

Lezione V Il prodotto scalare

1.

Fissato un vettore arbitrario non nullo \mathbf{e} , qualunque altro vettore \mathbf{u} con la stessa direzione è un suo multiplo: $\mathbf{u} = a \mathbf{e}$; il numero reale a è la *misura algebrica* (con segno) di \mathbf{u} rispetto ad \mathbf{e} , che chiameremo *vettore unitario* rispetto alla fissata direzione (fig. 1).

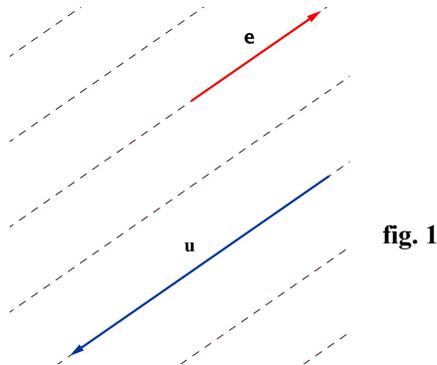


fig. 1

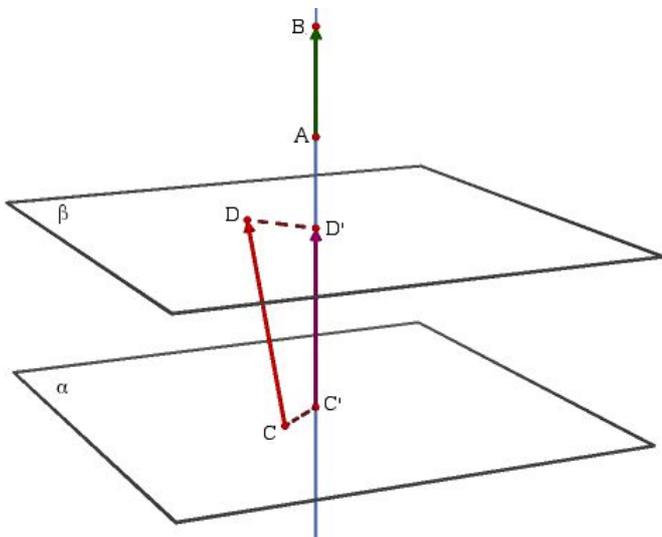
Ripetendo la costruzione per qualunque direzione del piano o dello spazio ci ritroviamo con un'infinità di vettori unitari, che definiscono altrettante misure completamente indipendenti l'una dall'altra: siamo nell'ambito di ciò che è chiamata una *geometria affine*. In tale contesto possiamo confrontare esclusivamente rapporti di coppie di vettori, ciascuna delle quali composta da elementi linearmente dipendenti (un esempio di tale procedura è presente nella dimostrazione, data nella prima lezione, del Teorema di Talete).

L'argomento trattato in quest'ultima lezione richiede, per la prima volta, l'istituzione di un confronto diretto tra lunghezze di segmenti appartenenti a direzioni diverse e dunque un'unità di misura valida in tutto lo spazio: dal punto di vista geometrico ciò equivale ad ammettere la possibilità di effettuare il trasporto di un segmento di lunghezza assegnata in una particolare direzione in qualunque altra direzione, senza che la sua misura risulti alterata (possibilità del movimento "rigido"). Questo ci consentirà di trattare le cosiddette *proprietà metriche* dello spazio, quali la lunghezza di un vettore, la distanza tra due punti, la misura degli angoli, le relazioni tra le aree dei poligoni e le misure dei lati, etc...

La lunghezza di un vettore arbitrario \mathbf{u} verrà indicata con $|\mathbf{u}|$ ed un qualsiasi vettore di lunghezza unitaria sarà chiamato *vettore unitario* (senza più alcun riferimento alla direzione!) o *versore*.

Nello spirito delle lezioni precedenti, tutto ciò verrà realizzato tramite una particolare applicazione che ad ogni coppia di vettori associa un numero reale, la quale ci consentirà di tradurre in un calcolo algebrico le costruzioni geometriche che coinvolgono proprietà metriche; tale applicazione verrà chiamata *prodotto scalare*.

2.



Iniziamo definendo il concetto di *proiezione ortogonale* di un vettore lungo la direzione di un altro vettore. Siano dati, dunque, due vettori qualsiasi dello spazio $\mathbf{AB} = \mathbf{u}$ e $\mathbf{CD} = \mathbf{v}$ e conduciamo da C e da D i piani α , β perpendicolari alla retta AB, che la incontrano rispettivamente in C' e D'. Il vettore $\mathbf{C'D'} = \mathbf{p}_u(\mathbf{v})$ è la *proiezione ortogonale di v su u* (fig.2).

fig. 2

Dobbiamo controllare che si tratti di una buona definizione, ovvero che la proiezione così definita non dipenda dai rappresentanti scelti. Se consideriamo, infatti, il rappresentante di \mathbf{v} applicato in C', il suo secondo

estremo D'' appartiene al piano β , e dunque D' è la sua proiezione ortogonale sulla retta AB (fig. 3).

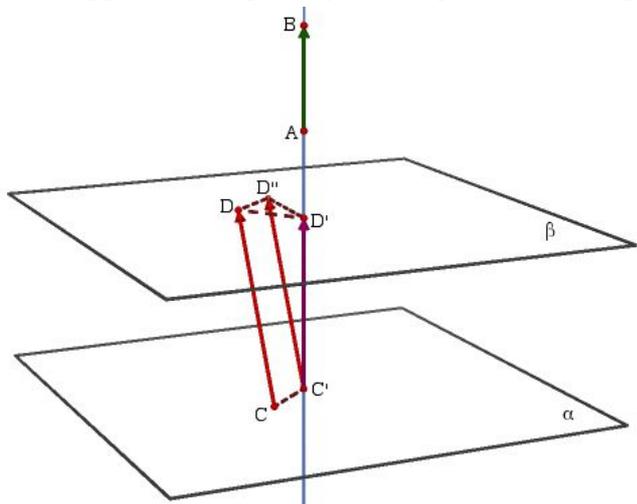


fig. 3

Applicando, infine, il vettore $C'D'=v$ nel punto A e considerando i triangoli congruenti $C'D''D'$ e AEE' , concludiamo che il vettore proiezione è ben definito (fig. 4).

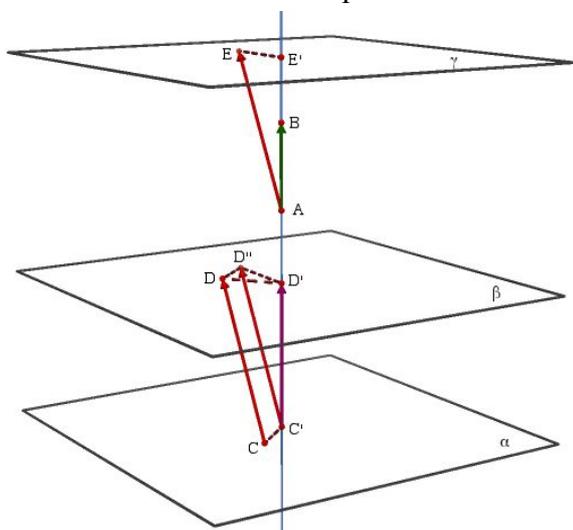


fig. 4

Siano dati tre vettori dello spazio u , v e w e sia A un punto di una retta r nella direzione di u . Consideriamo i rappresentanti $AB=v$ e $BC=w$, da cui $AB+BC=v+w$. Considerati i tre piani α , β e γ passanti rispettivamente per A , B , C e perpendicolari ad r , siano $A' \equiv A$, B' e C' le intersezioni di detti piani con la retta r (fig. 5).

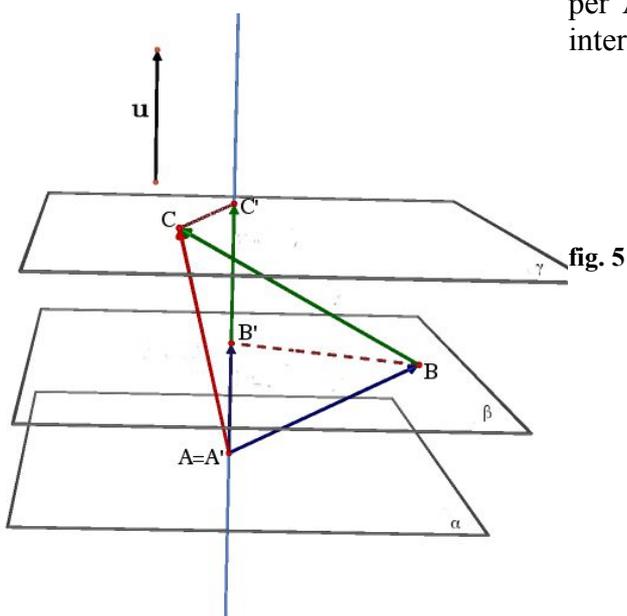


fig. 5

Per quanto visto in precedenza risulta $A'B' = p_u(v)$, $B'C' = p_u(w)$, $A'C' = p_u(v+w)$ e dunque $p_u(v+w) = p_u(v) + p_u(w)$.

Sia ora dato un qualunque scalare a e consideriamo i vettori $OP = u$, $OA = v$, $OB = av$, $OH = p_u(v)$, $OK = p_u(av)$ (figg. 6 e 7). Applicando il Teorema di Talete si ottiene $\frac{OK}{OH} = \frac{OB}{OA} = a$, ovvero $p_u(av) = a p_u(v)$.

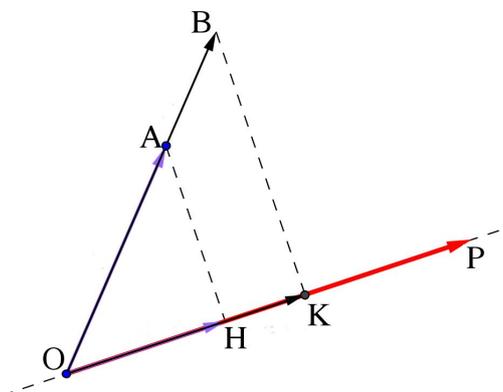


fig. 6

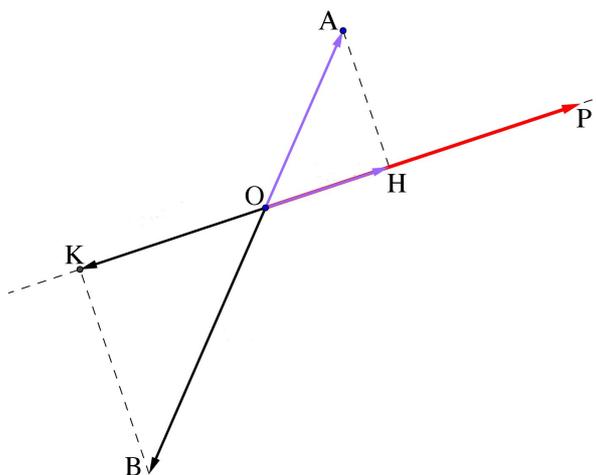


fig. 7

L'operazione di proiezione gode dunque della proprietà di *linearità*:

$$(L) p_u(av + bw) = ap_u(v) + bp_u(w)$$

Definiamo ora il *prodotto scalare* di due qualsiasi vettori u e v dello spazio, e lo indichiamo con $u \cdot v$, come il prodotto della lunghezza di u per la lunghezza della proiezione di v su u , preso con il segno positivo o negativo a seconda che i vettori u e $p_u(v)$ abbiano o no lo stesso verso (figg. 8 e 9) (PS)

$$u \cdot v = \begin{cases} |u| |p_u(v)| & \text{se } p_u(v) = k u, \quad k > 0 \\ -|u| |p_u(v)| & \text{se } p_u(v) = k u, \quad k < 0 \end{cases} = k |u|^2$$

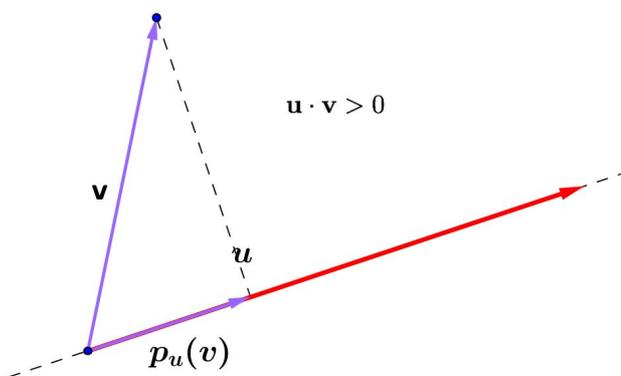


fig. 8

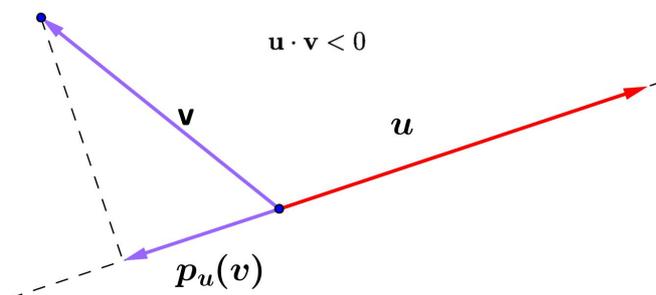


fig. 9

Due vettori appartenenti a direzioni perpendicolari si dicono *ortogonali* ed il loro prodotto scalare è nullo (figura 10). Il vettore nullo è l'unico vettore ortogonale a sé stesso e ad ogni altro.

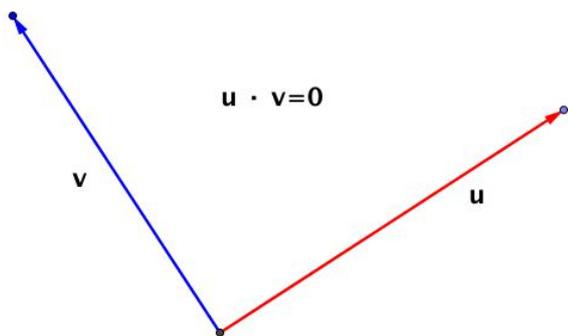


fig. 10

Il prodotto scalare così definito gode delle seguenti proprietà:

- 1) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$ (*commutatività* o *simmetria*)
- 2) $\mathbf{u} \cdot (a\mathbf{v} + b\mathbf{w}) = a(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) + b(\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})$ (*linearità* e dunque, in virtù della 1), *bilinearità*)
- 3) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \geq 0$ e $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 0$ se e solo se $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ (*positività*)

Tali proprietà valgono per qualsivoglia terna di vettori \mathbf{u} , \mathbf{v} e \mathbf{w} e per qualunque coppia di scalari a e b .

Dalla definizione segue inoltre che $|\mathbf{u}| = \sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}$.

Procediamo alla dimostrazione delle proprietà sopra elencate.

1) Presi due vettori \mathbf{u} e \mathbf{v} , scriviamo la definizione di $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ e di $\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$ (figg. 11, 12, 13, 14):

fig. 11

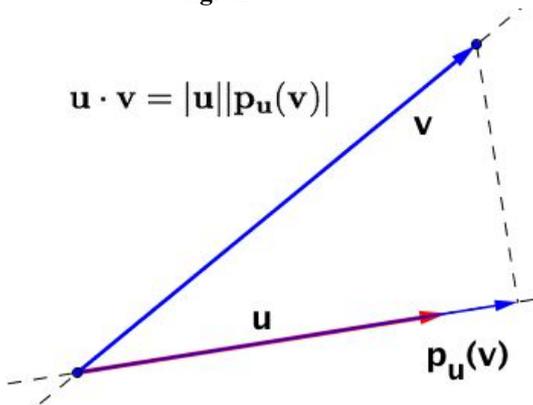


fig. 12

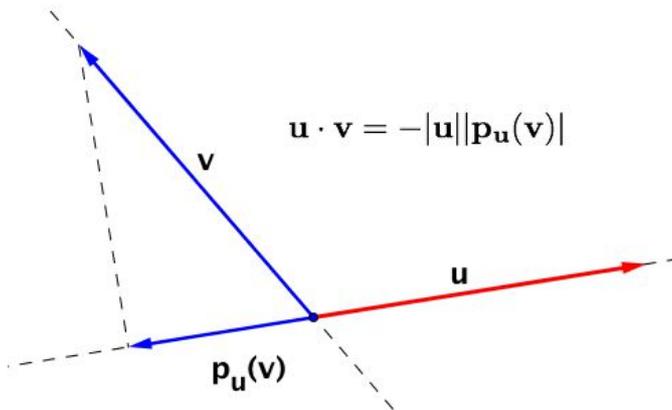
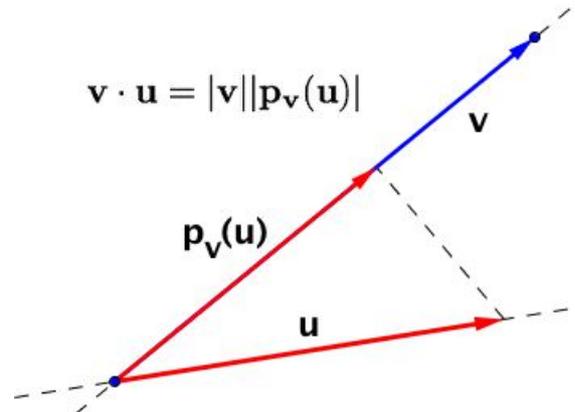


fig. 13

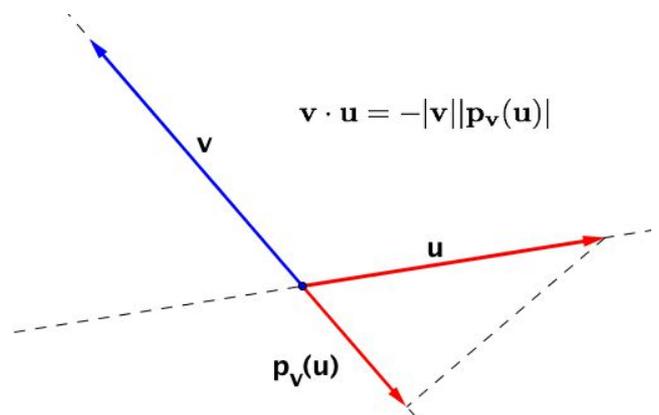
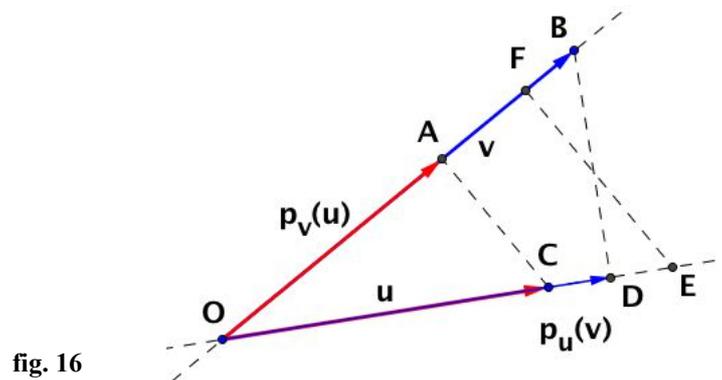
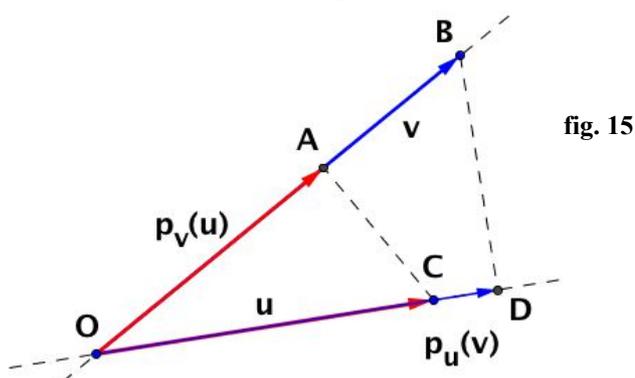


fig. 14

Intanto notiamo che in ogni caso $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ ha lo stesso segno di $\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$ e che il tipo di configurazione mostrato nelle figure 13 e 14 si ottiene dalla tipologia descritta nelle figure 11 e 12 scambiando uno dei vettori con il suo opposto; possiamo dunque, senza perdita di generalità, riferirci al caso descritto nelle figure 11 e 12, che riuniamo entrambe nella figura 15:



Riportiamo ora sulla semiretta OC un segmento OE congruente a OB e tracciamo da E la parallela a AC, che incontrerà la semiretta OA nel punto F (fig. 16).

Per il Teorema di Talete $\frac{OC}{OE} = \frac{OA}{OF}$, mentre i due triangoli OEF e OBD sono congruenti per il secondo criterio, dunque OF è congruente a OD e in definitiva $\frac{OC}{OB} = \frac{OA}{OD}$, ovvero $\frac{|\mathbf{u}|}{|\mathbf{v}|} = \frac{|\mathbf{p}_v(\mathbf{u})|}{|\mathbf{p}_u(\mathbf{v})|}$, da cui segue la tesi.

2) Proviamo la proposizione dimostrando che $a(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot (a\mathbf{v})$ e che $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) + (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})$.
 Se m, n, q sono numeri reali tali che $\mathbf{p}_u(\mathbf{v}) = m\mathbf{u}$, $\mathbf{p}_u(\mathbf{w}) = n\mathbf{u}$, $\mathbf{p}_u(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = q\mathbf{u}$, dalla linearità della proiezione si deduce che $q = m + n$ e $\mathbf{p}_u(a\mathbf{v}) = (am)\mathbf{u}$. Allora possiamo scrivere:

$$a(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = a(m|\mathbf{u}|^2) = (am)|\mathbf{u}|^2 = \mathbf{u} \cdot (a\mathbf{v});$$

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = q|\mathbf{u}|^2 = (m+n)|\mathbf{u}|^2 = m|\mathbf{u}|^2 + n|\mathbf{u}|^2 = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) + (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}).$$

La 3) è infine immediata conseguenza della definizione stessa.

Dati due vettori \mathbf{u} e \mathbf{v} e considerato l'angolo convesso \widehat{uv} che essi formano, definiamo *coseno* dell'angolo \widehat{uv} , indicato con $\cos \widehat{uv}$, il rapporto tra la lunghezza della proiezione di \mathbf{v} su \mathbf{u} e la lunghezza di \mathbf{v} se l'angolo è acuto, il suo opposto se l'angolo è ottuso, come mostrato nelle figure 17 e 18 (il coseno dell'angolo retto risulta ovviamente nullo):

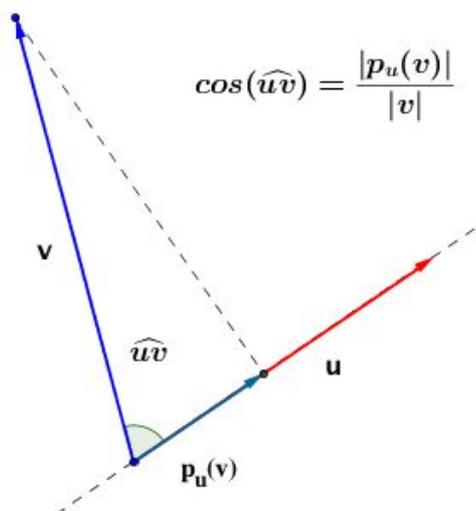


fig. 17

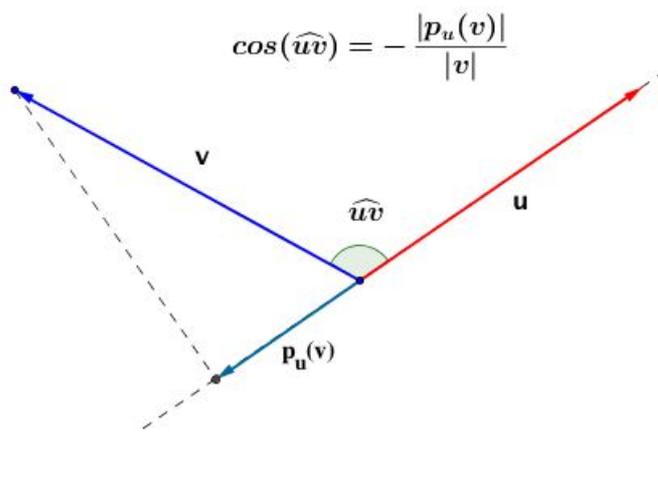


fig. 18

Il coseno è una funzione simmetrica, in quanto $|\cos \widehat{uv}| = \frac{|\mathbf{p}_u(\mathbf{v})|}{|\mathbf{v}|} = \frac{|\mathbf{p}_v(\mathbf{u})|}{|\mathbf{u}|} = |\cos \widehat{vu}|$ ed i loro segni coincidono; esso verifica inoltre la disuguaglianza $|\cos \widehat{uv}| \leq 1$, in quanto in ogni triangolo rettangolo i cateti sono minori dell'ipotenusa.

Tramite il coseno dell'angolo tra vettori è possibile esprimere il prodotto scalare nella forma più familiare:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{u}| |\mathbf{v}| \cos \widehat{uv}$$

3.

L'introduzione del prodotto scalare consente di trattare in modo puramente formale, tramite le regole di tale calcolo algebrico, le caratteristiche dello spazio geometrico che dipendono da confronti di lunghezze e di angoli, che nel linguaggio della matematica moderna vengono dette, come abbiamo ricordato, *proprietà metriche*. Questo fatto ha delle conseguenze che si sono rivelate basilari per l'intero sviluppo della matematica contemporanea.

L'osservazione fondamentale da fare è che le dimostrazioni ottenute con il nostro calcolo non dipendono

esplicitamente dalla particolare costruzione geometrica con cui abbiamo introdotto il prodotto scalare, né sono legate al numero di dimensioni dello spazio ambiente. Questo ci consente di definire come prodotto scalare una qualsiasi applicazione che associ ad ogni coppia di elementi di uno spazio vettoriale di dimensione qualsiasi un numero reale in modo tale che siano verificate le proprietà 1), 2), 3). Un qualsiasi spazio vettoriale dotato di un prodotto scalare verrà detto *spazio euclideo*; due suoi elementi vengono detti *ortogonali* se $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$.

In ogni spazio euclideo è possibile definire la lunghezza di un qualunque vettore \mathbf{u} tramite la relazione $|\mathbf{u}| = \sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}$.

Lo spazio vettoriale numerico di dimensione n $\mathbb{R}^n = \{ \mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R} \}$, ad esempio, risulta essere uno spazio euclideo con il prodotto scalare “naturale” $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n = \sum_{i=1}^n x_i y_i$, da cui segue che la

lunghezza di un vettore risulta espressa da $|\mathbf{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$. In questo spazio ogni vettore può

essere espresso da una combinazione lineare degli n vettori linearmente indipendenti $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0, \dots, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$, $\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1, \dots, 0)$, ..., $\mathbf{e}_n = (0, 0, 0, \dots, 1)$ (ogni insieme di vettori con queste caratteristiche si dice *base* di uno spazio vettoriale), i quali risultano essere tutti versori ($|\mathbf{e}_i| = 1$, $i = 1, \dots, n$) e a due a due ortogonali ($\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = 0$, se $i \neq j$); un tale tipo di base viene detta *base ortogonale normalizzata*, ovvero *base ortonormale*.

È possibile dare, a partire da una generica base assegnata in un qualunque spazio euclideo, un metodo effettivo di costruzione di una base ortonormale. Le figure 19 e 20 descrivono tale procedura, detta di *ortonormalizzazione di Gram-Schmidt*, per l'ordinario spazio geometrico tridimensionale. Una terna di vettori ortonormali nello spazio ordinario viene generalmente indicata con i simboli \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} ; notiamo esplicitamente che la terna $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ risulta equiversa alla terna $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$.

fig. 19

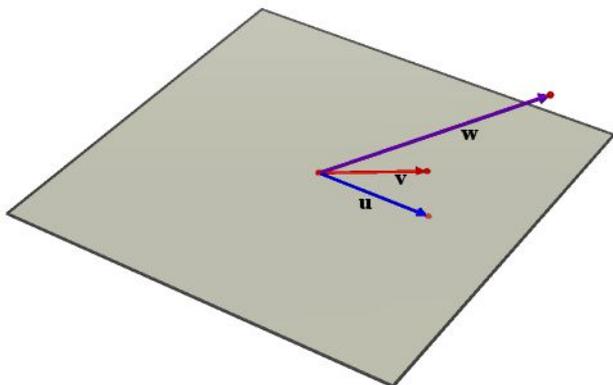
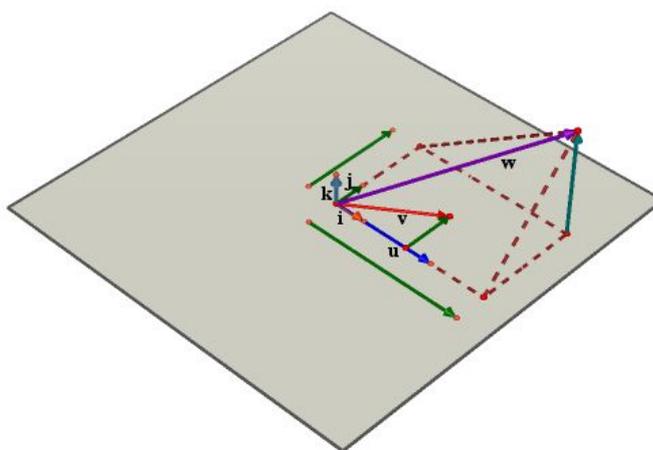


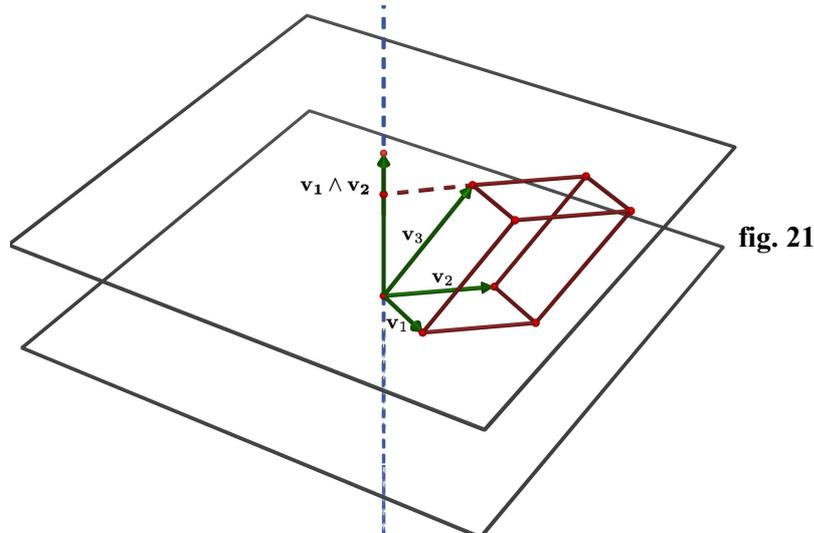
fig. 20



$$\mathbf{i} = \frac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|}, \quad \mathbf{j} = \frac{\mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{i}) \mathbf{i}}{|\mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{i}) \mathbf{i}|}, \quad \mathbf{k} = \frac{\mathbf{w} - (\mathbf{w} \cdot \mathbf{i}) \mathbf{i} - (\mathbf{w} \cdot \mathbf{j}) \mathbf{j}}{|\mathbf{w} - (\mathbf{w} \cdot \mathbf{i}) \mathbf{i} - (\mathbf{w} \cdot \mathbf{j}) \mathbf{j}|}$$

Le componenti (o coordinate) di un vettore di uno spazio euclideo rispetto ad una qualunque base ortonormale sono date dal prodotto scalare del vettore per il versore corrispondente, ovvero in simboli: se $\mathbf{u} = u_1 \mathbf{e}_1 + u_2 \mathbf{e}_2 + \dots + u_n \mathbf{e}_n$ allora $u_i = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{u}$.

Considerati tre vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ dell'ordinario spazio euclideo, si vede facilmente che il volume del parallelepipedo individuato da $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ è dato dal *prodotto triplo* $\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_3$ (fig. 21): esso risulta positivo o negativo a seconda che la terna $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ sia o meno equiversa ad una terna ortonormale $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ per la quale si abbia $\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2$.



Una relazione importante che è possibile dimostrare in un generico spazio euclideo è la *disuguaglianza di Schwarz*:

Per ogni coppia di vettori \mathbf{u} e \mathbf{v} si ha che $|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}| \leq |\mathbf{u}| |\mathbf{v}|$ e vale l'uguaglianza se e solo se i due vettori sono linearmente dipendenti.

Notiamo esplicitamente che il modulo a primo membro rappresenta il valore assoluto di un numero reale, mentre i due moduli a secondo membro rappresentano lunghezze di vettori.

Da tale relazione segue che $\frac{|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}|}{|\mathbf{u}| |\mathbf{v}|} \leq 1$, il che ci consente di definire anche per un prodotto scalare generico il coseno dell'angolo tra due vettori come $\cos \widehat{\mathbf{u}\mathbf{v}} = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}| |\mathbf{v}|}$.

Procediamo alla dimostrazione della disuguaglianza per via puramente algebrica, utilizzando unicamente le proprietà 1), 2), 3) del prodotto scalare.

Se uno almeno dei due vettori è nullo la relazione è banalmente verificata. Supponendo dunque $\mathbf{u}, \mathbf{v} \neq 0$ e considerando un qualunque scalare a risulta:

$$0 \leq |a\mathbf{u} + \mathbf{v}|^2 = (a\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot (a\mathbf{u} + \mathbf{v}) = a^2 |\mathbf{u}|^2 + 2a(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) + |\mathbf{v}|^2.$$

Tale espressione è un polinomio di secondo grado in a , il quale deve essere non negativo per qualsiasi valore di a medesimo, per cui il suo discriminante dovrà risultare non positivo:

$$\frac{\Delta}{4} = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2 - |\mathbf{u}|^2 |\mathbf{v}|^2 \leq 0 \Leftrightarrow (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2 \leq |\mathbf{u}|^2 |\mathbf{v}|^2 \Leftrightarrow |(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})| \leq |\mathbf{u}| |\mathbf{v}|,$$

e questo dimostra la prima parte della proposizione.

Supponiamo ora che \mathbf{u} e \mathbf{v} siano linearmente dipendenti, ovvero che esista un a_0 tale che $a_0 \mathbf{u} + \mathbf{v} = 0$. In tal caso a_0 risolve l'equazione in a $|a\mathbf{u} + \mathbf{v}|^2 = a^2 |\mathbf{u}|^2 + 2a(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) + |\mathbf{v}|^2 = 0$, questo può accadere se e solo se $|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}| = |\mathbf{u}| |\mathbf{v}|$ e la dimostrazione della proposizione è così completata.

Utilizzando la disuguaglianza di Schwarz è possibile dimostrare che per la lunghezza di un vettore vale in generale la cosiddetta *disuguaglianza triangolare*, che corrisponde al ben noto risultato di geometria euclidea che afferma essere ogni lato di un triangolo minore della somma degli altri due:

$$|\mathbf{u} + \mathbf{v}| \leq |\mathbf{u}| + |\mathbf{v}|$$

4.

Alla luce di quanto discusso, occupiamoci più nel dettaglio della forma assunta dai possibili prodotti scalari nel

piano ordinario, in cui supporremo fissata innanzitutto la base ortonormale “canonica” $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}\}$. In tale base ogni vettore \mathbf{u} del piano può essere scritto come $\mathbf{u} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ e questo ci consente di identificare il piano stesso con lo spazio vettoriale numerico \mathbb{R}^2 . Se $\mathbf{u}_1 = x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j}$ e $\mathbf{u}_2 = x_2\mathbf{i} + y_2\mathbf{j}$, sappiamo già che in tale base il prodotto scalare ordinario è espresso da $\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2 = x_1 y_1 + x_2 y_2$, mentre la lunghezza di un vettore $\mathbf{u} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ è data da $|\mathbf{u}| = \sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}} = \sqrt{x^2 + y^2}$. Notiamo che $|\mathbf{u}|^2 = \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}$, detto *modulo quadrato* di \mathbf{u} , risulta espresso da un particolare polinomio omogeneo di secondo grado, costituito dalla somma dei quadrati delle coordinate del vettore, chiamato *forma quadratica associata al prodotto scalare*, che d'ora in poi indicheremo con $q(\mathbf{u})$; osserviamo anche che il prodotto scalare si può ottenere dalla forma quadratica associata “sdoppiando” le coordinate (*polarizzazione della forma quadratica*).

Supponiamo ora di aver definito un altro prodotto scalare nel nostro piano, che indicheremo con $\mathbf{u}_1 * \mathbf{u}_2$. Poiché esso deve verificare le proprietà 1), 2), 3) si ottiene:

$$\mathbf{u}_1 * \mathbf{u}_2 = (x_1 \mathbf{i} + y_1 \mathbf{j}) * (x_2 \mathbf{i} + y_2 \mathbf{j}) = x_1 x_2 (\mathbf{i} * \mathbf{i}) + y_1 y_2 (\mathbf{j} * \mathbf{j}) + (x_1 y_2 + x_2 y_1) (\mathbf{i} * \mathbf{j}) = a x_1 x_2 + b y_1 y_2 + c (x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

dove abbiamo posto $a = \mathbf{i} * \mathbf{i}$, $b = \mathbf{j} * \mathbf{j}$, $c = \mathbf{i} * \mathbf{j}$.

La forma quadratica associata si ottiene ponendo $\bar{q}(\mathbf{u}) = \mathbf{u} * \mathbf{u} = a x^2 + b y^2 + 2 c x y$, polinomio omogeneo completo di secondo grado. Dalla proprietà 3) del prodotto scalare (positività) deve risultare $a > 0$ e $b > 0$, mentre dalla disuguaglianza di Schwarz segue che $|c| < \sqrt{a} \sqrt{b} \Leftrightarrow c^2 - ab < 0$; sempre come conseguenza della positività possiamo definire una lunghezza ponendo $[\mathbf{u}] = \sqrt{\bar{q}(\mathbf{u})} = \sqrt{\mathbf{u} * \mathbf{u}}$. Anche nel caso generale, inoltre, il prodotto scalare si ottiene polarizzando la forma quadratica.

Chiariamo meglio quanto detto con un esempio numerico.

Poniamo $[\mathbf{u}]^2 = \bar{q}(\mathbf{u}) = x^2 + y^2 + xy$, da cui $\mathbf{u}_1 * \mathbf{u}_2 = x_1 x_2 + y_1 y_2 + \frac{1}{2}(x_1 y_2 + x_2 y_1)$. Vediamo subito che rispetto al nuovo prodotto scalare i vettori della base $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}\}$ non risultano più ortogonali, mentre sono ugualmente unitari.

Per confrontare meglio le due metriche rappresentiamo graficamente i vettori sul piano numerico $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) | x, y \in \mathbb{R}\}$ e consideriamo su di esso i punti che soddisfano le equazioni $q(\mathbf{u}) = x^2 + y^2 = 1$ e $\bar{q}(\mathbf{u}) = x^2 + y^2 + xy = 1$; tali punti rappresentano i secondi estremi dei versori nelle due metriche. Nel primo caso si tratta dei punti della circonferenza di raggio unitario, nel secondo di quelli di un'ellisse con assi le bisettrici dei quadranti (figg. 22 e 23).

Mentre le coppie di direzioni ortogonali rispetto a q sono quelle ordinarie, quelle rispetto a \bar{q} sono le coppie di direzioni coniugate dell'ellisse¹ (fig. 24).

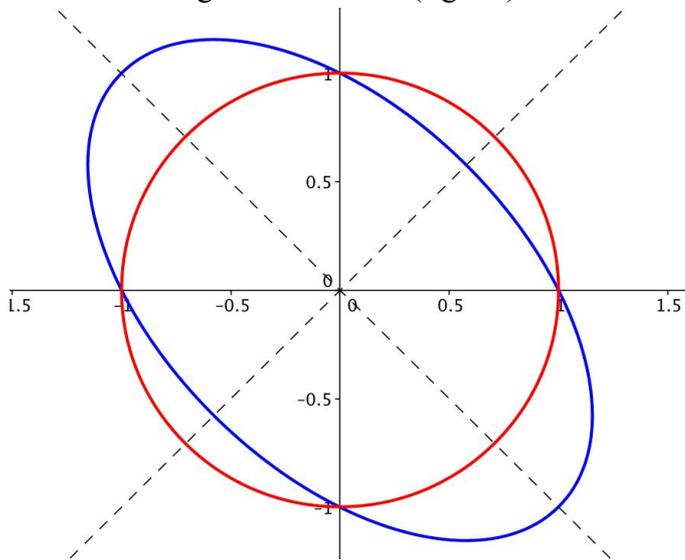


fig. 22

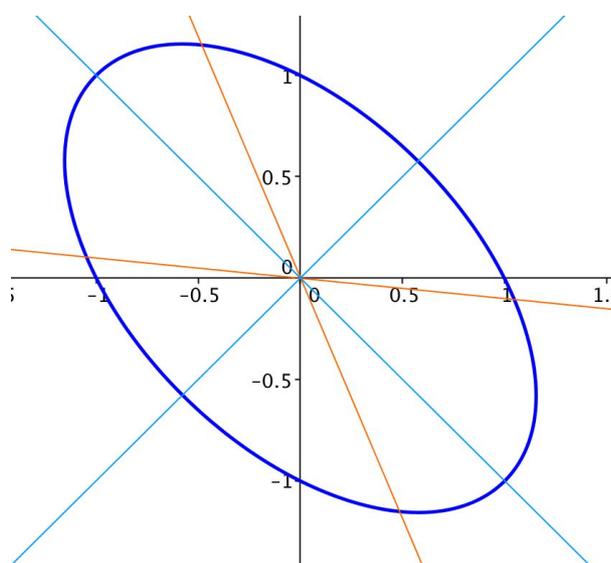
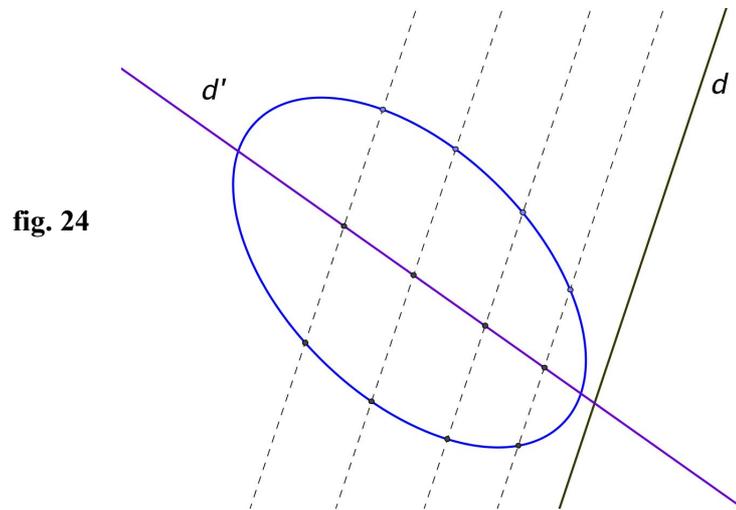


fig.23

¹ Data una conica e una direzione d qualsiasi, si dice *coniugata* di d rispetto alla conica la direzione d' individuata dalla retta ottenuta congiungendo i centri delle corde tagliate sulla conica dalle rette di direzione d (fig. 24).



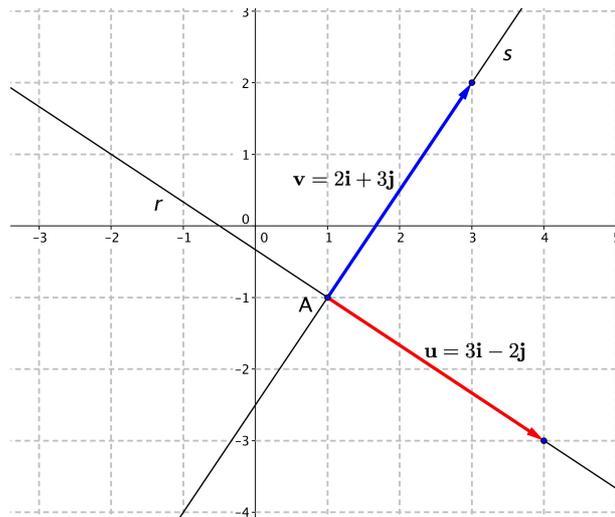
Dati due punti del piano di coordinate $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$, la loro distanza nella metrica ordinaria e nella nuova metrica indotta da \bar{q} è data rispettivamente dalle formule:

$$d(A, B) = |\mathbf{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

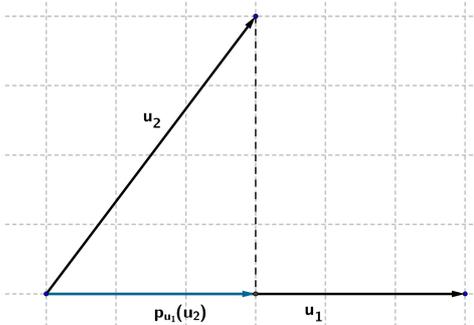
$$\bar{d}(A, B) = [\mathbf{AB}] = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (x_B - x_A)(y_B - y_A)}$$

ESERCIZI DI RISCALDAMENTO

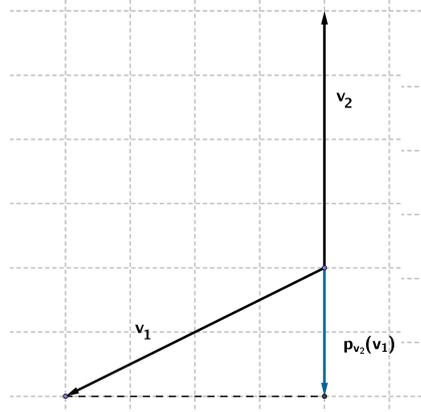
1. Tracciare la retta r del piano passante per il punto $A(1,-1)$ ed avente la direzione individuata dal vettore $\mathbf{u}=3\mathbf{i}-2\mathbf{j}$ e successivamente la retta s ad essa perpendicolare passante per il medesimo punto.



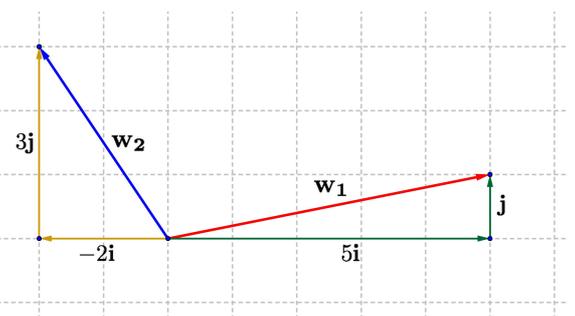
2. Calcolare il prodotto scalare tra le seguenti coppie di vettori:



$$\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2 = 6 \cdot 3 = 18$$

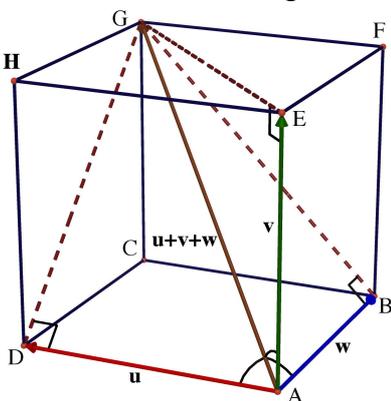


$$\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = 4 \cdot (-2) = -8$$



$$\mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{w}_2 = (5\mathbf{i} + \mathbf{j}) \cdot (-2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}) = 5 \cdot (-2) + 1 \cdot 3 = -7$$

3. Dato un cubo con gli spigoli unitari, siano \mathbf{u} , \mathbf{v} , \mathbf{w} i vettori rappresentati da tre spigoli uscenti da uno stesso vertice A. Calcolare l'angolo che la diagonale del cubo forma con i tre spigoli.



I vettori \mathbf{u} , \mathbf{v} e \mathbf{w} costituiscono una base ortonormale nello spazio euclideo, mentre la diagonale è un rappresentante della loro somma ($\mathbf{AG}=\mathbf{u}+\mathbf{v}+\mathbf{w}$), per cui $|\mathbf{AG}|=\sqrt{3}$ e $\mathbf{AG} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{AG} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{AG} \cdot \mathbf{w} = 1$.

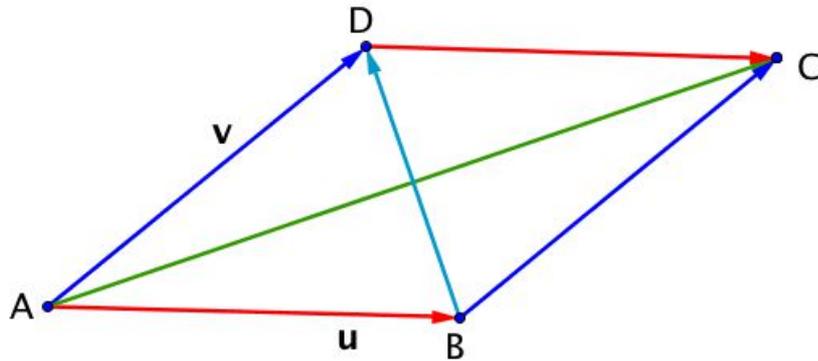
Da quanto precede risulta dunque che

$$\cos \widehat{\mathbf{AGu}} = \cos \widehat{\mathbf{AGv}} = \cos \widehat{\mathbf{AGw}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ ed infine}$$

$$\widehat{\mathbf{AGu}} = \widehat{\mathbf{AGv}} = \widehat{\mathbf{AGw}} \approx 54,73^\circ$$

TAVOLE DI LAVORO

Dimostrare, utilizzando il prodotto scalare tra vettori geometrici, che le diagonali di un rombo sono perpendicolari.

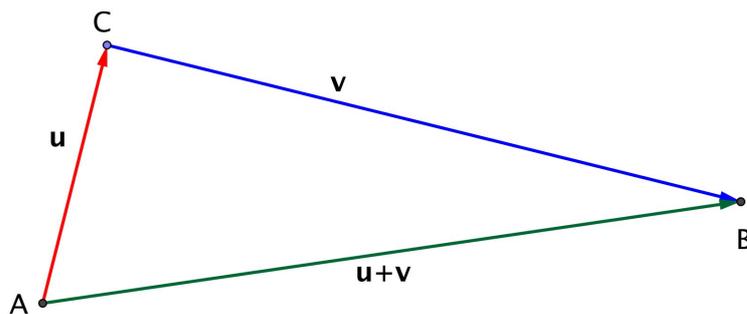


Poniamo $\mathbf{AB}=\mathbf{u}$, $\mathbf{AD}=\mathbf{v}$, per cui $|\mathbf{u}|=|\mathbf{v}|$ e le diagonali sono date da $\mathbf{AC}=\mathbf{u}+\mathbf{v}$ e $\mathbf{BD}=\mathbf{v}-\mathbf{u}$. Il prodotto scalare dei vettori rappresentati dalle diagonali è dato dunque da:

$$(\mathbf{u}+\mathbf{v})\cdot(\mathbf{v}-\mathbf{u})=\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}-\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}+\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}-\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}=|\mathbf{v}|^2-|\mathbf{u}|^2=0$$

TEOREMA DI PITAGORA

Dimostrare, utilizzando il prodotto scalare, il Teorema di Pitagora



Siano \mathbf{u} e \mathbf{v} i vettori rappresentati dai cateti di un dato triangolo rettangolo orientati come in figura. L'ipotenusa del triangolo rettangolo rappresenta il vettore $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ e i moduli di questi vettori sono le lunghezze dei segmenti da cui derivano. Per l'ipotenusa abbiamo:

$$(\mathbf{u}+\mathbf{v})\cdot(\mathbf{u}+\mathbf{v})=\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}+2\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}+\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}=\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}+\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}$$

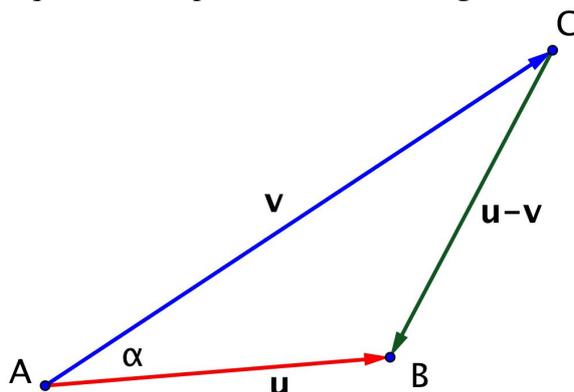
dal momento che i vettori \mathbf{u} e \mathbf{v} sono ortogonali tra loro. Abbiamo dunque

$$|\mathbf{u}+\mathbf{v}|^2=|\mathbf{u}|^2+|\mathbf{v}|^2$$

TEOREMA DI CARNOT

Dimostrare, utilizzando il prodotto scalare, il teorema di Carnot, generalizzazione del teorema di Pitagora ad un triangolo qualunque:

In un triangolo qualsiasi il quadrato di un lato è uguale alla somma dei quadrati degli altri due lati meno il doppio prodotto delle lunghezze di questi ultimi per il coseno dell'angolo da essi formato.



Il teorema di Carnot consente di calcolare il terzo lato di un triangolo conoscendo gli altri due lati e l'angolo tra essi compreso.

Procediamo come nel caso precedente, avendo cura di scegliere il verso dei vettori in modo che l'angolo α interno al triangolo sia l'angolo compreso tra i vettori. Abbiamo

$$(\mathbf{u}-\mathbf{v})\cdot(\mathbf{u}-\mathbf{v})=\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}+\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}-2\mathbf{u}\cdot\mathbf{v},$$

dunque

$$|\mathbf{u}-\mathbf{v}|^2=|\mathbf{u}|^2+|\mathbf{v}|^2-2|\mathbf{u}||\mathbf{v}|\cos\alpha$$

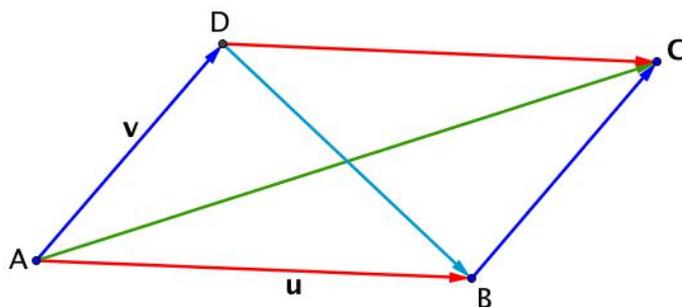
cioè

$$BC^2=AB^2+AC^2-AB\cdot AC\cos\alpha$$

IDENTITÀ DEL PARALLELOGRAMMA

Dimostrare, utilizzando il prodotto scalare, il seguente teorema:

In un parallelogramma la somma dei quadrati delle diagonali uguaglia la somma dei quadrati dei lati.



Poniamo $\mathbf{AB}=\mathbf{u}$, $\mathbf{AD}=\mathbf{v}$, per cui le diagonali sono date da $\mathbf{AC}=\mathbf{u}+\mathbf{v}$ e $\mathbf{DB}=\mathbf{u}-\mathbf{v}$. Calcolando i quadrati delle lunghezze di queste ultime si ottiene:

$$|\mathbf{u}+\mathbf{v}|^2=(\mathbf{u}+\mathbf{v})\cdot(\mathbf{u}+\mathbf{v})=|\mathbf{u}|^2+|\mathbf{v}|^2+2(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})$$

$$|\mathbf{u}-\mathbf{v}|^2=(\mathbf{u}-\mathbf{v})\cdot(\mathbf{u}-\mathbf{v})=|\mathbf{u}|^2+|\mathbf{v}|^2-2(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})$$

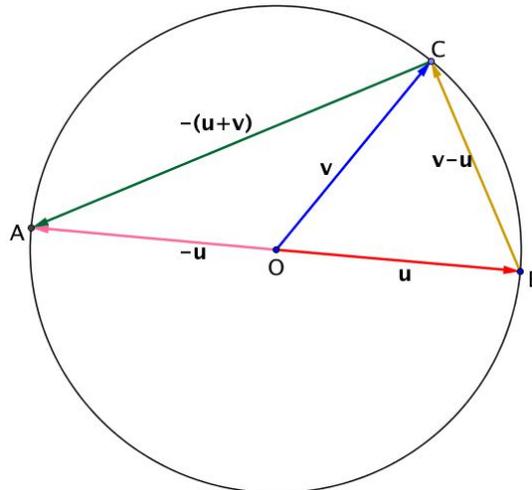
Sommando membro a membro le uguaglianze precedenti si ha:

$$|\mathbf{u}+\mathbf{v}|^2+|\mathbf{u}-\mathbf{v}|^2=2(|\mathbf{u}|^2+|\mathbf{v}|^2)$$

TEOREMA DEL TRIANGOLO INSCRITTO IN UN SEMICERCHIO

Dimostrare, utilizzando il prodotto scalare, il seguente teorema:

Se un triangolo inscritto in una circonferenza ha un diametro come lato, allora il triangolo è rettangolo e quel lato è l'ipotenusa.



Sia O il centro della circonferenza. Poniamo $\mathbf{OB}=\mathbf{u}$ e $\mathbf{OC}=\mathbf{v}$. Questi vettori, essendo rappresentati dai raggi della medesima circonferenza, hanno lo stesso modulo; inoltre i lati AC e BC del triangolo rappresentano i vettori $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ e $\mathbf{v}-\mathbf{u}$. Per vedere se sono ortogonali basta calcolare il loro prodotto scalare.

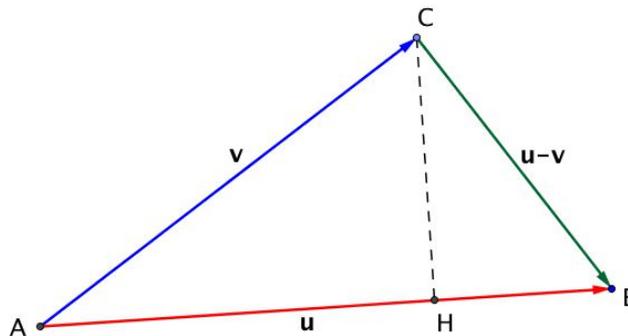
$$(\mathbf{u}+\mathbf{v})\cdot(\mathbf{v}-\mathbf{u})=|\mathbf{v}|^2-|\mathbf{u}|^2=0$$

PRIMO TEOREMA DI EUCLIDE

Dimostrare, utilizzando il prodotto scalare, il Primo Teorema di Euclide:

In un triangolo rettangolo il quadrato su un cateto è equivalente al rettangolo che ha per lati la proiezione ortogonale di quel cateto sull'ipotenusa e l'ipotenusa stessa.

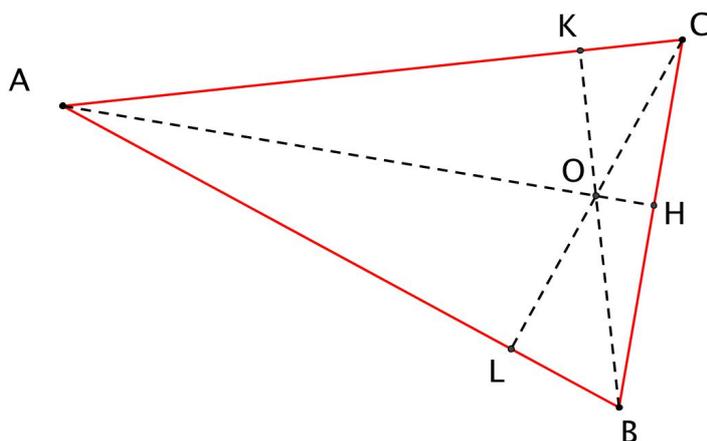
Questo teorema non viene enunciato esplicitamente da Euclide ma viene utilizzato per dimostrare il teorema di Pitagora, che risulta facilmente da questo enunciato.



Ponendo, come nella figura, $\mathbf{AB}=\mathbf{u}$ e $\mathbf{AC}=\mathbf{v}$, il secondo cateto del triangolo rettangolo rappresenta il vettore $\mathbf{u}-\mathbf{v}$. Sapendo che il triangolo è rettangolo e interpretando il prodotto scalare di \mathbf{u} e \mathbf{v} in termini di proiezione ortogonale, abbiamo:

$$0 = \mathbf{v}\cdot(\mathbf{u}-\mathbf{v}) = \mathbf{v}\cdot\mathbf{u} - \mathbf{v}\cdot\mathbf{v} = \text{AH}\cdot|\mathbf{u}| - |\mathbf{v}|^2 = \text{AH}\cdot\text{AB} - \text{AC}^2$$

Dimostrare, utilizzando il prodotto scalare, che le tre altezze di un triangolo qualunque si incontrano in un punto, detto *ortocentro* del triangolo.



Innanzitutto facciamo vedere che nel piano due vettori non nulli $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ che siano rispettivamente ortogonali ad altri due vettori $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ linearmente indipendenti sono a loro volta linearmente indipendenti; da tale proprietà seguirà che ogni coppia di altezze di un triangolo si incontra in un punto. Sia, infatti, $\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{v}_1 = 0$, $\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{v}_2 = 0$ e supponiamo che $x\mathbf{v}_1 + y\mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$; da ciò segue che $x(\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{v}_1) = \mathbf{0}$. Se fosse $\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{v}_1 = 0$, i vettori del piano $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ sarebbero linearmente dipendenti, contro l'ipotesi, quindi $x=0$. Analogamente si deduce che $y=0$ e la tesi è dimostrata.

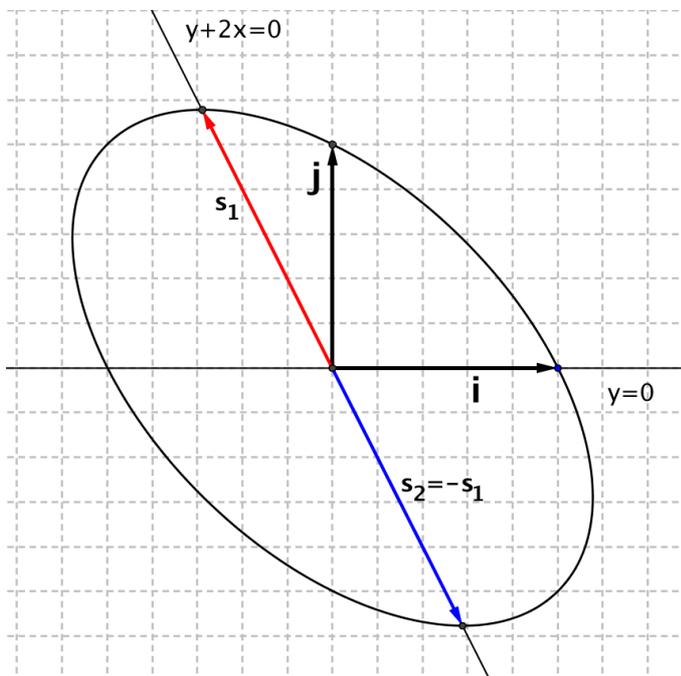
Sia dunque O il punto di intersezione di due qualunque altezze del triangolo ABC, ad esempio di quelle relative ai lati BC e AC: nel linguaggio dei vettori questo si esprime come $\mathbf{OA} \cdot \mathbf{BC} = 0$, $\mathbf{OB} \cdot \mathbf{AC} = 0$. Dobbiamo dimostrare che anche la terza altezza passa per O, ovvero che $\mathbf{OC} \cdot \mathbf{AB} = 0$. Questo si può provare per via puramente algebrica tramite la seguente catena di uguaglianze:

$$\begin{aligned} \mathbf{OC} \cdot \mathbf{AB} &= (\mathbf{OA} + \mathbf{AC}) \cdot (\mathbf{AC} + \mathbf{CB}) = \mathbf{OA} \cdot \mathbf{AC} + \mathbf{OA} \cdot \mathbf{CB} + \mathbf{AC} \cdot \mathbf{AC} + \mathbf{AC} \cdot \mathbf{CB} = \\ &= \mathbf{OA} \cdot \mathbf{AC} + \mathbf{AC} \cdot \mathbf{AC} + \mathbf{AC} \cdot \mathbf{CB} = \mathbf{AC} \cdot (\mathbf{OA} + \mathbf{AC} + \mathbf{CB}) = \mathbf{AC} \cdot \mathbf{OB} = 0 \end{aligned}$$

Siano $\mathbf{u} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$, $\mathbf{u}_1 = x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j}$, $\mathbf{u}_2 = x_2\mathbf{i} + y_2\mathbf{j}$ vettori generici del piano e sia $\mathbf{u}_1 * \mathbf{u}_2$ il prodotto scalare con associata la forma quadratica $\bar{q}(\mathbf{u}) = x^2 + y^2 + xy$.

Data la retta r di equazione $y=0$, determinare l'equazione della retta s passante per l'origine ed avente direzione ortogonale a quella di r rispetto al prodotto scalare $*$ e calcolare le coordinate di un versore \mathbf{s} della direzione di s secondo la metrica indotta da \bar{q} : $[\mathbf{s}] = \sqrt{\bar{q}(\mathbf{s})} = 1$.

Rappresentare graficamente la situazione.



La direzione della retta r è individuata dal vettore \mathbf{i} . Un vettore $\mathbf{u} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ definisce la direzione ortogonale ad r rispetto al prodotto scalare $*$ se e solo se $1 \cdot x + 0 \cdot y + \frac{1}{2}(1 \cdot y + 0 \cdot x) = 0$, da cui segue che la retta s ha equazione $y+2x=0$. Un generico vettore nella direzione di s è dunque del tipo $x(\mathbf{i} - 2\mathbf{j})$ per ogni scalare x ; perché esso sia un versore rispetto alla metrica indotta da \bar{q} deve risultare $x^2 + (-2x)^2 + x(-2x) = 3x^2 = 1$, da cui segue che $x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$, ovvero i due versori della direzione di s sono $\mathbf{s}_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{i} + \frac{2}{\sqrt{3}}\mathbf{j}$, $\mathbf{s}_2 = -\mathbf{s}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{i} - \frac{2}{\sqrt{3}}\mathbf{j}$.