I numeri figurati

Maurizio Castellan agosto 2016

1. INTRODUZIONE

Lo studio della matematica inizia generalmente con i numeri naturali [1]:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, …

Visti dal di fuori sembrano tutti uguali, ma bastano già poche osservazioni per scoprire delle differenze.

Alcune sono più evidenti, altre più nascoste. Per esempio:

- i numeri 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16 sono pari;
- i numeri 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24 sono multipli di 3;
- i numeri 18, 15, 74 divisi per 7 danno resto 4

Lo studio dei numeri naturali e delle loro proprietà prende il nome di "teoria dei numeri".

Il matematico, un po' come fa un chimico che analizza un campione nel suo laboratorio, è in grado di penetrare all'interno del numero e scoprire "come è fatto"; ma analogamente allo scienziato che usa nel suo lavoro diversi strumenti e varie tecniche di indagine, anche lo studioso dei numeri deve attrezzarsi in maniera specifica.

Vedremo come possa essere utile allo scopo dare "visibilità" ai numeri attraverso opportune rappresentazioni grafiche.

2. NUMERI COME FIGURE

2.1 Numeri e punti

I numeri nascono per contare gli oggetti, in un modo molto semplice e intuitivo possiamo quindi pensarli come insiemi di punti. Proviamo dunque a rappresentare ogni numero mediante delle figure, contenenti tanti punti quanti ne indica il numero stesso.

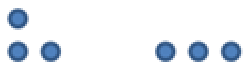
[1] Per il momento non conviene introdurre lo zero. In seguito ogni volta che useremo il termine numero intenderemo numero naturale non nullo.

LABORATORIO 2.1 – tavola 1

Attività
Rappresenta in vario modo i numeri 3, 7, 12, 10, attraverso figure formate da punti.

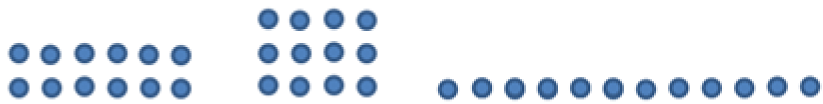
Domande
Quali figure ti sembrano più interessanti ? Per quali motivi ?

Esempi:

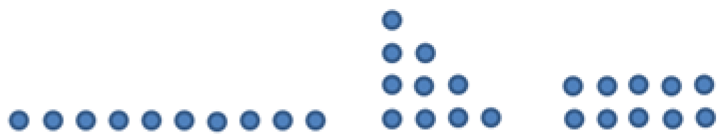


3

7



12



10

Come possiamo osservare lo stesso numero può essere associato a differenti figure. Come vedremo queste hanno a che fare con le varie proprietà del numero [2], ad esempio il 12 è pari ma è anche multiplo di 3.

Questo modo di rappresentare i numeri nasce nella matematica antica, è attribuito infatti a Pitagora e alla sua scuola [1]

Si parla in questo caso di “numeri figurati” o anche di “aritmogeometria” [2] .

Esercizi

2.1.1 Rappresenta i numeri da 1 a 15 utilizzando <u>al massimo tre</u> righe di punti.

2.1.2 Rappresenta i numeri da 10 a 20 utilizzando ogni volta <u>il più piccolo</u> numero di righe e di colonne.

---

[2] Va sottolineato che quindi non esiste un’unica figura del numero, ma che alcune, grazie alla loro regolarità, lo caratterizzano meglio di altre.

2.2 Numeri pari e dispari figurati

Abbiamo visto che ogni numero può essere rappresentato con diverse figure. Se però vogliamo evidenziare il suo essere pari o dispari conviene rappresentare i numeri in modo opportuno.

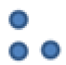
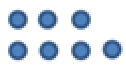
LABORATORIO 2.2 – tavola 2

Attività
Rappresenta, con figure formati da punti i tre numeri pari 2, 6, 8 e i tre numeri dispari 3, 7, 9.

Domande
Qual è la figura che descrive meglio l'essere "pari" ?
Qual è la figura che descrive meglio l'essere "dispari" ?

Proviamo a rappresentare i numeri utilizzando solo due righe di punti:

FIGURA	NUMERO PARI
	2
	6
	8

FIGURA	NUMERO DISPARI
	3
	7
	9

Immaginando di fare così per tutti i numeri, possiamo riassumere i risultati nel seguente modo:

FIGURA	NUMERO
Due righe uguali di punti	Pari
Due righe di punti che differiscono per un solo punto	Dispari

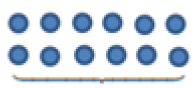
Può essere conveniente indicare i numeri pari e i numeri dispari nel seguente modo:

P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
2	4	6	8	10	12

D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	D_6
1	3	5	7	9	11

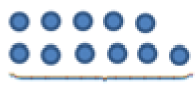
Abbiamo così “ordinato” i numeri pari e i numeri dispari (es. 6 è il terzo numero pari, 9 è il quinto numero dispari, e così via).

Si noti che gli indici in basso indicano anche il numero di colonne della figura (nel caso dei numeri dispari l’ultima colonna è formata da un solo punto), per esempio:



6 COLONNE

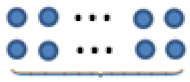
P_6
12



6 COLONNE

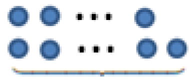
D_6
11

Rappresentiamo infine un numero pari o un numero dispari generici nel seguente modo:



P_n

n COLONNE



D_n

n COLONNE

I "puntini sospensivi" centrali e la lettera n, indicano che il numero delle colonne della figura non è fissato; dunque i numeri sono da considerare generici.

Indicato con P_n un numero pari generico, P_{n+1} indica il numero pari successivo (con n+1 colonne), P_{n-1} indica il numero pari precedente (con n - 1 colonne), P_{n+2} indica il numero pari di due posti più avanti (con n+2 colonne) e così via; e analogamente per i numeri dispari.

Se vogliamo indicare due numeri pari o dispari generici non necessariamente uguali dobbiamo usare lettere diverse. Esempio: P_m e P_n indicano due numeri pari generici.

Un'osservazione finale: la scelta di figure formate da due sole righe è arbitraria, si poteva in alternativa optare in maniera del tutto equivalente per figure contenenti solo due colonne.

Esercizi

2.2.1 Dimostra utilizzando i numeri figurati che ogni numero pari si può scrivere come somma di due numeri uguali.

2.2.2 Dimostra utilizzando i numeri figurati che ogni numero dispari si può scrivere come somma di un numero pari e 1.

2.2.3 Completa le seguenti scritture: $P_{....} = 8$, $P_{....} = 24$, $P_{....} = 82$

2.2.4 Completa le seguenti scritture: $D_{....} = 7$, $D_{....} = 51$, $D_{....} = 33$

2.2.5 Completa la seguente scrittura: $P_n - 1 = ...$

2.2.6 Completa la seguente scrittura: $D_n + 1 = ...$

2.3 Le regole della somma dei numeri pari e dei numeri dispari

E’ noto che i numeri pari e i numeri dispari si sommano rispettando le seguenti regole

PARI + PARI = PARI

PARI + DISPARI = DISPARI

DISPARI + DISPARI = PARI

Proviamo a verificarle attraverso le figure di alcuni numeri pari e alcuni numeri dispari.

LABORATORIO 2.3 – tavola 3

Attività

Rappresenta in modo opportuno:

- la somma del numero pari 4 e del numero pari 6,
- la somma del numero pari 6 e del numero dispari 5,
- la somma del numero dispari 7 e del numero dispari 5,

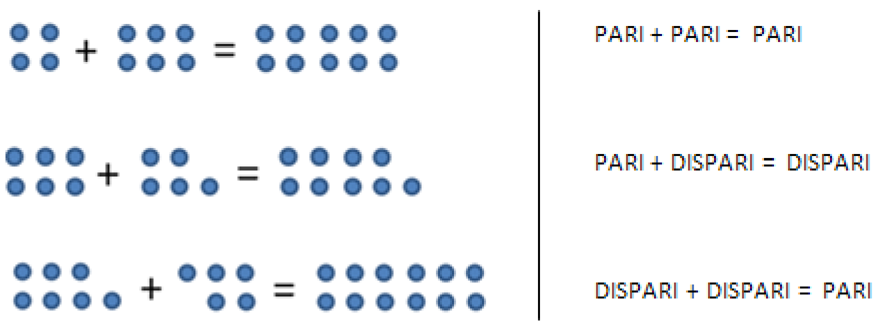
per mostrare, con le figure, le regole della somma dei numeri pari e dei numeri dispari.

Domande

Cosa si completa la seguente scrittura: $P_4 + P_6 = \ldots$?

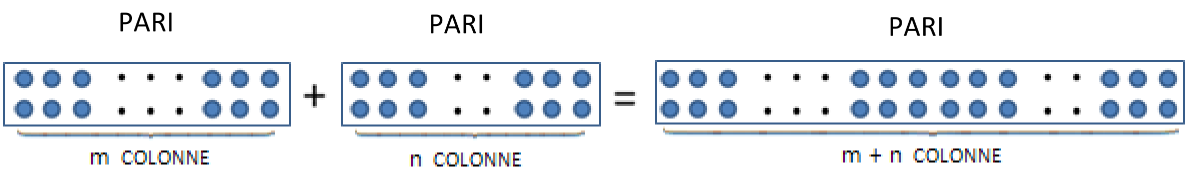
Cosa si completa la seguente scrittura: $P_6 + D_5 = \ldots$?

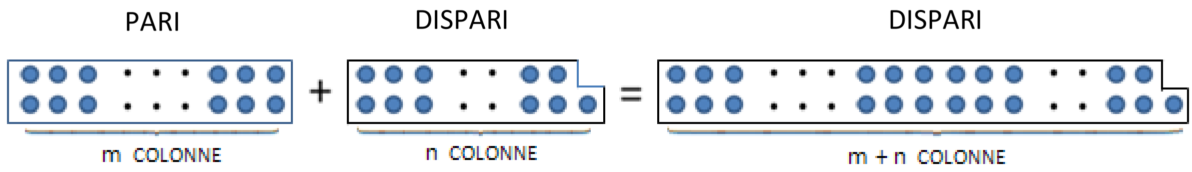
Cosa si completa la seguente scrittura: $D_7 + D_{15} = \ldots$?

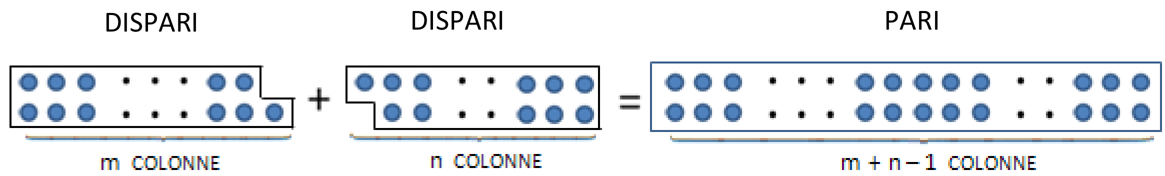


Grazie alle figure si vede “bene” che le regole valgono per i numeri scelti, tuttavia ciò non ci autorizza ad affermare che esse valgano per tutti i numeri pari e per tutti i numeri dispari.

Se vogliamo “dimostrare” le regole occorre considerare numeri “generici” . Dobbiamo cioè procedere nel seguente modo:







Osserviamo che i tre schemi si possono così sintetizzare:

$$P_m + P_n = P_{m+n}$$

$$P_m + D_n = D_{m+n}$$

$$D_m + D_n = P_{m+n-1}$$

Esempi:

$P_4 + P_6 = P_{4+6} = P_{10}$

$P_6 + D_5 = D_{6+5} = D_{11}$

$D_7 + D_{15} = P_{7+15-1} = P_{21}$

Esercizi

2.3.1 Completa la seguente scrittura: $P_4 + 8 = P_{\dots}$

2.3.2 Completa la seguente scrittura: $P_3 + 7 = D_{\dots}$

2.3.3 Completa la seguente scrittura: $D_{1000} + D_{1001} = \ldots\ldots_{\ldots}$

2.3.4 Completa la seguente scrittura: $P_n + P_n = \ldots\ldots_{\ldots}$

2.3.5 Completa la seguente scrittura: $D_n + D_n = \ldots\ldots_{\ldots}$

2.3.4 Completa la seguente scrittura: $P_n + n + n = P_{\ldots}$

2.3.5 Completa la seguente scrittura: $D_n + n + n = \ldots\ldots_{\ldots}$

Attività libera

Sperimenta, congettura, dimostra.

2.4 Numeri rettangolari

Ci occupiamo ora della rappresentazione dei numeri come rettangoli e delle proprietà che in questo modo vengono evidenziate. Vedremo che tornerà utile considerare come rettangoli anche le figure formate da una sola riga o da una sola colonna.

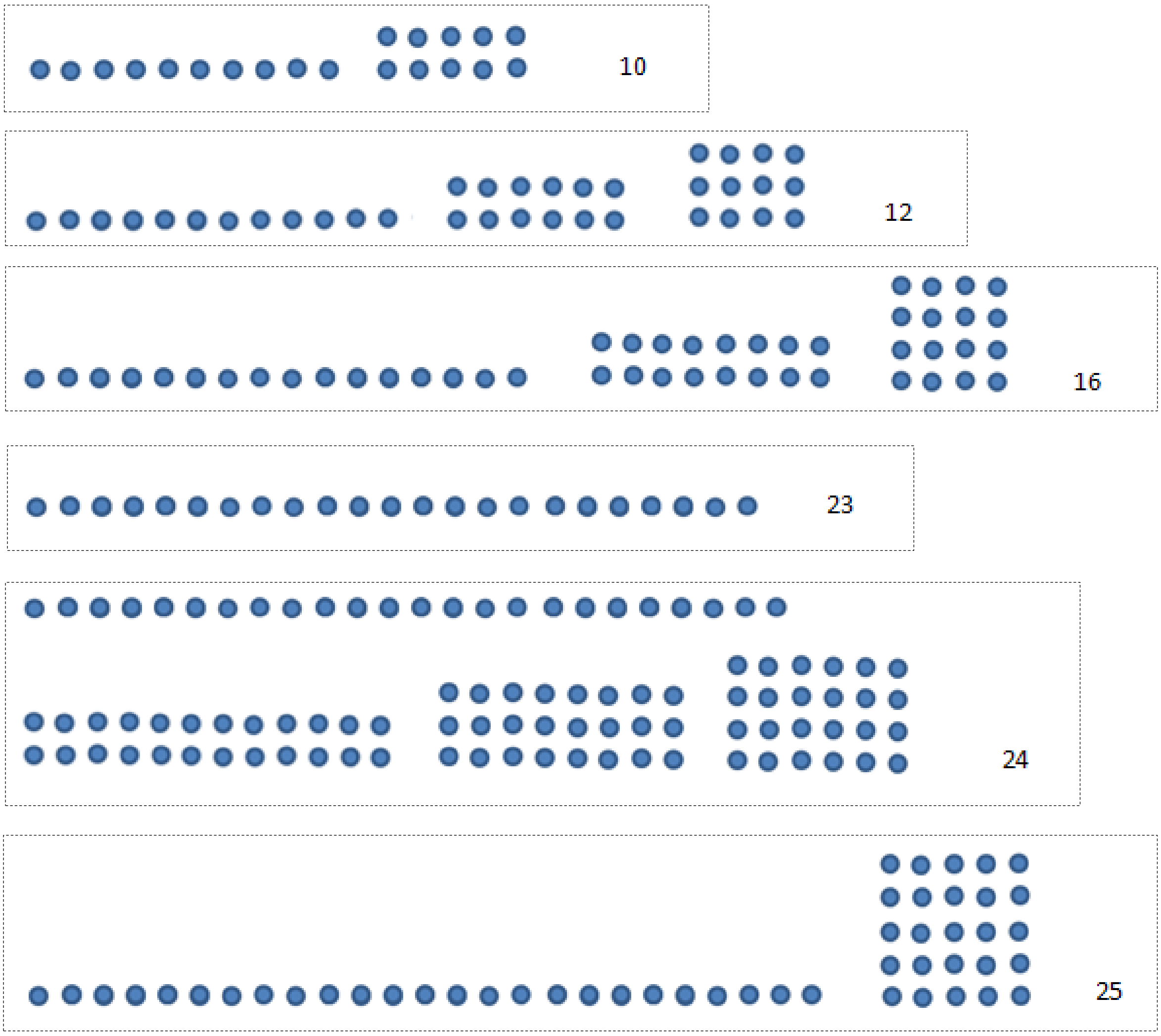
LABORATORIO 2.4 – tavola 4

Attività

Rappresenta con dei rettangoli in tutti i modi possibili (anche quelli formati da una sola riga o da una sola colonna), i numeri 10, 12, 16, 23, 24, 25.

Domande

Quali numeri si possono rappresentare con il maggior numero di rettangoli ?
Quali numeri si possono rappresentare con rettangoli aventi due righe (o due colonne) ? Che cosa hanno di particolare questi numeri ?
Quale numeri si possono rappresentare con un quadrato ? Che cosa hanno di particolare questi numeri ?
Quali numeri si possono rappresentare con il minor numero di rettangoli ?
Quali numeri si possono rappresentare con due soli rettangoli ? Che cosa hanno di particolare questi numeri ?
Ci sono numeri che non possono essere rappresentati con dei rettangoli ?



Come si vede la rappresentazione tramite rettangoli ha a che fare con la scomposizione del numero in due fattori e quindi con i divisori dei numeri.

In altre parole se il numero "a" si può scomporre come: $a = b \times c$, allora sarà rappresentato da un rettangolo di punti formato da "b" righe e "c" colonne e (essendo $b \times c = c \times b$) da un rettangolo formato da "c" righe e "b" colonne [3].

In particolare si nota che:

- il 24 si può rappresentare mediante il maggior numero di rettangoli, essendo quello con il maggior numero di divisori: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24;
- si possono rappresentare con rettangoli formati da due righe (o da due colonne), il 10, il 12 e il 16; come abbiamo visto (crf 2.2) questa è una proprietà dei numeri pari, cioè i numeri che ammettono 2 come divisore;

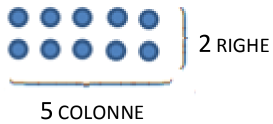
[3] Negli schemi si è deciso di riportare, per semplicità, solamente quello con il numero di righe minore o uguale al numero delle colonne.

- si possono rappresentare con dei quadrati, il 16 e il 25, che sono appunto dei quadrati perfetti: $16 = 4^2$, $25 = 5^2$;
- il numero che si può rappresentare con il minimo numero di rettangoli, cioè una sola riga di punti (o una sola colonna) , è il 23, che come tutti i numeri primi[4] può essere scomposto in due fattori solo nel seguente modo: $23 = 1 \times 23 = 23 \times 1$.

Osserviamo infine che, avendo ammesso anche rettangoli formati da una sola riga, <u>tutti i numeri sono rettangolari</u>.

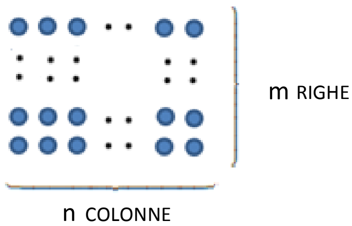
Indicheremo un numero nella sua forma rettangolare con il simbolo R , aggiungendo in basso due indici che stanno ad indicare il numero delle righe e quello delle colonne. Esempio:

$10 = 2 \times 5 = R_{2,5}$



Mentre indicheremo un numero rettangolare generico con il simbolo $R_{m,n}$:

$R_{m,n}$



Esercizi

2.4.1 Trova tutti i numeri minori di 30 che si possono rappresentare con un quadrato.

2.4.2 Trova tutti i numeri minori di 30 che si possono rappresentare con un rettangolo con tre righe (o tre colonne). Che cosa hanno in comune questi numeri ?

2.4.3 Mostra tramite le figure che il numero $R_{3,8}$ è pari, $R_{4,6}$ è pari, $R_{3,5}$ è dispari.

---

[4] I pitagorici, non a caso, chiamavano i numeri primi: “numeri lineari”.

2.4.4 Dimostra in generale, tramite le figure, le regole del prodotto dei numeri pari e dei numeri dispari:

PARI × PARI = PARI
PARI × DISPARI = PARI
DISPARI × DISPARI = DISPARI

2.4.5 Completa le seguenti relazioni:

$$P_3 \times P_4 = P_{...}$$

$$P_5 \times D_2 = P_{...}$$

$$D_6 \times D_7 = D_{...}$$

2.4.6 Completa la seguente relazione:

$$P_m \times P_n = P_{...}$$

2.4.7 Stabilisci la verità o la falsità delle seguenti affermazioni, giustificando le risposte:

- se $m < p$ e $n < q$ allora $R_{m,n} < R_{p,q}$
- se $R_{m,n} < R_{p,q}$ allora $m < p$ e $n < q$

Attività libera

Sperimenta, congettura, dimostra.

2.5 La proprietà distributiva figurata

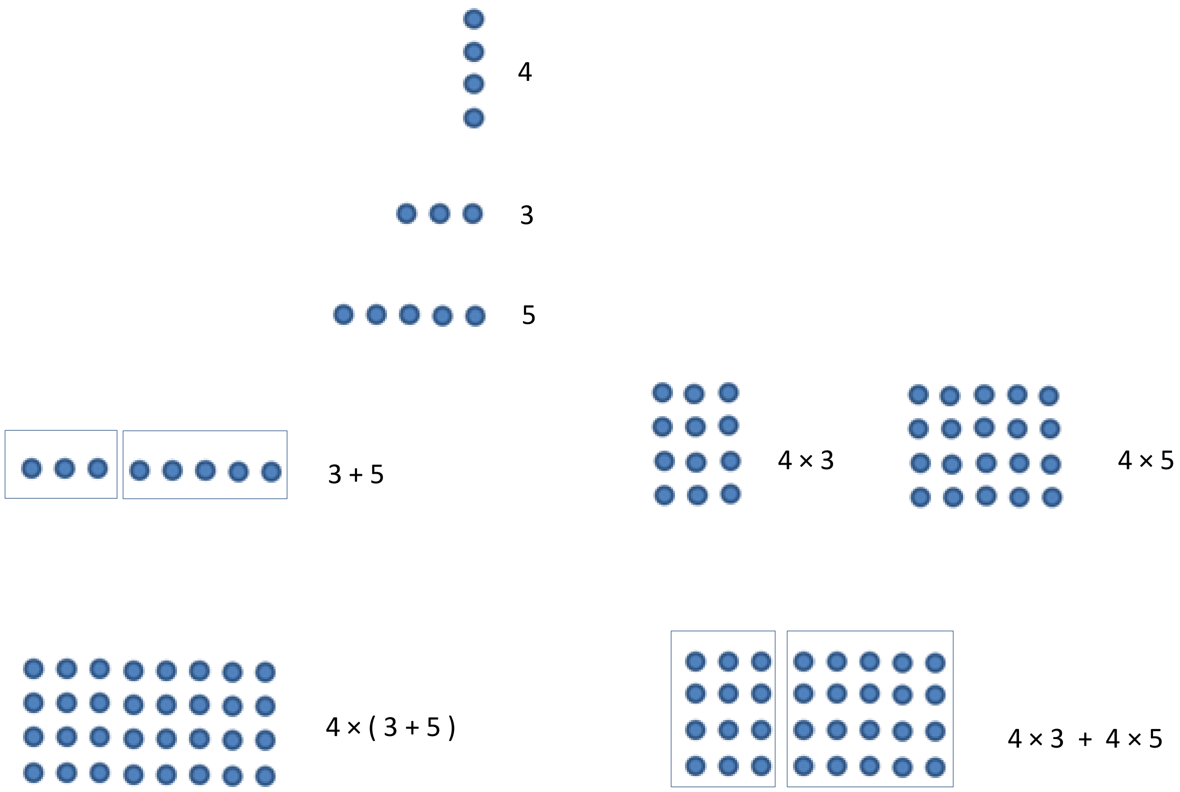
Le operazioni di somma e di prodotto tra numeri obbediscono alla proprietà distributiva. Ad esempio dati i numeri 4, 3, 5 si ha: $4 \times (3 + 5) = 4 \times 3 + 4 \times 5$

La moltiplicazione per 4 si "distribuisce" (da cui il nome) sui numeri 3 e 5. Proveremo a studiare questa importante proprietà rappresentando i numeri con le figure rettangolari.

LABORATORIO 2.5 – tavola 5

Attività
Verifica utilizzando in modo opportuno le figure rettangolari, la proprietà distributiva applicata ai numeri 4, 3, 5.

Domande
Puoi descrivere a parole in che modo hai rappresentato:
il numero 4 ,
il numero 3 ,
il numero 5 ,
la somma $3 + 5$,
il prodotto 4×3 ,
il prodotto 4×5 ,
il prodotto $4 \times (3 + 5)$,
la somma $4 \times 3 + 4 \times 5$?



Come si vede i due rettangoli finali, che rappresentano le due quantità a destra e a sinistra dell’uguaglianza da verificare, sono uguali.

Utilizzando i simboli dei numeri rettangolari, possiamo anche scrivere:

$$R_{4,\,3+5} = R_{4,3} + R_{4,5}$$

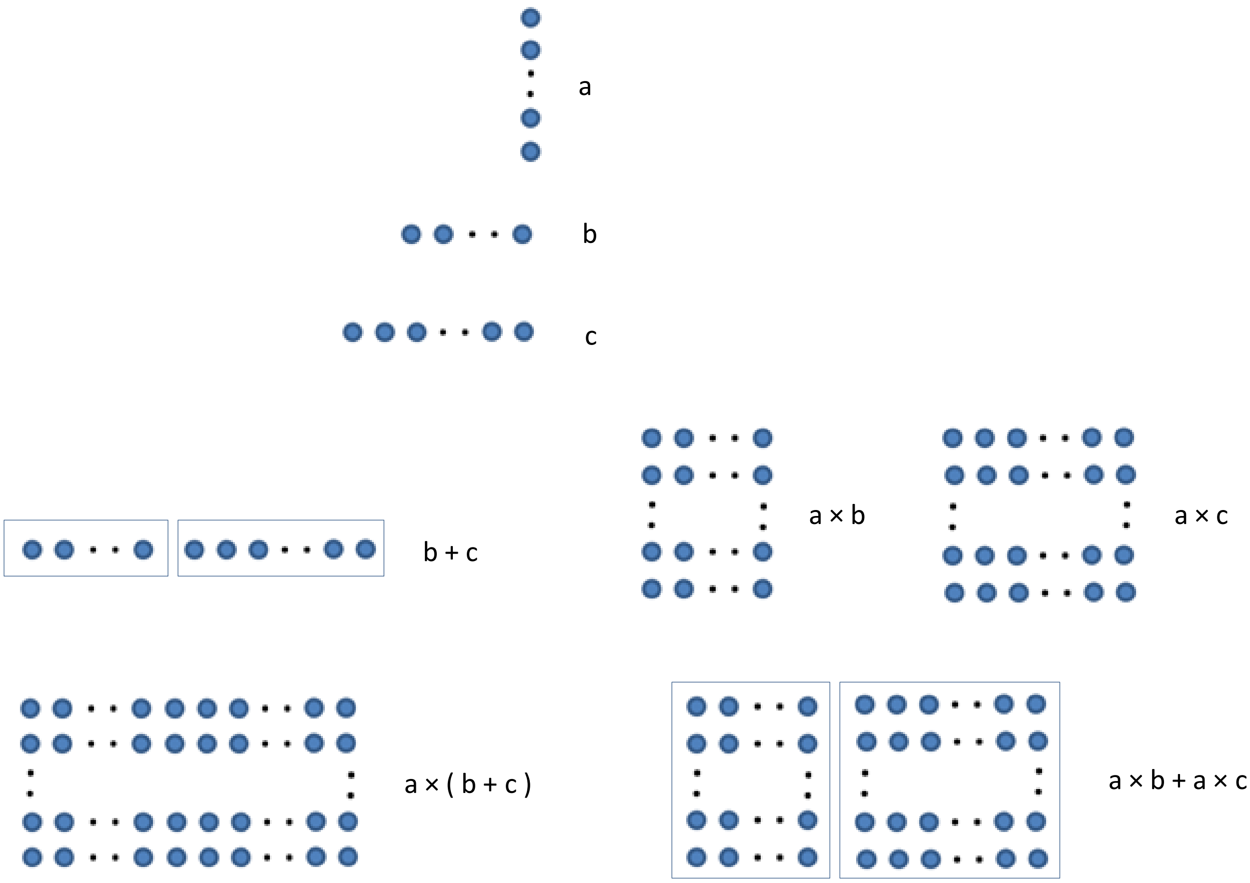
Se ora volessimo dimostrare la proprietà distributiva, anche in questo caso, dovremmo usare figure generiche.

Questo può essere fatto nel seguente modo.

Indicati con a, b, c tre numeri generici dobbiamo dimostrare che:

$$a \times (b + c) = a \times b + a \times c$$

quindi (utilizzando figure generiche)



Possiamo sintetizzare la proprietà distributiva con i simboli dei numeri rettangolari nel seguente modo:

$$R_{a,b+c} = R_{a,b} + R_{a,c}$$

Esercizi

2.5.1 Rappresenta la proprietà commutativa del prodotto: $a \times b = b \times a$, completando la scrittura: $R_{a,b} = R_{\ldots,\ldots}$

2.5.2 Completa la seguente scrittura: $R_{5,7} = R_{3,7} + R_{\ldots,\ldots}$

2.5.3 Completa la seguente scrittura: $R_{4,7} = 2 \times R_{\ldots,\ldots}$

2.5.4 Completa la seguente scrittura: $R_{3,9} - R_{3,4} = R_{\ldots,\ldots}$

2.5.5 Completa la seguente scrittura sapendo che b è maggiore di c: $R_{a,b} - R_{a,c} = R_{\ldots,\ldots}$

2.5.6 Completa la seguente scrittura: $R_{3,5} + 5 = R_{\ldots,\ldots}$.

2.5.7 Completa la seguente scrittura: $R_{4,7} + 14 = R_{\ldots,\ldots}$.

2.5.8 Completa la seguente scrittura: $R_{m,n} + m = R_{\ldots,\ldots}$.

2.5.9 Completa la seguente relazione: $R_{5,10} - R_{2,4} = R_{\ldots,\ldots} + R_{\ldots,\ldots} + R_{\ldots,\ldots}$

2.5.10 Completa la seguente relazione: $R_{8,10} = R_{3,\ldots} + R_{\ldots,6} + R_{\ldots,\ldots} + R_{\ldots,\ldots}$

2.5.11 Completa e dimostra la seguente relazione: $R_{a+b,c+d} = R_{\ldots,\ldots} + R_{\ldots,\ldots} + R_{\ldots,\ldots} + R_{\ldots,\ldots}$

Attività libera

Sperimenta, congettura, dimostra.

2.6 I numeri quadrati

Tutti i numeri sono rettangolari, ma non tutti possono essere rappresentati come quadrati, come il 16 e il 25. Questi numeri prendono il nome di numeri "quadrati" e come abbiamo visto coincidono con i quadrati perfetti: 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, …

E' conveniente indicare e ordinare i numeri quadrati nel seguente modo:

dove Q_n indica il numero quadrato di posto generico n.

Notiamo che l'indice in basso che indica il posto, corrisponde anche al numero di righe e di colonne di punti presenti nel quadrato (es. nella figura di Q_4 ci sono 4 righe e 4 colonne).
Ovviamente ogni numero quadrato è anche rettangolare, e si ha:

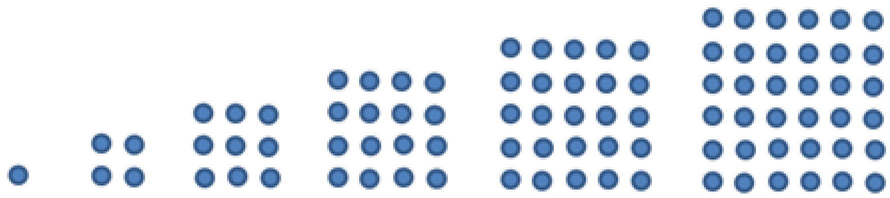
$$Q_1 = R_{1,1} \quad , \quad Q_2 = R_{2,2} \quad , \quad Q_3 = R_{3,3} \quad , \quad \dots \quad , \quad Q_n = R_{n,n} \quad , \quad \dots$$

Studieremo ora alcune proprietà dei numeri quadrati utilizzandone la figura.

LABORATORIO 2.6 – tavola 6

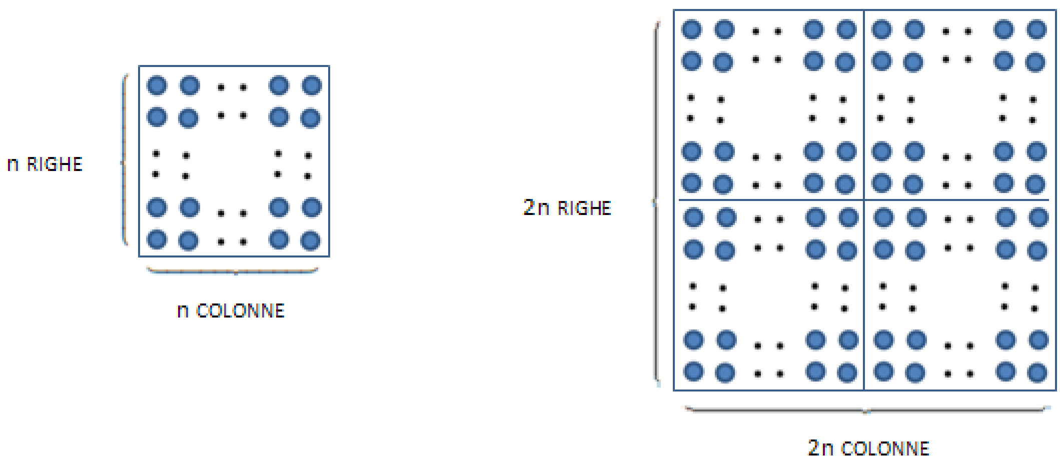
Attività
Completa l'elenco dei numeri quadrati da Q_1 fino a Q_6 .

Domande
Il quadruplo di un numero quadrato è ancora un numero quadrato ? Come puoi provarlo ?
Quale numero rettangolare è uguale a $Q_6 - 1$? Puoi provarlo con le figure ?
Quale numero rettangolare è uguale a $Q_n - 1$?

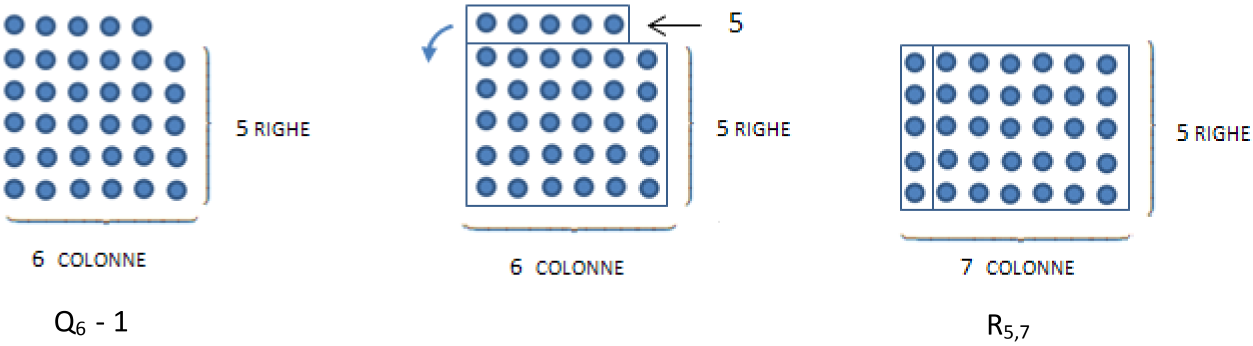


Q_1	Q_2	Q_3	Q_4	Q_5	Q_6
1	4	9	16	25	36

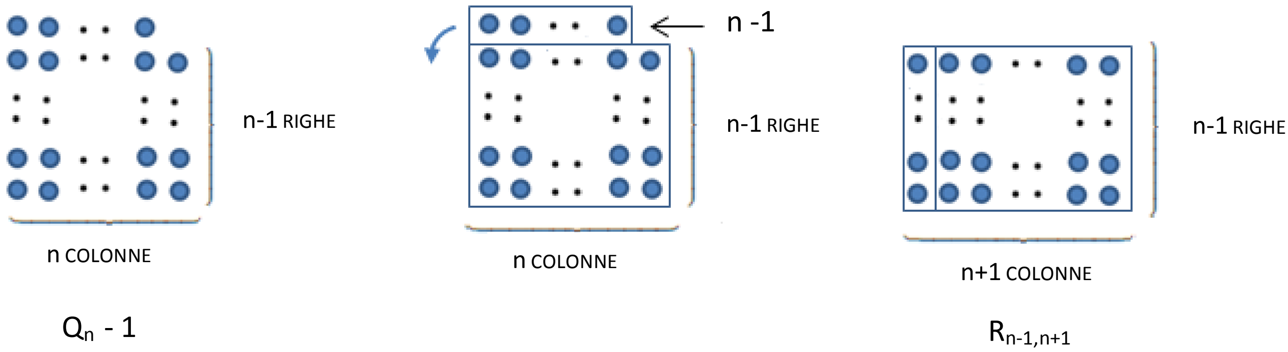
Dato il numero quadrato generico Q_n si ha: $4 \times Q_n = Q_{2n}$, infatti:



Se al quadrato Q_6 togliamo 1 otteniamo il numero rettangolare $R_{5,7}$:



In generale se al numero quadrato Q_n togliamo 1 otteniamo il numero rettangolare $R_{n-1,n+1}$, infatti:



Esercizi

2.6.1 Dimostra che se n è pari il numero quadrato Q_n è pari.

2.6.2 Dimostra che se n è dispari il numero quadrato Q_n è dispari.

2.6.3 Dimostra che $Q_{m+n} = Q_m + 2 \times R_{m,n} + Q_n$.

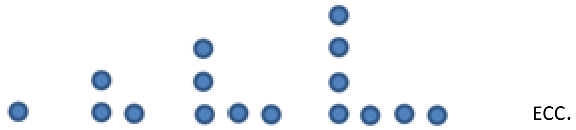
2.6.4 Dimostra che, se m è maggiore di n, $Q_m - Q_n = R_{m+n,m-n}$.

Attività libera

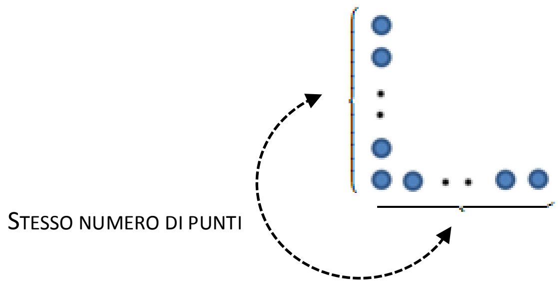
Sperimenta, congettura, dimostra

2.7 Gli gnomoni

Chiameremo gnomoni[5] i numeri che possono essere rappresentati nel seguente modo:



Un generico gnomone ha quindi la seguente figura:



Anche qui è conveniente indicare e ordinare gli gnomoni nel seguente modo:

dove G_n indica lo gnomone di posto generico n ; osserviamo che l'indice in basso è pari al numero di punti che si trovano nella riga e nella colonna dello gnomone (G_1 ha 1 punto sulla riga e 1 punto sulla colonna, G_2 ne ha 2, G_3 ne ha 3, G_4 ne ha 4, …. , G_n ne ha n, ….)

[5] Il nome richiama appunto la forma dello gnomone della meridiana, formato da un'asta verticale conficcata nella terra e dalla sua ombra.

LABORATORIO 2.7 – tavola 7

Attività
Completa l'elenco degli gnomoni da G_1 fino a G_{10} .

Domande
Il 162 è uno gnomone? Nel caso lo fosse, qual è il suo numero di posto ?
Qual è la caratteristica principale degli gnomoni ?
Il 307 è uno gnomone? Nel caso lo fosse, qual è il suo numero di posto ?
Qual è la caratteristica principale dei numeri $G_n + 1$?

G_1	G_2	G_3	G_4	G_5	G_6	G_7
1	3	5	7	9	11	13

G_8	G_9	G_{10}
15	17	19

Come è evidente, si ha:

$G_1 = 1 = D_1$, $G_2 = 3 = D_2$, $G_3 = 5 = D_3$, $G_4 = 7 = D_4$, $G_5 = 9 = D_5$, …

Gli gnomoni sono dunque un modo alternativo di rappresentare i numeri dispari.

Esercizi

2.7.1 Completa la seguente scrittura: $G_7 - 4 = G_{\dots}$.

2.7.2 Completa la seguente scrittura sapendo che m è maggiore di n: $G_m - n - n = G_{\dots}$.

2.7.3 Completa la seguente scrittura: $G_{\dots} - 7 = 8$.

2.7.4 Completa la seguente scrittura: $G_{\dots} - 7 = 8$.

2.7.5 Completa la seguente scrittura: $G_9 - 5 = P_{\dots}$.

2.7.6 Completa la seguente scrittura sapendo che n è maggiore di 3: $G_n - 3 = P_{\dots}$.

2.7.7 Dimostra, utilizzando le figure, che ogni gnomone è un numero dispari.

Attività libera

Sperimenta, congettura, dimostra.

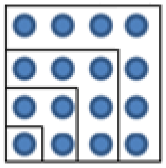
2.8 I numeri quadrati come somma di gnomoni

Possiamo ora occuparci di un'interessante proprietà che lega i numeri quadrati e gli gnomoni.

LABORATORIO 2.8 – tavola 8

Attività
Cerca di costruire il numero quadrato Q_4 utilizzando gnomoni.

Domande
Quale relazione esiste tra numeri quadrati e gnomoni?
Quanti gnomoni occorrono per ottenere il numero quadrato Q_4?
Quanti gnomoni occorrono per ottenere un generico numero quadrato Q_n?



Nella figura è rappresentato il numero quadrato $Q_4 = 16$. Si vede chiaramente che il quadrato è formato dagli gnomoni a partire da G_1 fino allo gnomone G_4 ; vale quindi la relazione:

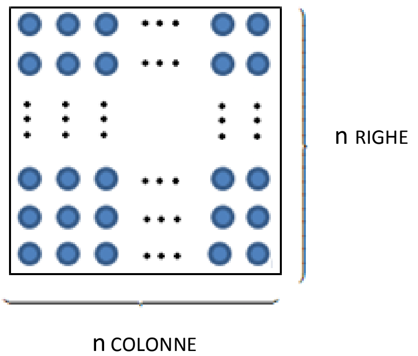
$$Q_7 = G_1 + G_2 + G_3 + G_4$$

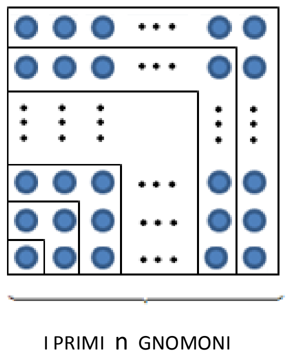
ed siccome gli gnomoni coincidono con i numeri dispari, si ottiene l'interessante relazione:

$$16 = 1 + 3 + 5 + 7$$

Dimostriamo ora che tale risultato vale per tutti i numeri quadrati.

Consideriamo un generico numero quadrato Q_n :





La figura di destra mostra che il quadrato di n righe e di n colonne risulta composto dai primi n gnomoni. Si ha dunque per un qualsiasi numero quadrato Q_n :

$$Q_n = G_1 + G_2 + G_3 + \ \dots \ + G_n = D_1 + D_2 + D_3 + \ \dots \ + D_n$$

Ne segue che il quadrato di un numero n è la somma dei primi n numeri dispari.

Esercizi

2.8.1 Trova una relazione tra il numero quadrato Q_5 , il quadrato Q_6 e lo gnomone G_6 .

2.8.2 Cosa puoi dire in generale per il numero quadrato Q_n e lo gnomone G_{n+1} ?

2.8.3 Trova una figura che rappresenti la differenza: $Q_9 - Q_7$.

2.8.4 Trova una relazione tra la differenza: $Q_9 - Q_7$ e un'opportuna somma di gnomoni.

2.8.5 Cosa puoi dire in generale sulla differenza: $Q_{n+2} - Q_n$?

2.8.6 Dimostra che la differenza: $Q_{n+2} - Q_n$ è sempre un multiplo di 4.

3.8.7 Utilizzando la relazione $Q_n = D_1 + D_2 + D_3 + \ldots + D_n$, dimostra che:

- se n è pari allora Q_n è pari;
- se n è dispari allora Q_n è dispari.

Attività libera

Sperimenta, congettura, dimostra.

2.9 I numeri triangolari

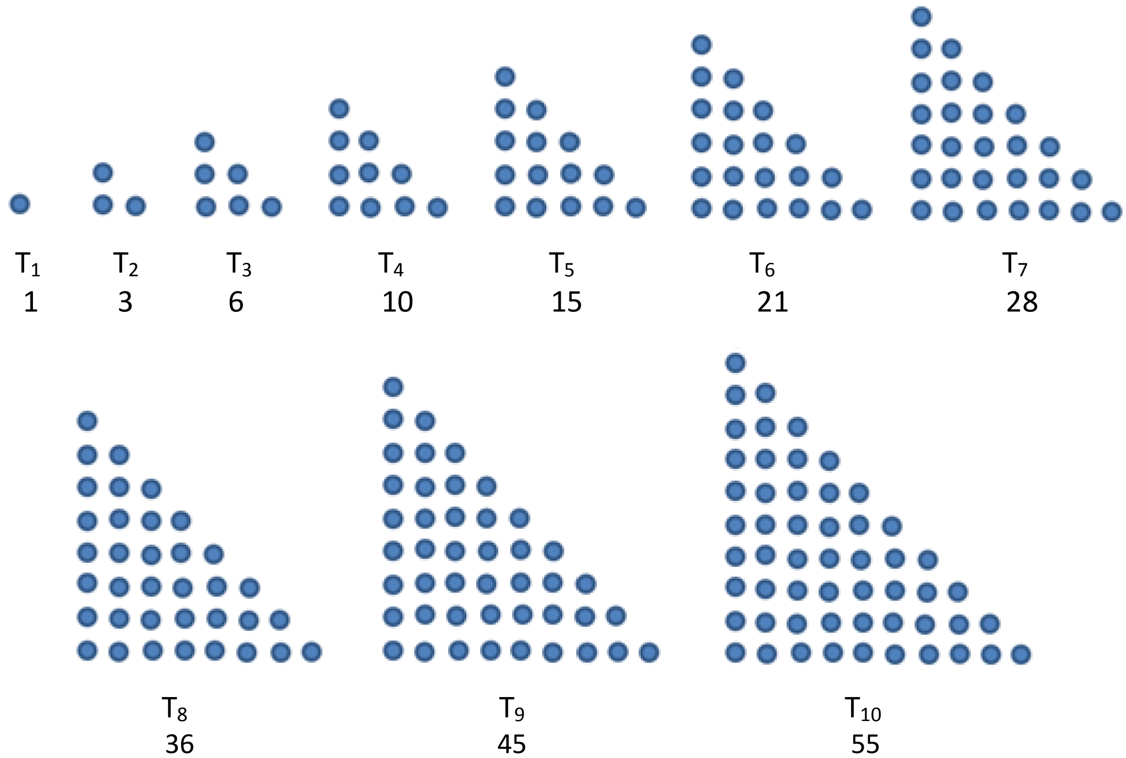
Studiamo ora un'altra importante tipologia di numeri: i numeri "triangolari", cioè i numeri:

Osserviamo che l'indice di posto del numero triangolare, corrisponde al numero di punti della riga più in basso e della colonna più a sinistra.

LABORATORIO 2.9 – tavola 9

Attività
Completa l'elenco dei numeri triangolari da T_1 fino a T_{10} .

Domande
Qual è la caratteristica principale dei numeri triangolari?
Quali tra i numeri triangolari rappresentati sono pari e quali sono dispari? Noti qualche regolarità?
Che relazione c'è tra T_3 e T_4 , tra T_7 e T_8 ? E tra T_n e T_{n+1} ?



I numeri triangolari sono la somma dei primi numeri naturali, più precisamente sono la somma dei primi numeri naturali a partire da 1 fino all’indice del numero triangolare [6]:

$T_1 = 1$

$T_2 = 1 + 2$

$T_3 = 1 + 2 + 3$

$T_4 = 1 + 2 + 3 + 4$

$T_5 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5$

…

$T_n = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \ldots + n$

…

[6] Nella scuola pitagorica occupava un posto di assoluto rilievo per i suoi significati simbolici il numero $T_4 = 10$ noto come “tetraktys“.

Osserviamo che si sviluppano secondo lo schema ciclico: dispari-dispari-pari-pari

$T_1 = 1$ (dispari)

$T_2 = 3$ (dispari)

$T_3 = 6$ (pari)

$T_4 = 10$ (pari)

$T_5 = 15$ (dispari)

$T_6 = 21$ (dispari)

$T_7 = 28$ (pari)

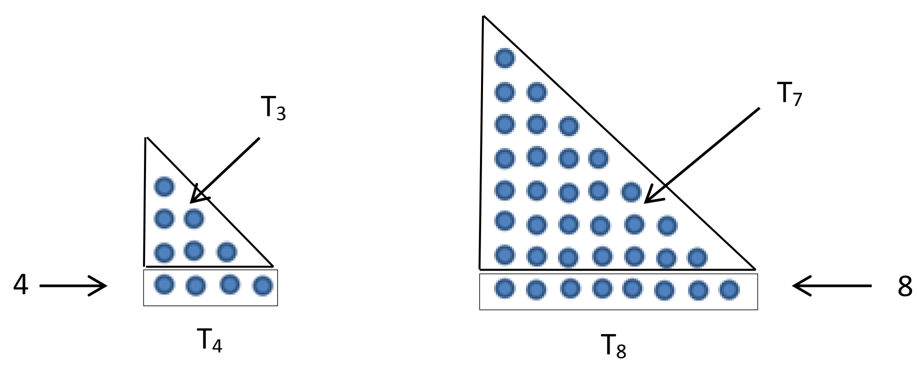
$T_8 = 36$ (pari)

$T_9 = 45$ (dispari)

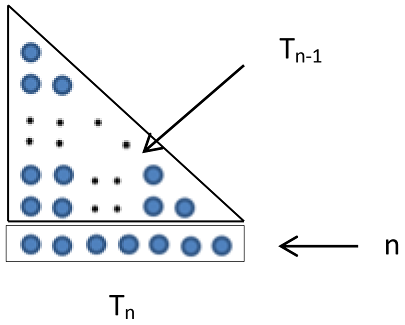
$T_{10} = 55$ (dispari)

…

Si può ottenere T_4 a partire da T_3 , e T_8 a partire da T_7 aggiungendo una nuova riga di punti nel seguente modo:



In generale si ha:



E dunque: $T_n = T_{n-1} + n$

Esercizi

2.9.1 Rappresenta la differenza $T_8 - T_6$. Vedi qualche relazione con altri numeri figurati?

2.9.2 Come puoi esprimere in generale la relazione individuata nell'esercizio precedente?

2.9.3 Rappresenta il numero triangolare T_6 come somma di gnomoni.

2.9.4 Rappresenta il numero triangolare T_7 come somma di gnomoni.

2.9.5 Ripeti gli esercizi precedenti con altri numeri triangolari. Noti qualche regolarità? Descrivila.

2.9.6 Rappresenta la differenza $T_8 - T_5$.

2.9.7 Ripeti l'esercizio precedente con numeri triangolari distanti di tre posti (es: $T_5 - T_2$, $T_6 - T_3$, ..)

2.9.8 Per quale numero sono divisibili i numeri ottenuti nei due esercizi precedenti? Dimostralo.

Attività libera

Sperimenta, congettura, dimostra

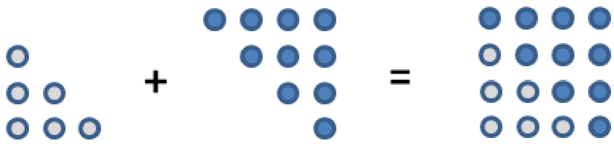
2.10 Numeri triangolari e numeri rettangolari

L'importanza dei numeri triangolari è dovuta al fatto che si relazionano bene con gli altri numeri figurati, ad esempio con i numeri rettangolari.

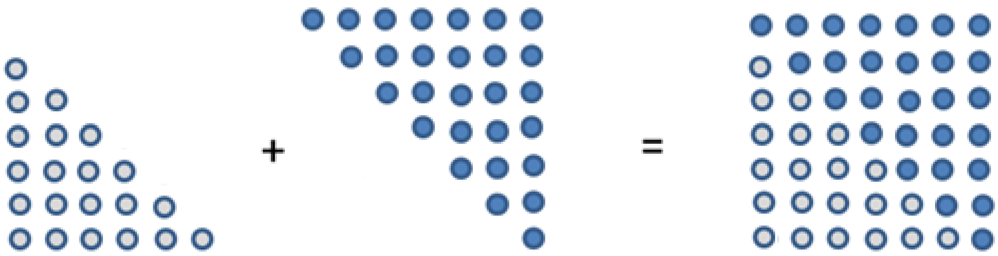
LABORATORIO 2.10 – tavola 10

Attività
Cerca relazioni interessanti tra i numeri triangolari e quelli rettangolari.

Domande
Che figura si ottiene sommando T_3 e T_4 ? E sommando T_6 e T_7 ? E sommando T_n e T_{n+1}?
Che figura si ottiene raddoppiando T_3 , e raddoppiando T_6 ?
Cosa si ottiene in generale raddoppiando T_n ?



T_3 6 $\qquad$ T_4 10 $\qquad$ Q_4 16

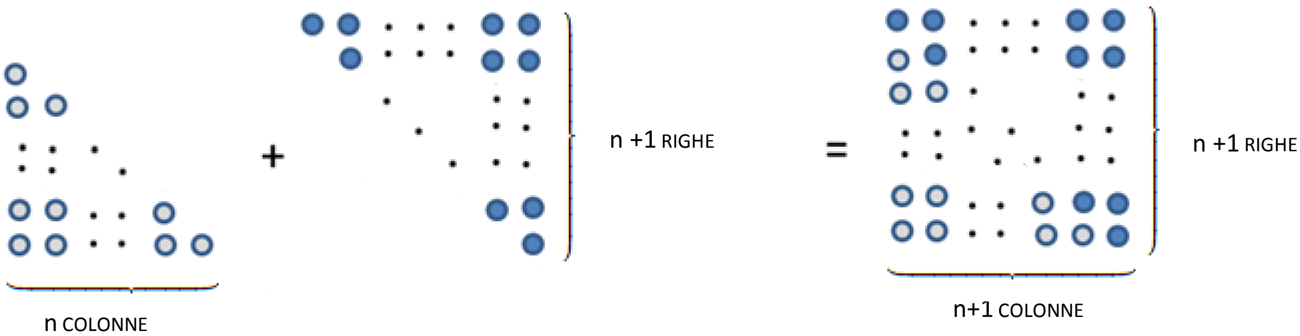


T_6 21 $\qquad$ T_7 28 $\qquad$ Q_7 49

Come si vede nei due esempi sommando tra loro due numeri triangolari consecutivi si ottiene un numero quadrato.

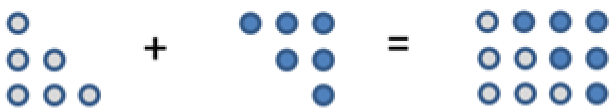
Vale in generale la seguente relazione: $T_n + T_{n+1} = Q_{n+1}$.

Infatti:

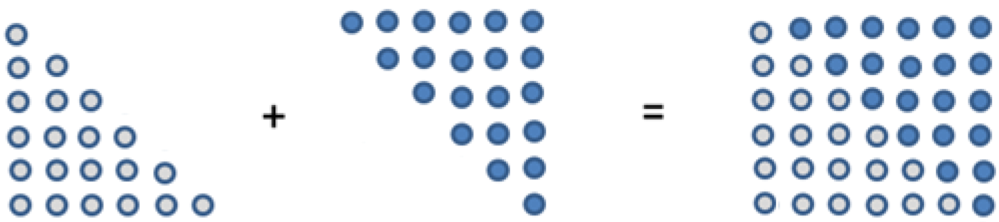


T_n T_{n+1} Q_{n+1}

Vediamo ora cosa succede quando si raddoppia un numero triangolare:



T_3 6 T_3 6 $R_{3,4}$ 12



T_6 21 T_6 21 $R_{6,7}$ 42

Nei due esempi si nota che si ottiene un numero rettangolare nel quale il numero delle colonne e delle righe differiscono per una unità, i numeri rettangolari di questo tipo si dicono “oblunghi”.

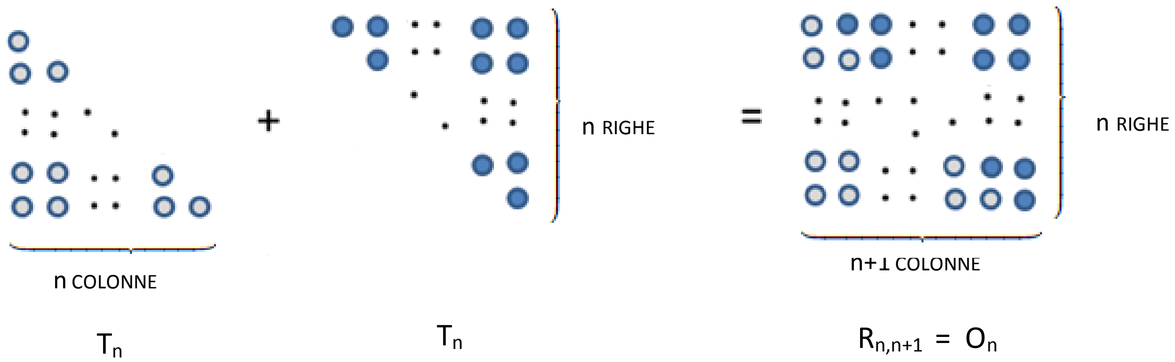
Li indicheremo nel seguente modo:

$$O_1 = R_{1,2} \quad , \; O_2 = R_{2,3} \quad , \; O_3 = R_{3,4} \quad , \; \dots \; O_n = R_{n,n+1} \quad \dots \; ,$$

La relazione vista negli esempi, vale in generale:

$$T_n + T_n = R_{n,n+1} = O_n \; .$$

Infatti:



Esercizi

2.10.1 Inserisci al posto dei puntini i numeri giusti: $Q_{15} = 4 \times Q_{\dots} + 2 \times G_{\dots} - 1$.

2.10.2 Mostra con un esempio, e poi dimostra, la seguente relazione: $Q_n = 2 \times T_{n-1} + n$.

2.10. 3 Mostra con un esempio, e poi dimostra, le seguenti relazioni: $R_{n,n+1} = Q_n + n = R_{n-2,n-1} + 2 \times G_n$.

2.10.4 Mostra con un esempio, e poi dimostra, la seguente relazione: $T_{m+n+1} = T_m + T_n + R_{m+1,n+1}$.

Attività libera

Sperimenta, congettura, dimostra.

3 I NUMERI FIGURATI IN FORMULE

3.1 Che cos'è una formula.

In matematica una formula è un'espressione contenente numeri, simboli di operazione e lettere.

Esempi:

$5 \times n$ $\quad\quad$ $n + m - 1$ $\quad\quad$ $n^2 + n$

Se si sostituiscono le lettere con dei numeri, si ottengono delle espressioni numeriche, cioè un "calcolo da fare" con un risultato:

$$\overset{6}{\overset{\downarrow}{n}} + \overset{4}{\overset{\swarrow}{m}} - 1 \longrightarrow 6 + 4 - 1 \longrightarrow 9$$

A partire da una formula è dunque possibile costruire una tabella come quella seguente:

FORMULA: $n^2 + n$		
Numero da sostituire alla lettera n	Espressione numerica	Risultato del calcolo
1	$1^2 + 1$	2
2	$2^2 + 2$	6
5	$5^2 + 5$	30
6	$6^2 + 6$	42
8	$8^2 + 8$	72
10	$10^2 +10$	110

nella quale si illustra una "corrispondenza" tra i numeri liberamente scelti della prima colonna e i risultati dell'ultima colonna [7]

[7] Nel linguaggio matematico tale corrispondenza prende il nome di "funzione".

LABORATORIO 3.1 – tavola 11

Attività

Completa la tabella della formula: $4 \times m + n^2$, scegliendo m e n nel seguente modo:

m	n
1	1
2	4
10	1
5	2

Completa la tabella della formula: $(n + 2) + m - (n + 1) + p$, scegliendo m , n e p nel seguente modo:

m	n	p
1	3	2
2	1	3
4	9	1
5	5	1

Completa la tabella della formula: $\dfrac{6}{n - 7}$, scegliendo n nel seguente modo:

n	
8	
9	
10	
13	

Domande

Al variare dei numeri della prima colonna delle tre tabelle, si ottengono nell'ultima colonna valori tutti diversi?
Nella tabella B quali lettere giocano un ruolo determinante?
Cosa succede se nella tabella C si inserisce nella prima colonna il valore 7?

Tabella A

FORMULA: $4 \times m + n^2$			
Numero da sostituire alle lettere		Espressione numerica	Risultato del calcolo
m	n		
1	1	$4 \times 1 + 1^2$	5
2	4	$4 \times 2 + 4^2$	24
10	1	$4 \times 10 + 1^2$	41
5	2	$4 \times 5 + 2^2$	24

Tabella B

FORMULA: (n + 2) + m - (n + 1) + p				
Numero da sostituire alle lettere			Espressione numerica	Risultato del calcolo
m	n	p		
1	3	2	(3 + 2) + 1 - (3 + 1) + 2	4
2	1	3	(1 + 2) + 2 - (1 + 1) + 3	6
4	9	1	(9 + 2) + 4 - (9 + 1) + 1	6
5	5	1	(5 + 2) + 5 - (5 + 1) + 1	7

Tabella C

FORMULA: $\frac{6}{n-7}$		
Numero da sostituire alla lettera n	Espressione numerica	Risultato del calcolo
8	$\frac{6}{8-7}$	6
9	$\frac{6}{9-7}$	3
10	$\frac{6}{10-7}$	2
13	$\frac{6}{13-7}$	1

Come si vede, nella 2^ e 4^ riga della tabella A e nella 2^ e 3^ riga della tab. B , a partire da differenti sostituzioni, si ottengono risultati uguali.

Nella tabella B si nota che la presenza della lettera n è inessenziale perché i valori che la sostituiscono si cancellano tra loro.

Osserviamo infine che nella tabella C sostituendo alla lettera n il numero 7 si ottiene l'espressione:

$$\frac{6}{7-7}$$

priva di significato perché il denominatore vale 0 .

Esercizi

3.1.1 Completa la seguente tabella:

FORMULA: $2 \times p + n^2 - m$				
Numero da sostituire alle lettere			Espressione numerica	Risultato del calcolo
m	n	p		
1	2	2		
2	1	3		
5	5	1		
4	10	1		

3.1.2 Completa la seguente tabella:

FORMULA: $\sqrt{n-3}$		
Numero da sostituire alla lettera n	Espressione numerica	Risultato del calcolo
12		
4		
19		
52		

3.1.3 Quali valori non possiamo inserire nella prima colonna della tabella precedente? Per quale motivo?

3.1.4 Completa la seguente tabella:

FORMULA: $n^2 - 2$		
Numero da sostituire alla lettera n	Espressione numerica	Risultato del calcolo
		23
		79
		7
		34

3.1.5 Completa la seguente tabella:

FORMULA:		
Numero da sostituire alla lettera n	Espressione numerica	Risultato del calcolo
1		4
2		7
4		13
10		31

3.1.6 Completa la seguente tabella:

FORMULA:		
Numero da sostituire alla lettera n	Espressione numerica	Risultato del calcolo
1		2
2		2
3		2
4		2

3.1.7 Completa la seguente tabella:

FORMULA:		
Numero da sostituire alla lettera n	Espressione numerica	Risultato del calcolo
1		1
2		2
3		3
4		4

Attività libera

Sperimenta, congettura, dimostra.

3.2 Le formule dei numeri figurati.

Ci occuperemo ora della ricerca, per ognuno dei numeri figurati introdotti, di una sua specifica formula. Generalmente si tratterà di espressioni letterali contenenti una o due lettere.

Vedremo come ognuna di queste formule sarà in grado di "generare" , come risultati, tutti i numeri figurati ad essa associata, sostituendo al posto delle lettere gli indici che li caratterizzano (ad esempio i numeri 2 e 5 nel caso del numero rettangolare $R_{2,5}$, il numero 7 nel caso del numero triangolare T_7 e così via).

Finché non attribuiremo un valore alle lettere, la formula rappresenterà tutti i numeri figurati, senza privilegiarne nessuno in particolare, esattamente come avviene per un numero figurato generico. Per questo motivo la formula si può anche vedere come la rappresentazione di un generico numero figurato.

Attraverso le formule sarà possibile studiare i numeri figurati in un modo diverso ritrovando proprietà già viste e scoprendone di nuove.

3.3 La formula dei numeri pari e dei numeri dispari (e degli gnomoni)

La semplicità delle figure dei numeri pari e dei numeri dispari ci permette di individuare facilmente le loro formule.

LABORATORIO 3.3 – tavola 12

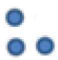
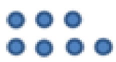
Attività
Trova la formula dei numeri pari e dei numeri dispari e completa le relative tabelle.

Domande
Che posto occupano nella successione dei numeri pari i numeri 502, 504, 506 ?
Che posto occupa nella successione dei numeri dispari i numeri 503, 505, 507 ?
Come puoi dimostrare tramite le formule, la seguente relazione: $P_n - 1 = D_n$?
Come puoi dimostrare tramite le formule, la seguente relazione: $D_n + 1 = P_n$?

NUMERI PARI

		FORMULA: 2 × n		
Figura	Numero figurato	Numero da sostituire alla lettera n	Espressione numerica	Risultato del calcolo
	$P_1 = 2$	1	2×1	2
	$P_2 = 4$	2	2×2	4
	$P_3 = 6$	3	2×3	6
	$P_4 = 8$	4	2×4	8
….	….	….	….	….

NUMERI DISPARI

		FORMULA: 2 × n - 1		
Figura	Numero figurato	Numero da sostituire alla lettera n	Espressione numerica	Risultato del calcolo
	$D_1 = 1$	1	$2 \times 1 - 1$	1
	$D_2 = 3$	2	$2 \times 2 - 1$	3
	$D_3 = 5$	3	$2 \times 3 - 1$	5
	$D_4 = 7$	4	$2 \times 4 - 1$	7
….	….	….	….	….

Per trovare il posto dei numeri 502, 504, 506 nella successione dei numeri pari, occorre trovare i valori che sostituiti nella formula $2 \times n$, permettono di ottenerli come risultato.

E siccome:

$$2 \times 251 = 502 \quad , \quad 2 \times 252 = 504 \quad , \quad 2 \times 253 = 506$$

possiamo concludere che:

$$P_{251} = 502 \quad , \quad P_{252} = 504 \quad , \quad P_{253} = 506$$

Analogamente, per trovare il posto dei numeri 503, 505, 507 nella successione dei numeri dispari, occorre trovare i valori che sostituiti nella formula $2 \times n - 1$, permettono di ottenerli come risultato.

E siccome:

$$2 \times 252 - 1 = 503 \quad , \quad 2 \times 253 - 1 = 505 \quad , \quad 2 \times 254 - 1 = 507$$

possiamo concludere che:

$$D_{252} = 503 \quad , \quad D_{253} = 505 \quad , \quad D_{254} = 507$$

Come abbiamo detto, la formula del numero figurato rappresenta un suo numero generico, nel nostro caso quindi:

$$P_n = 2 \times n \quad \text{e} \quad D_n = 2 \times n - 1$$

Possiamo dunque scrivere:

$P_n - 1 = 2 \times n - 1 = D_n$

e

$D_n + 1 = 2 \times n - 1 + 1 = 2 \times n = P_n$

Gli gnomoni, coincidenti come visto con i numeri dispari, ne condividono formula. Dato un generico gnomone G_n , possiamo allora scrivere: $G_n = 2 \times n - 1$

Esercizi

3.3.1 Completa $P_{....} = 8$, $P_{....} = 24$, $P_{....} = 82$

3.3.2 Completa $D_{....} = 7$, $D_{....} = 51$, $D_{....} = 33$

3.3.3 Completa e dimostra (suggerimento: usa le formule dei numeri pari e dei numeri dispari e la proprietà distributiva):

$P_m + P_n = P_{...}$

$P_m + D_n = D_{...}$

$D_m + D_n = P_{...}$

Attività libera

Sperimenta, congettura, dimostra.

3.4 La formula dei numeri rettangolari , quadrati e oblunghi

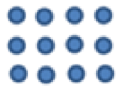
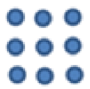
Grazie alla loro forma geometrica, anche i numeri rettangolari, e in particolare i numeri quadrati hanno una formula molto semplice.

LABORATORIO 3.2 – tavola 13

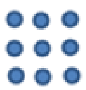
Attività
Trova la formula dei numeri rettangolari, dei numeri quadrati e dei numeri oblunghi, e completa le relative tabelle.

Domande
Come si può riscrivere, utilizzando le formule, la relazione che lega quadrati e gnomoni ?
Quale tipo di numero è rappresentato dalla formula: $2 \times n^2$?
Quale tipo di numero è rappresentato dalla formula: $n^2 + n$?

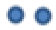
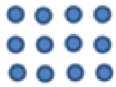
NUMERI RETTANGOLARI

		FORMULA: $m \times n$			
Figura	Numero figurato	Numero da sostituire alle lettere		Espressione numerica	Risultato del calcolo
		m	n		
	$R_{2,3} = 6$	2	3	2×3	6
	$R_{3,4} = 12$	3	4	3×4	12
	$R_{2,4} = 8$	2	4	2×4	8
	$R_{3,3} = 9$	3	3	3×3	9
….	….	….	….	….	….

NUMERI QUADRATI

		FORMULA: n^2		
Figura	Numero figurato	n	Espressione numerica	Risultato del calcolo
	$Q_1 = 1$	1	1^2	1
	$Q_2 = 4$	2	2^2	4
	$Q_3 = 9$	3	3^3	9
….	….	….	….	….

NUMERI OBLUNGHI

		FORMULA: $n \times (n+1)$		
Figura	Numero figurato	n	Espressione numerica	Risultato del calcolo
	$O_1 = 2$	1	$1 \times (1+1)$	2
	$O_2 = 6$	2	$2 \times (2+1)$	6
	$O_3 = 12$	3	$3 \times (3+1)$	12
....	....	....	....	....

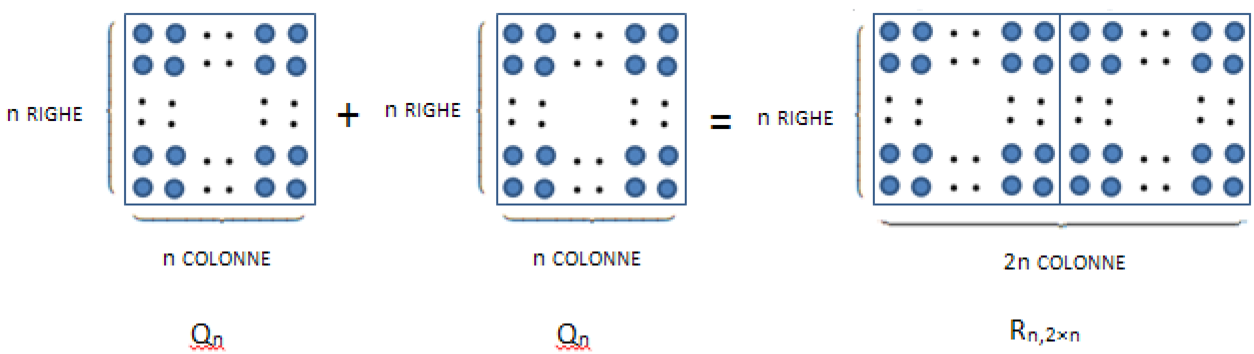
Nel paragrafo 2.8 abbiamo visto che ogni numero quadrato è una somma di gnomoni. Precisamente:

$$Q_n = G_1 + G_2 + G_3 + \dots + G_n$$

Utilizzando le formule dei numeri quadrati e degli gnomoni possiamo allora scrivere:

$$n^2 = 1 + 2 + 3 + \dots + (2 \times n - 1)$$

La formula $2 \times n^2$ può essere riscritta come $n^2 + n^2$, cioè la somma di un quadrato generico con se stesso:



che formerà il numero rettangolare $R_{n,2\times n}$. Dunque $2 \times n^2$ è la formula dei numeri rettangolari che hanno il numero di colonne doppio di quello delle righe.

La formula $n^2 + n$ può invece essere riscritta (grazie alla proprietà distributiva) come $n \times (n + 1)$. Si tratta quindi della formula dei numeri oblunghi.

Esercizi

3.4.1 Utilizzando le formule, dimostra che:

- se m e n sono pari allora $R_{m,n}$ è pari;
- se m è pari e n è dispari allora $R_{m,n}$ è dispari;
- se m e n sono dispari allora $R_{m,n}$ è dispari.

(suggerimento: usa le regole del prodotto dei numeri pari e dei numeri dispari).

3.4.2 Utilizzando le formule, dimostra che dato:

- se n è pari allora Q_n è pari;
- se n è dispari allora Q_n è dispari.

3.4.3 Utilizzando le formule, dimostra che i numeri oblunghi sono tutti pari

Attività libera

Sperimenta, congettura, dimostra.

3.5 La formula dei numeri triangolari

Ci occupiamo ora della formula dei numeri triangolari. Arriveremo a questa in due modi diversi, il primo dei quali sfrutta una loro proprietà che li lega ai numeri oblunghi.

LABORATORIO 3.5 – tavola 14

Attività
Utilizzando una opportuna proprietà dei numeri triangolari, trova la loro formula e completa la relativa tabella.

Domande
Quale proprietà hai usato ? Ti è servito conoscere la formula di altri numeri figurati?
Puoi usare la formula per stabilire se 36 sia un numero triangolare ? Qualora lo fosse, qual è il suo numero di posto?
Puoi usare la formula per stabilire se 23 sia un numero triangolare ? Qualora lo fosse, qual è il suo numero di posto?

Nel paragrafo 2.10 abbiamo visto che raddoppiando un numero triangolare si ottiene un numero oblungo, precisamente:

$$T_n + T_n = R_{n,n+1} = O_n$$

Ricordando la formula dei numeri oblunghi ne segue:

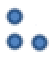
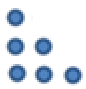
$$T_n + T_n = n \times (n + 1)$$

da cui:

$$T_n = \frac{n \times (n+1)}{2}$$

Abbiamo così determinato la formula dei numeri triangolari

NUMERI TRIANGOLARI

		FORMULA: $\frac{n \times (n+1)}{2}$		
Figura	Numero figurato	n	Espressione numerica	Risultato del calcolo
	$T_1 = 1$	1	$\frac{1 \times (1+1)}{2}$	1
	$T_2 = 3$	2	$\frac{2 \times (2+1)}{2}$	3
	$T_3 = 6$	3	$\frac{3 \times (3+1)}{2}$	6
….	….	….	….	….

Si ha: $36 = \frac{8 \times 9}{2} = \frac{8 \times (8+1)}{2}$, quindi 36 si ottiene dalla formula sostituendo a n il numero 8.

Il 36 è dunque il numero triangolare T_8.

Il numero 23 , invece, non può essere un numero triangolare, perché se lo fosse, il suo doppio 46 dovrebbe essere ottenuto dalla formula $n \times (n + 1)$ come prodotto di due numeri consecutivi; ma 46 si può scrivere come prodotto di due numeri solo nei seguenti modi:

$$46 = 1 \times 46 \quad \text{e} \quad 46 = 2 \times 23$$

Esercizi

3.5.1 Completa, utilizzando la formula, le seguenti scritture: $T_{....} = 45$, $T_{....} = 55$, $T_{....} = 820$

3.5.2 Cerca, usando la formula, un procedimento che ci permetta di stabilire se un numero è triangolare oppure no.

3.5.3 Spiega perché la formula dei numeri triangolari, nonostante la frazione, dia sempre come risultato un numero naturale.

3.5.4 Dimostra usando le formule, la seguente relazione: $Q_n = 2 \times T_{n-1} + n$.

Attività libera

Sperimenta, congettura, dimostra.

3.6 La formula di Gauss

Vediamo come la formula dei numeri triangolari possa essere ricavata in un modo diverso.

LABORATORIO 3.6 – tavola 15

Attività
Trova un modo semplice e rapido per trovare il risultato della seguente somma:

1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 +7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 + 13 + 14 + 15 + 16 + 17 + 18 + 19 + 20

Domande
A quale numero figurato corrisponde la somma da 1 a 20 ?
Il metodo si può applicare alla somma 6 +7 + 8 + 9 + 10 + 11 ?
Che tipo di numero figura otteniamo in questo caso?

Scriviamo due volte i numeri da 1 a 20 e sommiamo in verticale (metodo di "Gauss")[8]:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
20	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
21	21	21	21	21	21	21	21	21	21	21	21	21	21	21	21	21	21	21	21

Otteniamo così venti volte 21. Questo numero è pari a "due volte" la somma dei numeri da 1 a 20.

Quindi:

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 + 13 + 14 + 15 + 16 + 17 + 18 + 19 + 20 = \frac{20 \times 21}{2}$$

Per quanto visto nel par. 2.9, la somma dei numeri naturali da 1 a 20, corrisponde al numero triangolare T_{20}

Quindi: $T_{20} = \frac{20 \times 21}{2} = 210$

Il procedimento si può facilmente generalizzare alla somma:

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 + \ldots\ldots + (n - 2) + (n - 1) + n$$

nel seguente modo:

1	2	3	…	…	…	n - 2	n - 1	n
n	n - 1	n - 2	…	…	…	3	2	1
n + 1	n + 1	n + 1	n + 1	n + 1	n + 1	n + 1	n + 1	n + 1

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 + \ldots\ldots + (n - 2) + (n - 1) + n = \frac{n \times (n+1)}{2}$$

E siccome un generico numero triangolare T_n è proprio la somma dei primi n numeri naturali, abbiamo trovato, per altra via, la formula già vista nel paragrafo precedente:

$$T_n = \frac{n \times (n+1)}{2}$$

8 Un aneddoto attribuisce il metodo al matematico tedesco Carl Friedrich Gauss quando aveva nove anni [3]

Il metodo di Gauss si può applicare anche alla somma:

$$6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11$$

6	7	8	9	10	11
11	10	9	8	7	6
17	17	17	17	17	17

$$6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 = \frac{6 \times 17}{2} = 51$$

ma la somma può essere vista anche come:

$6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 = (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11) - (1 + 2 + 3 + 4 + 5)$

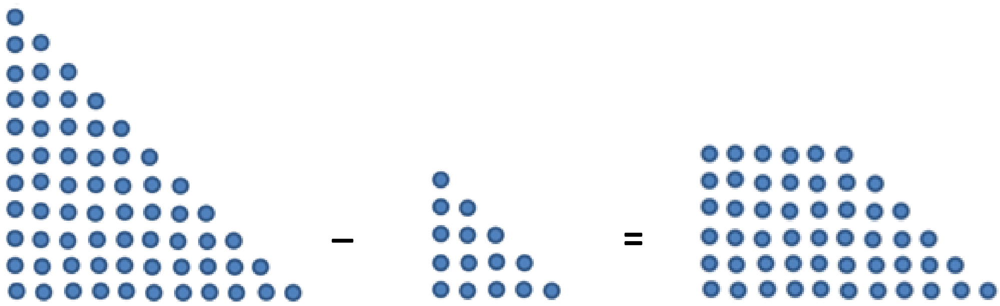
e allora usando due volte la formula di Gauss, possiamo scrivere:

$$6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 = \frac{11 \times 12}{2} - \frac{5 \times 6}{2} = 51$$

Notiamo infine che la somma rappresenta la differenza dei due numeri triangolari T_{11} e T_5 :

$$6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 = T_{11} - T_5$$

La sua rappresentazione è un numero figurato che si dice "trapezoidale":



T_{11} T_5 $T_{11} - T_5$

Esercizi

3.6.1 Trova un modo semplice e rapido per trovare il risultato della seguente somma:

$$7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 + 13 + 14 + 15 + 16 + 17 + 18 + 19 + 20$$

3.6.2 Trova un modo semplice e rapido per trovare il risultato della seguente somma:

$$2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12 + 14 + 16 + 18 + 20$$

3.6.3 Trova un modo semplice e rapido per trovare il risultato della seguente somma:

$$3 + 6 + 9 + 12 + 15 + 18 + 19 + 20 + 21$$

3.6.4 Trova una formula per sommare i primi n multipli di 7:

$$7 + 14 + 21 + \ldots. + (7 \times n)$$

(suggerimento: usa la proprietà distributiva per riscrivere la somma come: $7 \times (\ldots + \ldots + \ldots \quad \ldots +))$

Attività libera

Sperimenta, congettura, dimostra.

4 CONCLUSIONE

Quanto visto finora può in realtà ampliarsi con lo studio di altri numeri figurati costruiti a partire da altre figure geometriche del piano:

- numeri trapezoidali;
- numeri esagonali;
- numeri pentagonali;
- …

o dello spazio:

- numeri parallelepipedali;
- numeri piramidali;
- ……

Chi è interessato ad approfondire l’argomento può consultare la bibliografia.

5 BIBLIOGRAFIA

[1] Carl B. Boyer. *Storia della Matematica*. Arnoldo Mondadori Editore, Milano, 2000.

[2] php.math.unifi.it/convegnostoria/materiali/GiacardiNumeriFigurati.pdf

[3] Eric T. Bell, *I grandi matematici*, BUR, Biblioteca Universale Rizzoli, 2010.

[4] http://areeweb.polito.it/didattica/polymath/htmlS/argoment/ParoleMate/Mag_09/

Aritmogeometria.htm

[5] http://www.matematicamente.it/magazine/dicembre2011/164-Borgogni-Numeri_figurati.pdf