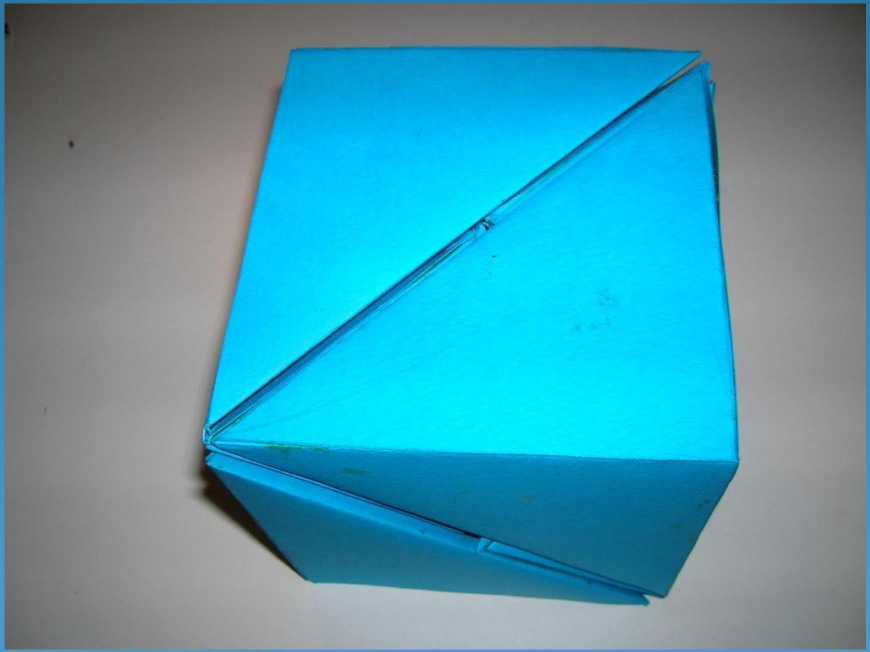
II Scuola Autunnale di Didattica della Matematica
San Martino al Cimino (VT)
13-15 ottobre 2017

IL CUBO A PEZZI



Prof. Luca Dragone
luca.dragone71@gmail.com

Obiettivi

- Comporre poliedri per generarne di nuovi.
- Determinare in modo semplice rapporti di volume tra poliedri.
- Definire in modo operativo il concetto di poliedro duale.
- Riconoscere poliedri duali.

Prerequisiti

- Conoscere cosa si intende per volume di un solido.
- Saper operare con le potenze.
- Saper operare con le frazioni.

Indicazioni metodologiche

- Geometria nella scuola media: solo un pretesto per fare calcoli?
- Didattica laboratoriale
  - Esperienze pratiche (manipolazione)
  - Situazioni problematiche
  - Lavori di gruppo (cooperazione tra pari)
  - Schede di lavoro (strutturate? Non troppo! … Spazio alla riflessione!)
  - Verbalizzazione dei concetti appresi: giustificare, argomentare, motivare, ipotizzare, verificare.

Lavoro di oggi

- Non c'è tempo per un laboratorio completo.

(alcuni modelli potrebbero essere costruiti in situ, e si potrebbe intavolare una discussione più ampia …)

- Didattica "senza parole" … almeno all'inizio!

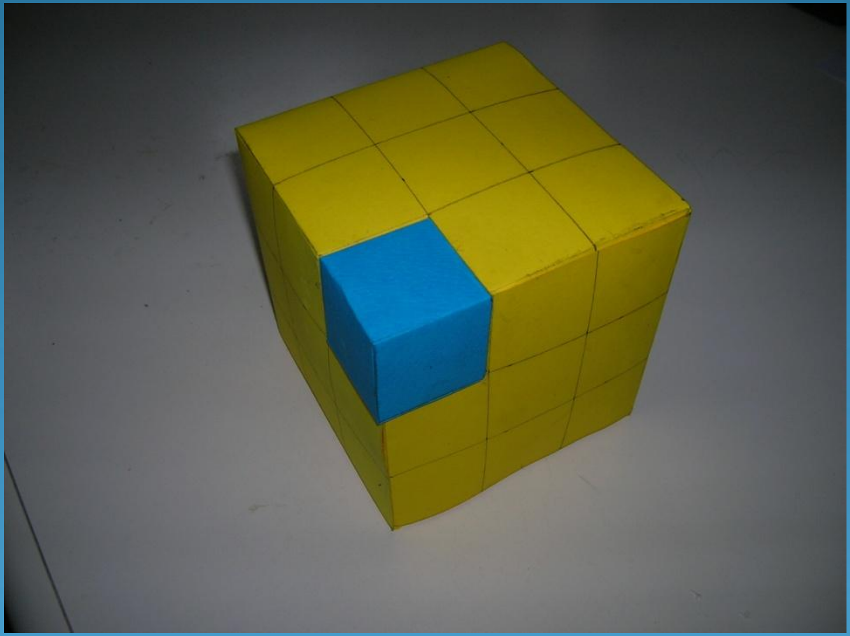
Regole

- Si può osservare il materiale
- Si può manipolare il materiale
- Si può interagire con i compagni

- NON si possono utilizzare formule e concetti precostituiti (formule per il calcolo dei volumi, formule di trigonometria ecc.)

- Si possono utilizzare solo espressioni del tipo: “questo è il doppio di questo, questo è due terzi di quest’altro …

Attività 0: il cubo di Rubik



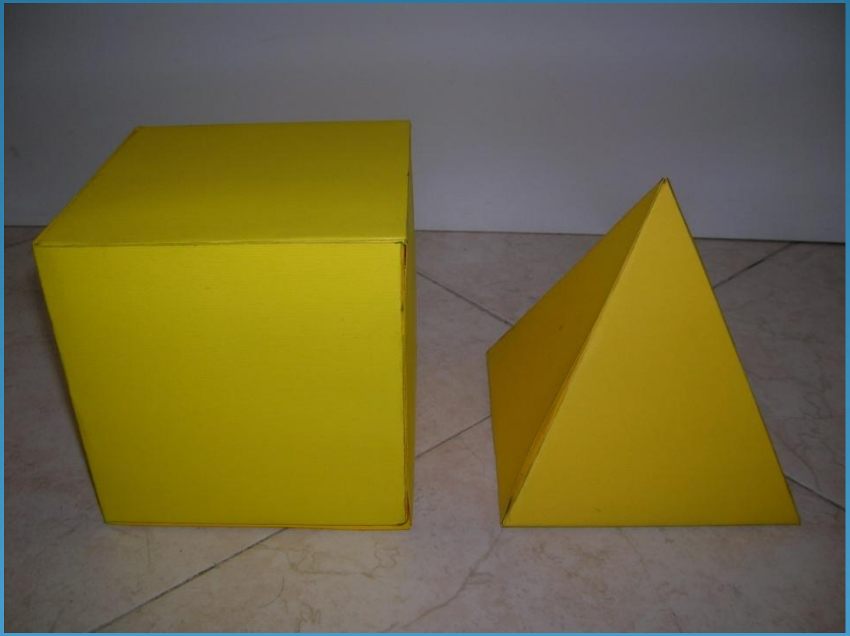
V cubo azzurro = 1/27 V cubo giallo

Attività 1: il cubo e la piramide

Situazione problematica:

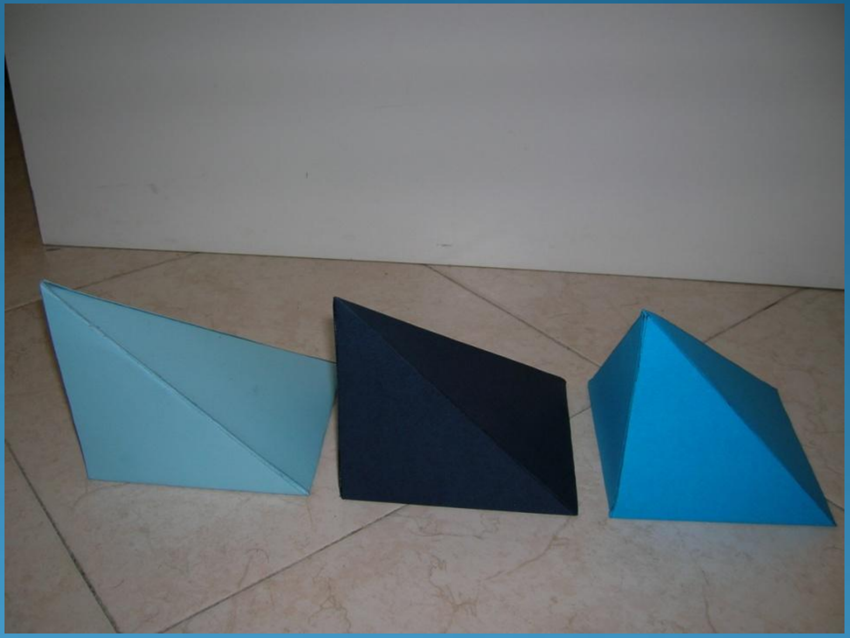
qual è il rapporto tra il volume di un cubo ed il volume di una piramide retta con stessa base e stessa altezza del cubo?

Cubo e piramide retta con stessa base e stessa altezza



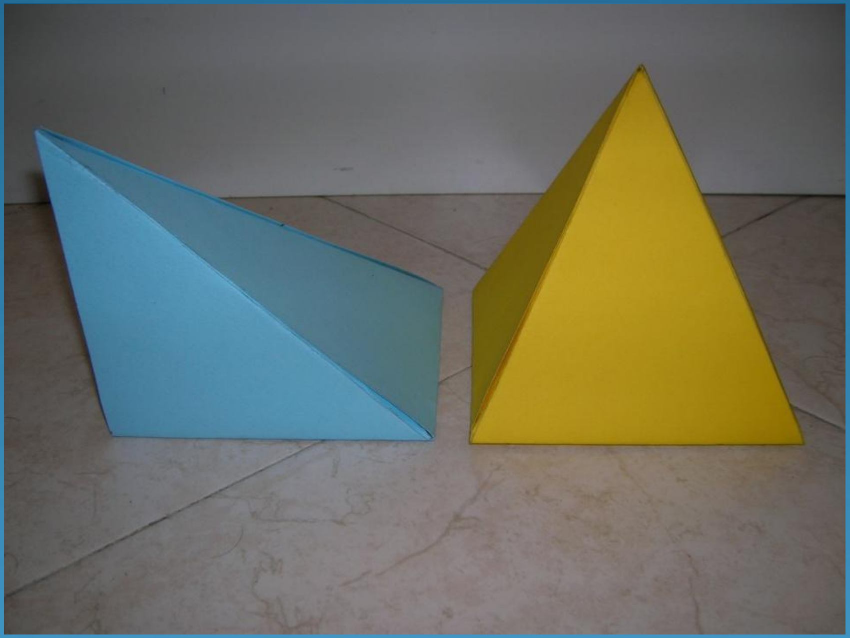
Vp = ? Vc

1 cubo = 3 piramidi oblique



Vp = 1/3 Vc

Piramide retta e obliqua



Stesso volume?
Principio di Cavalieri …
… lo accettiamo?

Piramide retta composita (Azzurra)

Base 4 volte quella del cubo
Altezza = spigolo del cubo
Vp=4/3 Vc

1 cubo = 6 piramidi rette

Vp = 1/6 Vc

Piramidi rette a confronto

Piramide composita azzurra $4\times1/3Vc$

Piramide gialla bassa $1/6Vc$

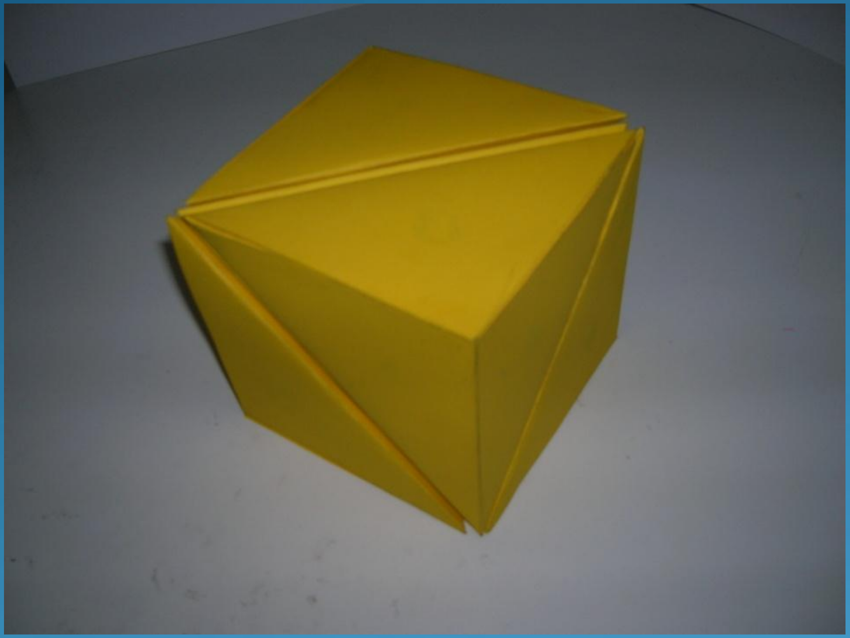
$\Rightarrow$ Piramide gialla alta $1/3\ Vc$

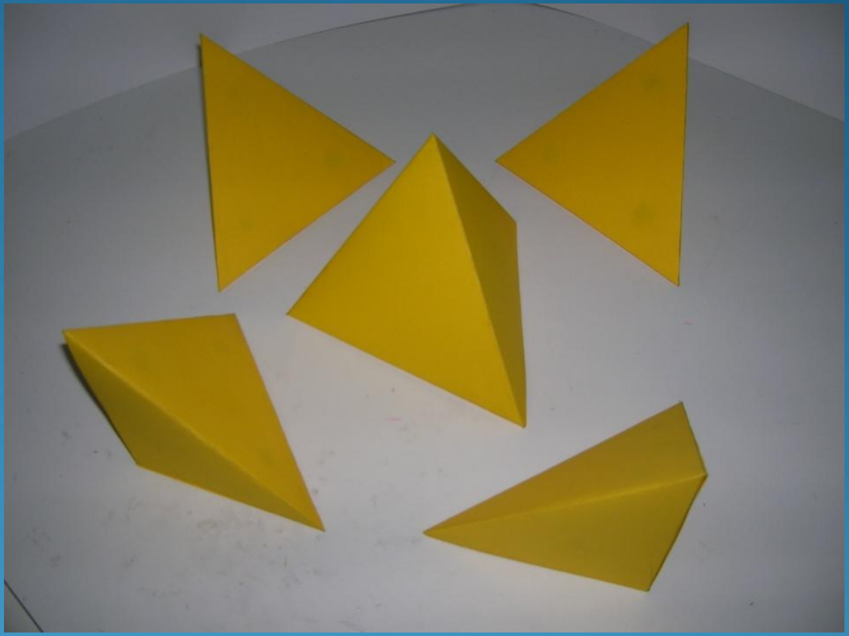
Attività 2: il tetraedro nel cubo

Situazione problematica:

qual è il rapporto tra il volume del cubo ed il volume del tetraedro costruito con le diagonali delle facce del cubo?

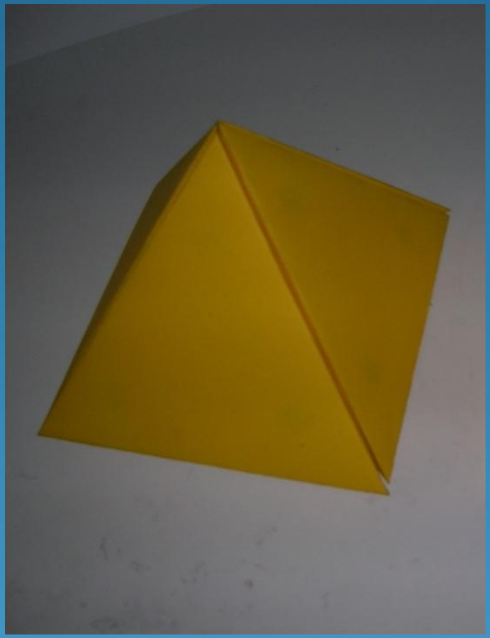
Il tetraedro nel cubo





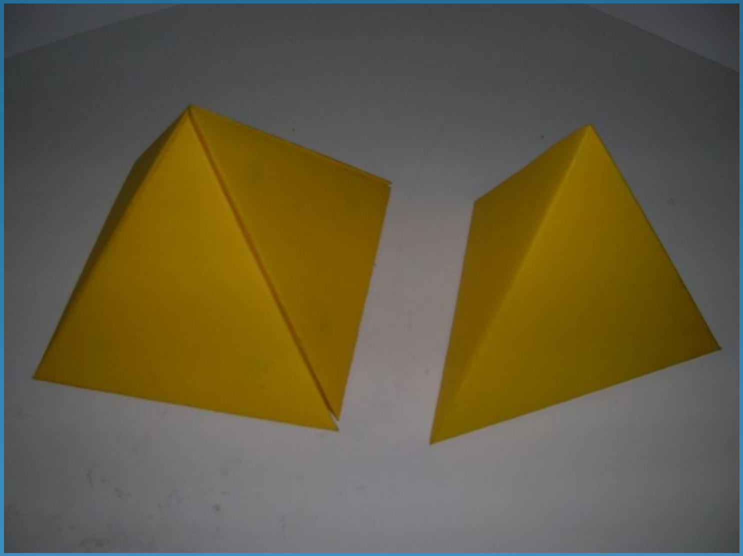
Cubo = 1 tetraedro + 4 piramidi rette a base triangolare regolare

Piramide retta composita (Gialla)



Base 2 volte quella del cubo
Altezza = spigolo del cubo
Vp=2/3 Vc

… per differenza:



Volume del tetraedro

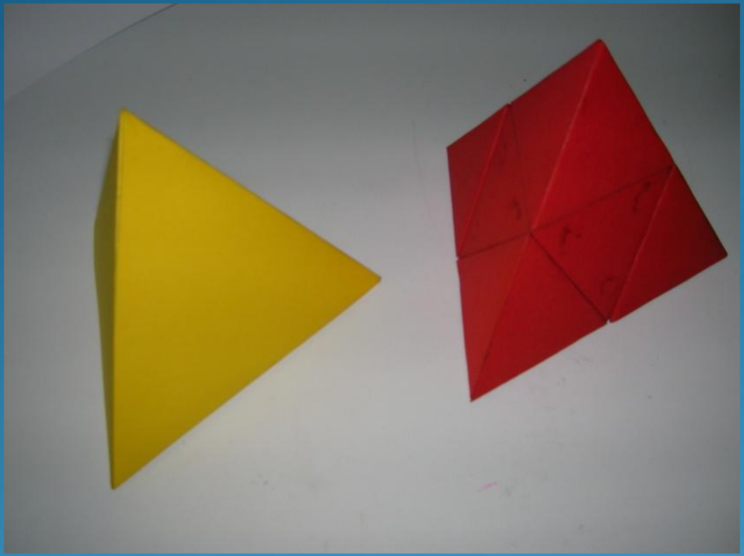
$Vt=Vc-Vp=1/3Vc$

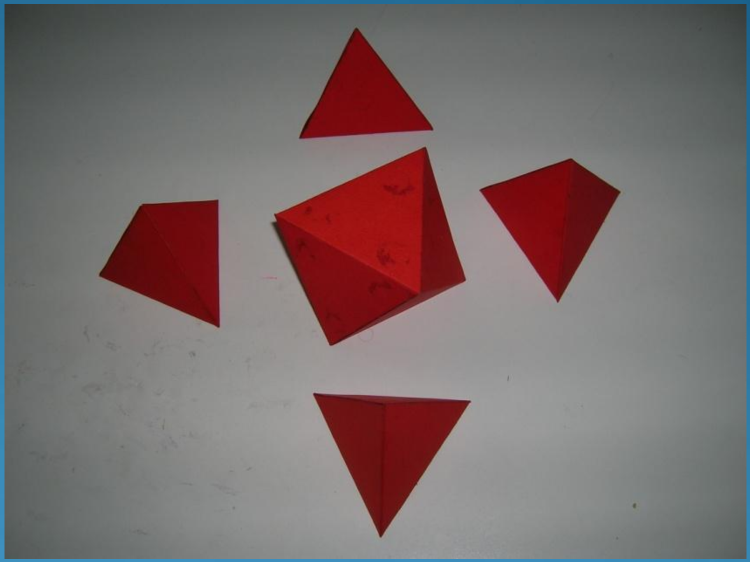
Attività 3: ottaedro duale del cubo

Situazione problematica:

qual è il rapporto tra il volume del cubo ed il volume del suo ottaedro duale?

Ottaedri e tetraedri





V tetraedro rosso = $1/2^3$ (cioè 1/8) V tetraedro giallo

V tot. dei 4 tetraedri rossi = 4/8 (cioè 1/2) V tetraedro giallo

$\Rightarrow$ V ottaedro = 1/2 V tetraedro giallo

Ottaedro duale del cubo

Volume dell’ottaedro duale

$Vo=1/2Vt=(1/2\times1/3)Vc=1/6Vc$

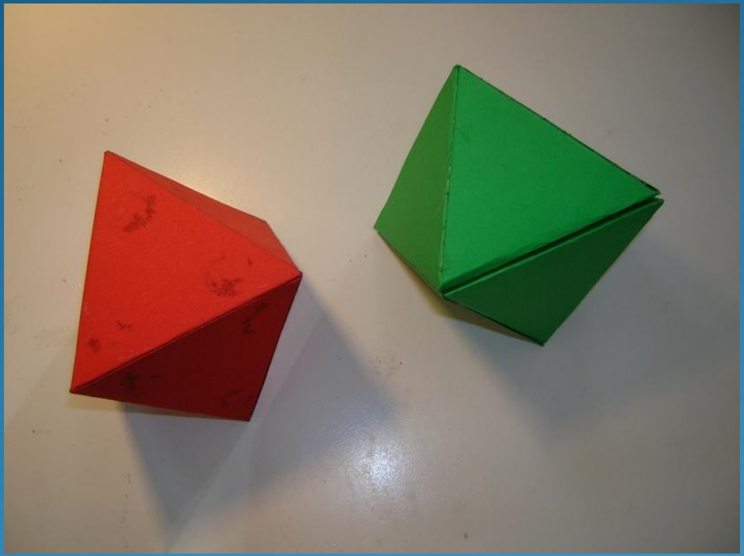
Attività 4: prima frammentazione dell'ottaedro

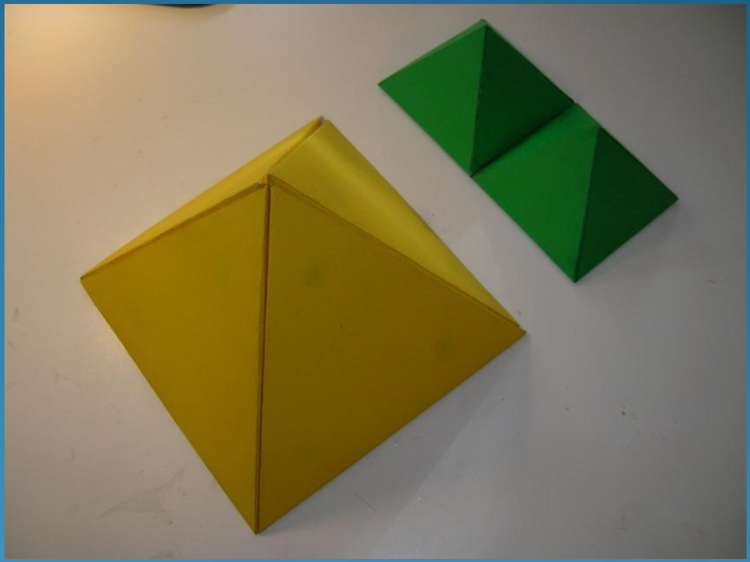
Situazioni problematiche:

-L'ottaedro si scompone in due piramidi quadrangolari regolari che sono simili a …

-Con questa frammentazione si può dimostrare che il volume di una piramide (particolare) è 1/3 del volume di un prisma con stessa base e stessa altezza?

Due piramidi per un ottaedro





V piramide verde = $1/2^3$ (cioè 1/8) V piramide comp. gialla

V piramide verde = 1/2 V ottaedro rosso = 1/4 V tetraedro giallo

$\Rightarrow$ V piramide comp. gialla = 2 V tetraedro giallo

Volume della piramide quadrangolare regolare

La piramide composita gialla ha la base che è un quadrato di area doppia rispetto alla faccia del cubo iniziale, mentre l'altezza è proprio quella del cubo iniziale. Un prisma con quella base e con quella altezza avrebbe un volume pari al doppio del cubo iniziale. Abbiamo ricavato invece che la piramide composita gialla ha un volume pari ai 2/3 del cubo iniziale, cioè 1/3 del volume che avrebbe un prisma con quella base e quella altezza. Questo dimostra (limitatamente al caso della piramide retta a base quadrata con tutti gli spigoli uguali) che il volume della piramide si ottiene moltiplicando l'area di base per l'altezza e dividendo il risultato per 3.

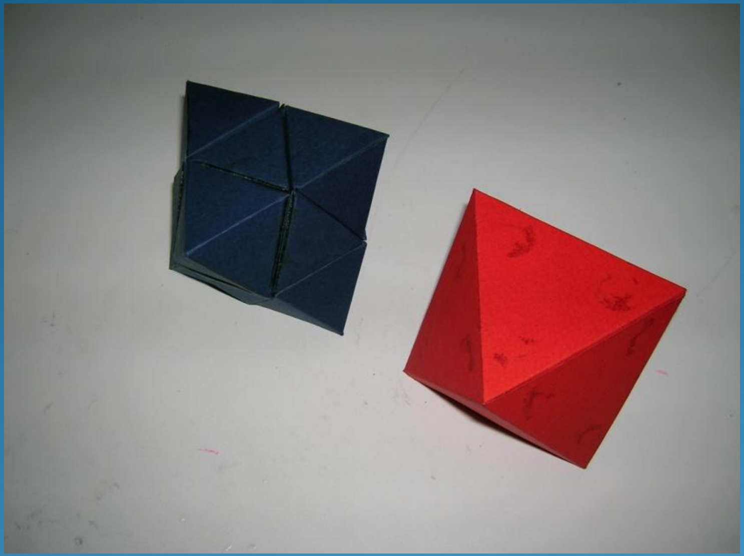
Attività 5: seconda frammentazione dell'ottaedro

Situazioni problematiche:

-Qual è il rapporto tra i volumi dei tetraedri e degli ottaedri?

-Qual è la frazione del volume dell'ottaedro rosso occupata da tetraedri blu e quale da ottaedri blu?

Ottaedri e tetraedri



V ottaedro blu = 4 V tetraedro blu

V totale ottaedri blu = 24 V tetraedro blu = 3 V totale tetraedri blu

$\Rightarrow$V totale tetraedri blu = 1/4 V ottaedro rosso

$\Rightarrow$V totale ottaedri blu = 3/4 V ottaedro rosso

Attività 6: terza frammentazione dell’ottaedro

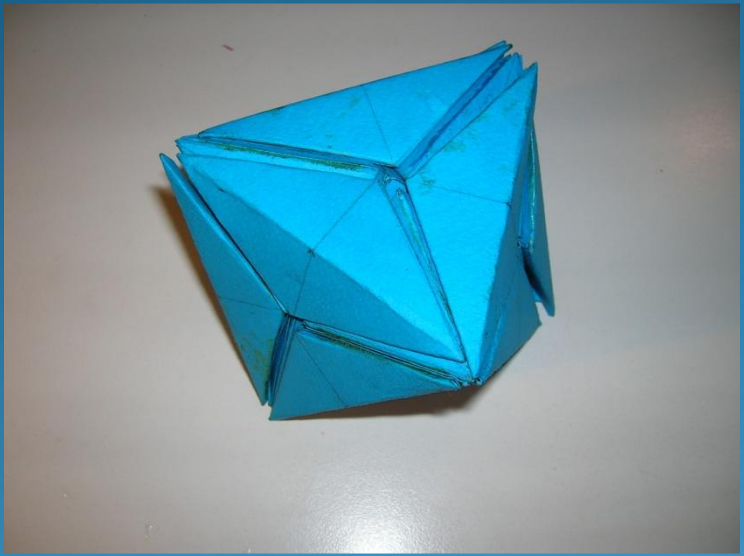
Situazioni problematiche:

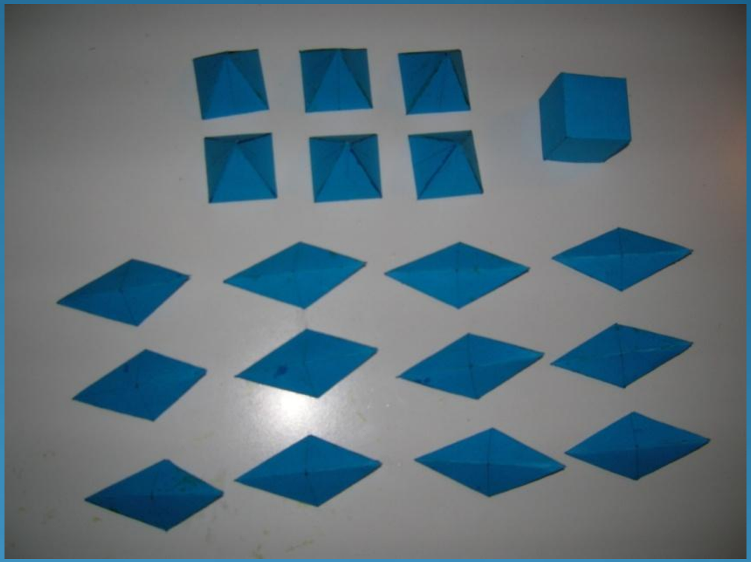
-Qual è la frazione di volume dell’ottaedro occupata dal cubo centrale, dalle piramidi, dai tetraedri irregolari?

-Il cubo centrale è il duale di …?

-Qual è la frazione di volume del cubo grande (giallo) occupata dal cubo centrale (azzurro)?

Cubo duale, piramidi e Vol. residuo





V cubo azzurro = $1/3^3$ (cioè 1/27) V cubo giallo

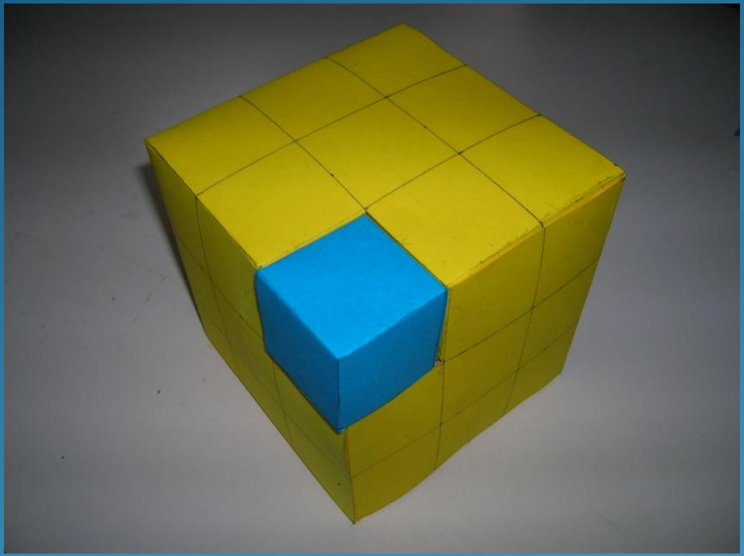
V cubo azzurro = 6/27 V ottaedro rosso

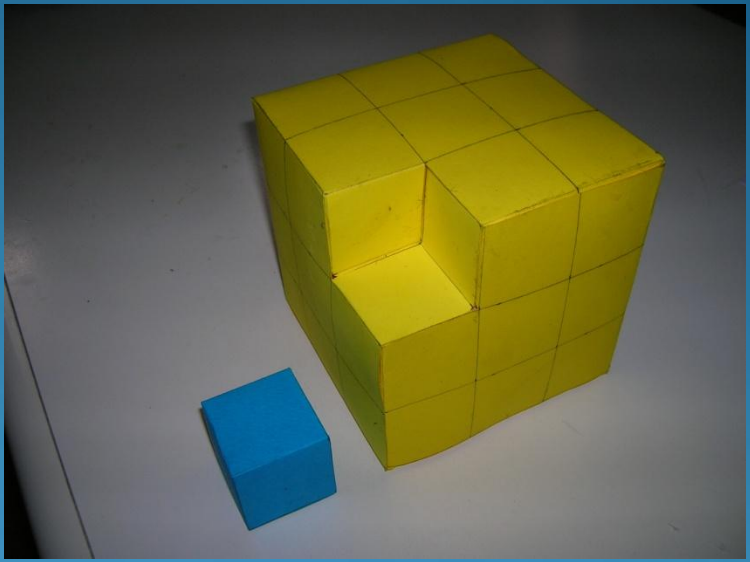
V tot. piramidi azzurre = 2 V cubo azzurro = 12/27 V ottaedro rosso

$\Rightarrow$V residuo = (1 – 12/27 – 6/27) V ottaedro rosso

(1 – 2/3) = 1/3

… dall'inizio:





Il cubo azzurro è il duale del ottaedro rosso che è il duale del cubo giallo.

Riferimenti

Per maggiori dettagli ed approfondimenti:

[1] Luca Dragone, *I poliedri nascosti*, «Archimede», 3/2012, pp. 123 – 128, Le Monnier

[2] Luca Dragone, *Il cubo a "pezzi",* «Archimede», 3/2016, pp. 146 – 152, Le Monnier

[3] *crf.uniroma2.it/wp-content/uploads/2012/04/dragone_poliedri.pdf*

Grazie

luca.dragone71@gmail.com