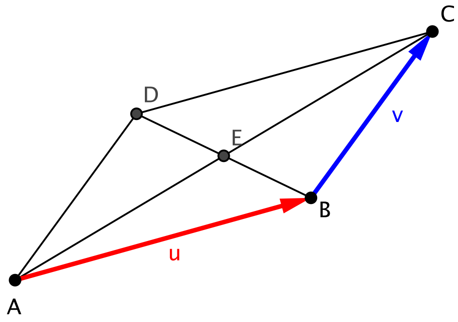
Quadrilateri e parallelogrammi

1. In un parallelogramma, le diagonali rappresentano il vettore somma e il vettore differenza dei vettori dati da due lati adiacenti.

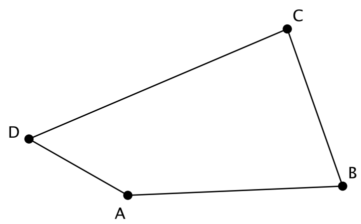


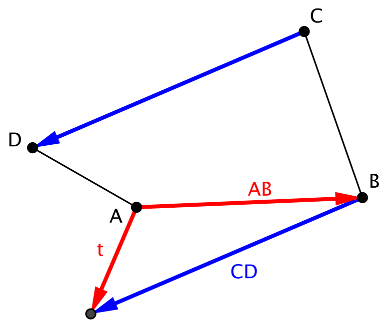
Sia dato un parallelogramma di vertici A, B, C, D. Posto **AB** = **u** e **BC** = **v**, dobbiamo mostrare che **u**+**v** e **v**-**u** sono rappresentati dalle diagonali del parallelogramma.

Notiamo che **AC** = **AB** + **BC** = **u** + **v**.
Inoltre, **DC** = **u** e **AD** = **v**, perché in un parallelogramma i lati opposti sono paralleli e congruenti.
Dunque **BD** = **BC** + **CD** = **v** - **u**

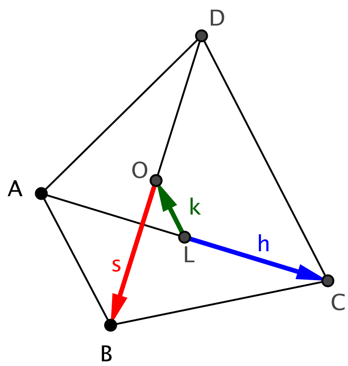
Nota: posto **AC** = **w** e **BD** = **z**, si ricava che **AE**=**EC**=(1/2) **w** e **BE= ED**=(1/2) **z**. In particolare, **BC** = (1/2)(**z**+**w**) e **AB**= (1/2) (**w**-**z**).

2. Un quadrilatero di vertici ABCD è un parallelogramma se e solo **AB** = **DC**.
Un quadrilatero di vertici ABCD è un parallelogramma se e solo **AB** + **CD = 0**. Possiamo pensare che il vettore t = **AB** + **CD** misuri quanto è distante il quadrilatero dall'essere un parallelogramma. (domanda, cosa sappiamo di **BC+DA**?)





3. In un quadrilatero, i punti medi delle diagonali coincidono se e solo il quadrilatero è un parallelogramma.



Sia dato un quadrilatero di vertici A, B, C, D. Siano L il punto medio della diagonale AC e O il punto medio della diagonale AC. Basta mostrare che **LO** = **0** ⇔ **AB** = **DC .**

Al punto 1 abbiamo già mostrato che le diagonali di un parallelogramma si incontrano nei punti medi. È dunque sufficiente mostrare che

$$\mathbf{LO} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{AB} = \mathbf{DC}.$$

Posto **OB** = **s (= DO)** e **LC** = **h (= AL)**, si ha che

LO = **LA** + **AB** + BO = **-h+AB-s**

ma anche

LO = **LC** + **CD** +DO = **h-DC+s**

Sommando le due espressioni di **LO**, troviamo che

2 **LO** = **AB -DC**, cioè **LO** = (1/2) **(AB+CD)**

Concludiamo che **LO** = **0** ⇒ **AB** = **DC**, e il quadrilatero è un parallelogramma.

Nota: abbiamo mostrato un risultato più forte di quello atteso: il vettore **k=LO** può essere utilizzato per misurare quanto il quadrilatero differisce dall'essere un parallelogramma.

Poiché **LO** = (1/2) **(AB+CD) =** (1/2) **t**, la caratterizzazione dei parallelogrammi fornita dal vettore **k** corrisponde a quella fornita dal vettore **t.**

Osserviamo inoltre che

LO = **LC** + **CB** + **BO** = **h+CB-s**

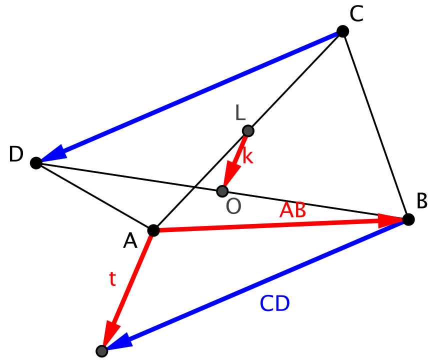
ma anche

LO = **LA** + **AD** + DO = -**h+AD+s**

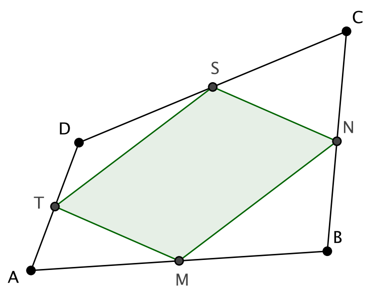
Sommando le due nuove espressioni di **LO**, troviamo che 2 **LO** = **CB +AD**, cioè

LO = (1/2) **(CB +AD).**

Abbiamo, quindi, la possibilità di esprimere **LO** tramite una qualsiasi coppia di lati opposti del quadrilatero.



4. (Teorema di Varignon) In un qualsiasi quadrilatero, i punti medi dei lati sono vertici di un parallelogramma.



Sia dato un quadrilatero di vertici A, B, C, D. Siano M, N, S, T i punti medi dei lati, come in figura. Per l'osservazione al punto precedente, basta mostrare che **MN** = **TS,** cioè **MN+ST = 0**.

Percorrendo il perimetro del quadrilatero di vertici M, N, S, T, osserviamo che

MN+ NS+ST+TM =0, cioè

MN+ST = -(TM + NS).

D'altra parte, ricordando che M, N, S, T sono punti medi dei lati del quadrilatero originario, osserviamo che

MN+**ST**= (**MB**+**BN**)+(**SD**+**DT**)=

= **AM**+ **NC**+**CS**+**TA**=

= (**TA**+**AM**)+ (**NC**+**CS**)=

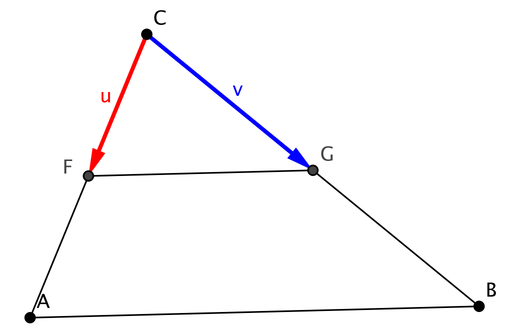
= **TM**+**NS**

Dunque **MN+ST = (TM + NS)**, ma avevamo mostrato che **MN+ST** è uguale al vettore opposto.

Concludiamo che **MN+ST = 0 e** il quadrilatero TMNS è un parallelogramma.

VARIANTE
E' possibile sostituire la sequenza 3 e 4 modificando la dimostrazione del teorema di Varignon

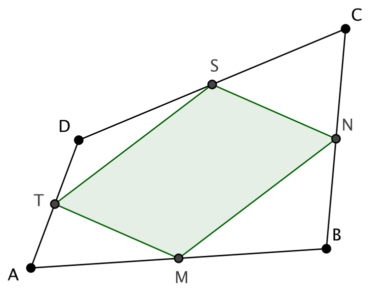
3. In un triangolo, il segmento che congiunge i punti medi di due lati è parallelo al terzo lato, e è lungo la metà del terzo lato.



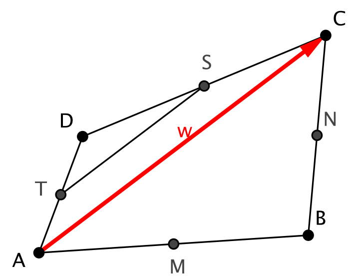
Sia dato un triangolo di vertici A, B, C. Siano F il punto medio del lato AC e G il punto medio del lato CB. Dobbiamo mostrare che **AB** = 2 **FG.**

Posto **CF** = **u** e **CG** = **v**, si ha che CA = 2**u** e **CB** = 2**v** (ricordando che F e G sono i punti medi).
Inoltre,
FG = **FC+CG** =-**u+v** e
AB = **AC +CB** =-2**u+2v** = 2 (-**u+v**) = 2 **FG**.
Dunque, **AB** = 2 **FG**, come si voleva.

4. (Teorema di Varignon) In un qualsiasi quadrilatero, i punti medi dei lati sono vertici di un parallelogramma.



Sia dato un quadrilatero di vertici A, B, C, D. Siano M, N, S, T i punti medi dei lati, come in figura. Per l'osservazione al punto precedente, basta mostrare che **MN** = **TS**.



Tracciamo la diagonale AC e consideriamo il triangolo ACD. Posto **AC** = **w**, si ha che **TS** = (1/2)**w** (applicando il precedente risultato, poiché T e S sono i punti medi di DA e DC). Applicando il ragionamento al triangolo ABC, si ritrova che **MN** = (1/2)**w**, e dunque **TS** = **MN**. Concludiamo che il quadrilatero TMNS è un parallelogramma.