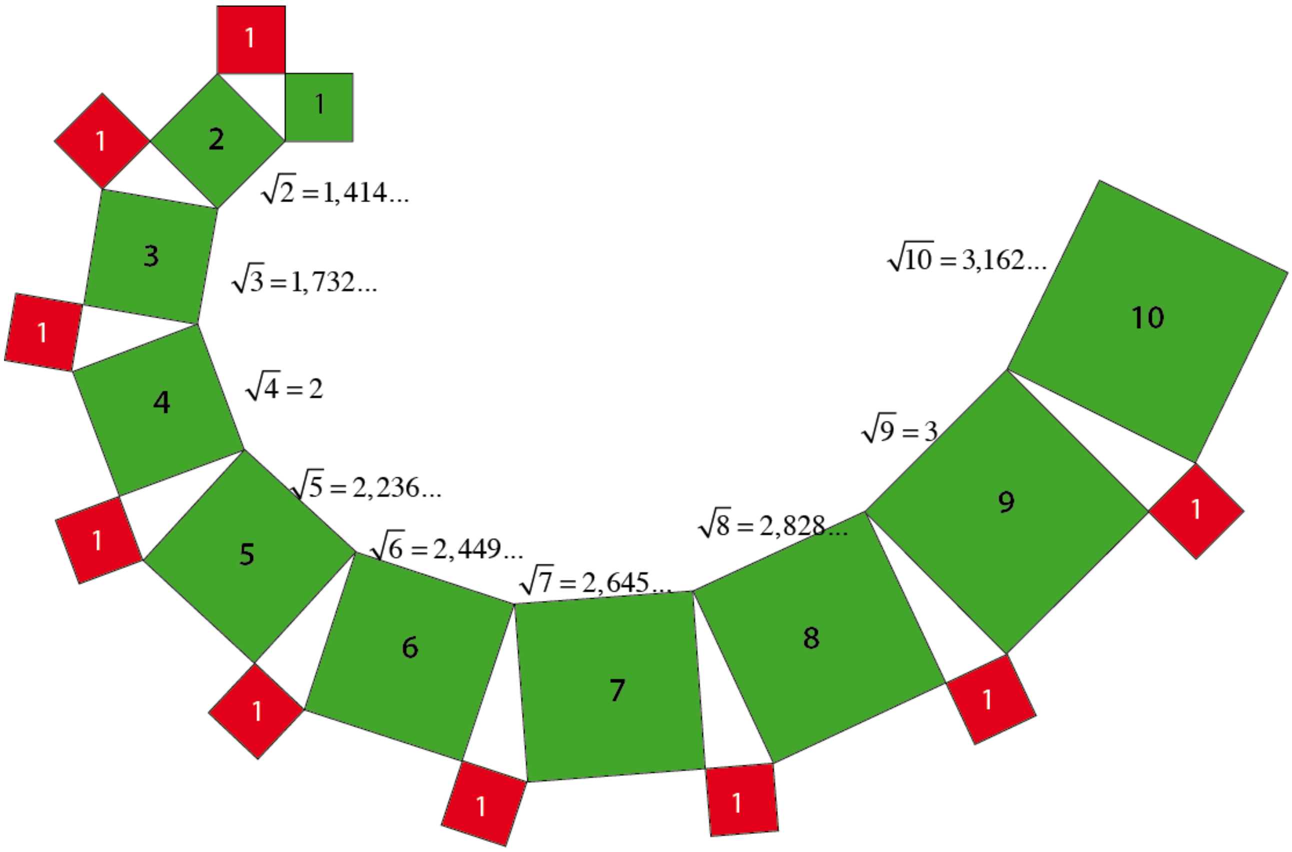
ottiene con questi due rettangoli, come al solito avrà area minore del precedente e pertanto sarà contenuto in esso. Il lato x sarà tale che:
1 m < x < 17/12 m - 1/408 m= 577/408 m = 1,4142m
che comparirà nella cella F5 con la digitazione:

=(F4 - E5).

Notando che le prime due cifre decimali del lato x cominciano a essere stabili, se ci si accontenta di un'approssimazione al centesimo, la procedura può finire a questo punto, altrimenti si va avanti. Poiché le aree dei successivi gnomoni diventano sempre più piccole troviamo via via approssimazioni migliori del lato del quadrato.
Nota. Le iterazioni potranno essere direttamente implementate nel foglio di calcolo semplicemente copiando l'ultima riga scritta, cioè la 5, e incollandola in quella vuota successiva (attenzione a B1 che è l'unico valore fisso).

	B	C	D	E	F
		Area gnomone	Area rettangolo	lato corto rett.	lato quad. appr
A =	**2**	G	G/2	d	x
					2
		=(F3^2-B2)	=(C4/2)	=(D4/F3)	=(F3-E4)
		=(F4^2-B2)	=(C5/2)	=(D5/F4)	=(F4-E5)
		=(F5^2-B2)	=(C6/2)	=(D6/F5)	=(F5-E6)
		=(F6^2-B2)	=(C7/2)	=(D7/F6)	=(F6-E7)
		=(F7^2-B2)	=(C8/2)	=(D8/F7)	=(F7-E8)
		=(F8^2-B2)	=(C9/2)	=(D9/F8)	=(F8-E9)
		=(F9^2-B2)	=(C10/2)	=(D10/F9)	=(F9-E10)
		=(F10^2-B2)	=(C11/2)	=(D11/F10)	=(F10-E11)
		=(F11^2-B2)	=(C12/2)	=(D12/F11)	=(F11-E12)
		=(F12^2-B2)	=(C13/2)	=(D13/F12)	=(F12-E13)
		=(F13^2-B2)	=(C14/2)	=(D14/F13)	=(F13-E14)
		=(F14^2-B2)	=(C15/2)	=(D15/F14)	=(F14-E15)
		=(F15^2-B2)	=(C16/2)	=(D16/F15)	=(F15-E16)
		=(F16^2-B2)	=(C17/2)	=(D17/F16)	=(F16-E17)
		=(F17^2-B2)	=(C18/2)	=(D18/F17)	=(F17-E18)
		=(F18^2-B2)	=(C19/2)	=(D19/F18)	=(F18-E19)
		=(F19^2-B2)	=(C20/2)	=(D20/F19)	=(F19-E20)
		=(F20^2-B2)	=(C21/2)	=(D21/F20)	=(F20-E21)
		=(F21^2-B2)	=(C22/2)	=(D22/F21)	=(F21-E22)
		=(F22^2-B2)	=(C23/2)	=(D23/F22)	=(F22-E23)
		=(F23^2-B2)	=(C24/2)	=(D24/F23)	=(F23-E24)
		=(F24^2-B2)	=(C25/2)	=(D25/F24)	=(F24-E25)

Esercizio. Fare altri esempi di radici quadrate ad esempio fotografando il foglio Excel con l'algoritmo eseguito e dare esercizi per casa: ogni ragazzo deve avere il suo algoritmo e collaborare al calcolo dei lati dei quadrati disegnati sulla grande spirale da condividere in classe con gli altri.



1
1
2
1
$\sqrt{2}=1,414...$
3
$\sqrt{3}=1,732...$
1
4
$\sqrt{4}=2$
1
5
$\sqrt{5}=2,236...$
1
6
$\sqrt{6}=2,449...$
1
7
$\sqrt{7}=2,645...$
1
8
$\sqrt{8}=2,828...$
1
9
$\sqrt{9}=3$
1
10
$\sqrt{10}=3,162...$