Alcuni appunti di aritmetica

http://crf.uniroma2.it
Indirizzo del centro di Ricerca e formazione per l'insegnamento delle discipline scientifiche
In */pubblicazioni/quaderni* si trova un testo (un po' datato) di aritmetica.

*"**L'aritmetica è introduzione ed avviamento all'Algebra**, e perciò ha il suo posto naturale nei primi gradi della scuola media in generale e in particolare nella scuola classica. I vigenti programmi che le assegnano questo posto, indicano anche il carattere dell'insegnamento, intuitivo e pratico, in rapporto alla mente dei giovani allievi. [...] Così inteso l'insegnamento dell'Aritmetica dà luogo a problemi didattici estremamente delicati. **Se l'allievo deve partecipare in modo attivo a questo studio, non si può dargli definizioni e regole senza spiegazione, come doni piovuti dal cielo**, di cui poi quegli che riceve il dono non saprebbe servirsi. [...] **La storia della scienza viene qui in soccorso, mostrandoci come le verità aritmetiche siano state riconosciute dai Pitagorici mediante modelli geometrici dei numeri, quali sono i numeri figurati:** numeri quadrati e rettangolari, numeri triangolari, ecc.* " [F. Enriques, *Prefazione*, in A. Enriques, *Aritmetica ad uso delle scuole medie inferiori*, Bologna Zanichelli,1934, pp. IX-XI].

La scienza dei numeri dovrebbe essere preferita nell'acquisizione rispetto a tutte le altre, a causa della sua necessità e dei grandi segreti e gli altri misteri che sono presenti nelle proprietà dei numeri. Tutte le scienze attingono da essa, ed essa non ha bisogno di nessuna di loro. (S. Boezio)

Severino Boezio (VI sec.)
De institutione arithmetica. Il testo digitalizzato si trova nel sito seguente
https://archive.org/stream/aniciimanliitor01friegoog#page/n2/mode/2up
Si può vedere l'algebra retorica e la scrittura dei numeri con i simboli romani (I,V,X,C,M ecc) prima dell'introduzione della "9 figure indiane" introdotte in Europa da Fibonacci.

Nicomaco di Gerasa (II sec d.C.) un neo pitagorico. Un suo teorema molto bello che, se trattato, potrebbe essere una esemplificazione della bellezza della matematica è in seguente:

$$1+2^3+3^3+\ldots+n^3=(1+2+3+\ldots+n)^2$$

Il testo greco digitalizzato si trova nella biblioteca Gallica
http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k53153k/f78.item.zoom

Nel nostro primo progetto didattico, risalente al medio evo, il così detto QUADRIVIO, l'*Aritmetica* insieme alla *Geometria*, all'*Astronomia* e alla *Musica* erano considerate le materie di base da cui iniziare la formazione scientifica di un giovane. Anche per questo iniziare il Liceo Matematico con l'aritmetica mi sembra una buona idea.

Numeri poligonali

I numeri poligonali potrebbero esser un buon inizio perché permettono di fare un po' di matematica laboratoriale unendo disegni e aritmetica. Il percorso porta naturalmente alle progressioni aritmetiche e alla loro somma con una serie di esercizi e problemi interessanti che possono essere risolti con questo semplice strumento. Inoltre si introducono in casi speciali e molto concreti alcuni concetti che saranno ripresi in seguito: metodo di induzione, successioni, formule ricorsive, funzioni, formule chiuse, somme di una serie (finita).

Faccio un esempio immaginario di come potrebbe essere impostato fin dall'inizio un laboratorio di aritmetica non per proporre o solo suggerire una pratica didattica, ma per esemplificare l'idea di Laboratorio matematico, il modo in cui gli studenti possono partecipare alla costruzione del pensiero matematico, che abbiamo sperimentato in questi anni nel Progetto Lauree Scientifiche e che pensiamo possa essere articolato in un Liceo Matematico

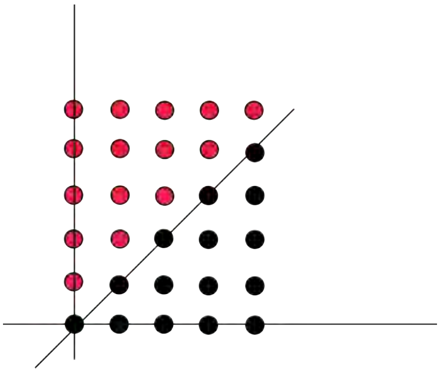
"Cominciamo con i numeri triangolari: far scrivere alcuni numeri triangolari con accanto il disegno con i pallini messi a forma triangolare. Quando gli studenti hanno ben capito cosa sono, far scrivere lunghe successioni di numeri triangolari (almeno 30) 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45,55, 66 ecc.
Il pensiero cerca spontaneamente una regola per scrivere il successivo perché si annoia

1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45,55, 66 e poi

qual è la regola per trovare il successivo? Ci sono vicino disegnati sul foglio anche i triangoli di punti che occupano sempre più spazio e che alla fine diventano superflui.
Possiamo presentare la sequenza in questo modo

1 3 6 10 15 21 28 36 45 55
\ \ \ \ \ \ \ \ \
2 3 4 5 6 7 8 9 10

come raccontare la regola a parole una volta scoperta.
Come fare a ricordare che numero dobbiamo aggiungere? Come chiamare il decimo numero triangolare? E' una frase troppo lunga. Triangolare decimo? Più corto. T decimo? Più corto ancora T10? perché no? e il centesimo? T100 perché no? e il generico? Tn dove n può essere un numero qualunque. E' una possibile discussione immaginaria. Cosa può uscire dalla testa degli studenti è inimmaginabile! Se la notazione condivisa è Tn la regola che a parole è lunga a dirsi diventa con questo simbolo Tn+1=n+Tn Questa formula potrebbe mettere in discussione l'abbreviazione Tn perché potrebbe leggersi come l'ennesimo numero triangolare più uno oppure l'(n+1)-esimo numero triangolare, ecc ecc ecc Cercare altre notazioni. Se esce ma non me lo aspetto T(n) che permette di distinguerlo da T(n+1) sarebbe molto interessante. Non imporre T_n ma discutere tutte quelle proposte. Questa notazione è innaturale perché presuppone il concetto di funzione (n è la variabile indipendente T quella dipendente). Arrivare a una buona notazione e discutere più a fondo possibile questa notazione e il suo significato sarà di enorme importanza anche per tutto il corso di matematica futuro. E' la prima volta che lo studente affronta questa situazione con consapevolezza e si deve portarlo con esempi numerici e problemi anche di linguaggio su una strada semplice e percorribile: il decimo numero triangolare è 55: si tratta di una relazione tra 10 e 55 tutt'altro che facile da capire. La conquista di T_n permette di fare un po' di matematica.
Il problema successivo è quello di cercare una formula chiusa per T_n cioè di dire quanto vale l'ennesimo numero triangolare senza calcolare quelli precedenti. Si tratta di sommare i primi n interi. Quanto vale T_{20} e T_{50} e T_{100} ? Non credo che gli studenti alle prime armi riescano da soli a risolvere questo problema ma in questa prima fase debbono solo rendersi conto il più possibile della sua difficoltà, debbono capire bene il problema. Credo che l'aneddoto di Gauss che somma i primi 100 numeri vada raccontato e debba essere spiegato frontalmente con molta chiarezza e lentezza prima su casi particolari e poi per un generico n. Cercare una frase della lingua italiana per descrivere la regola: ad esempio si moltiplica l'ultimo numero per il suo successivo e si divide per due, oppure base (n) per altezza (n+1) diviso due! Far fare il calcolo per sequenze particolari T_8 ad esempio o di lunghezza simile facendo riscrivere agli studenti il diagramma di Gauss con i numeri e i due triangoli con i pallini. L'uso dei puntini dovrebbe venir naturale per abbreviare la scrittura quando si deve fare il calcolo ad esempio per T_{20} . Ma saranno LORO a introdurla in modo che quando l'insegnate la userà gli studenti penseranno essere stata una loro idea. E' consigliabile trattare la cosa geometricamente e algebricamente.



$$1+\ 2\ +\ 3\ +\ldots+(n-2)+(n-1)+n$$
$$n+(n-1)+(n-2)+\ldots+\ 3\ +\ 2\ +1$$

Questa somma vale n volte n+1, da cui

$$2T_n = n(n+1)$$

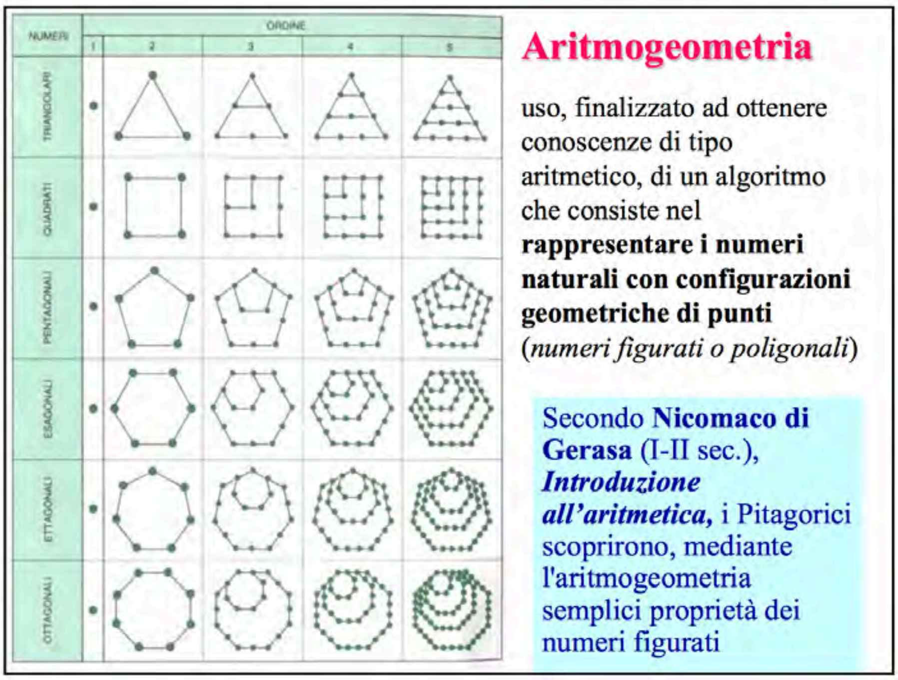
T_{10} =55, T_{100} =5050, T_{1000} =500500 Viene un sospetto?
Si possono ora proporre dei problemi in forma di tavole di lavoro ecco qualche esempio
Congettura 1 : se T è un numero triangolare anche 9T+1 è ancora triangolare.
E' vero? fare degli esempi per verificare o falsificare la congettura. Dagli esempi si può trovare una strada.

Congettura 2 : se T è un numero triangolare anche 8T+1 è un numero quadrato.
E' vero? fare degli esempi per verificare o falsificare la congettura. Dagli esempi si può trovare una strada.
Questi problemi dovrebbero muovere curiosità e mistero: quali segreti nascondono i numeri?

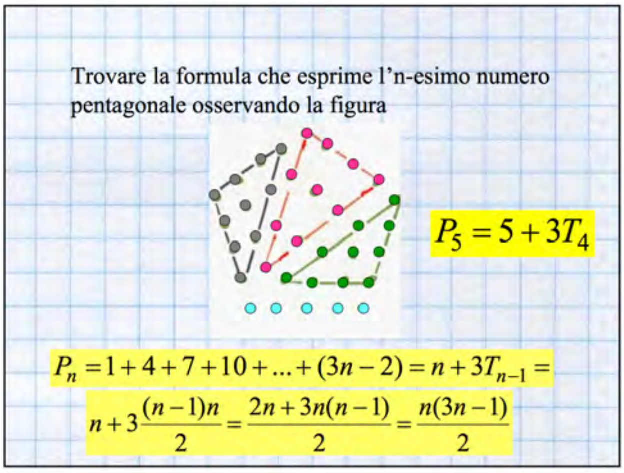
Si può continuare con i numeri figurati. Da un seminario molto interessante di Livia Giacardi
php.math.unifi.it/convegnostoria/materiali/Giacardi**NumeriFigurati**.pdf

Per creare un po' di ilarità

Poi i numeri figurati



Questo potrebbe essere un problema che potrebbe essere proposto agli studenti:



$P_2=2+3T_1=5$, $P_3=3+3T_2=12$ si possono fare i disegni in casi particolari. Si può cercare una formula generale si può poi trovare una formula chiusa per P_n.

Alcune notizie storiche per dire che nei secoli questi problemi sono stati studiati e alcuni sono ancora irrisolti.

Sembra che sia stato **Ipsicle** (II sec. a.C.) a stabilire un **collegamento tra numeri poligonali e progressioni aritmetiche,** come riferisce **Diofanto** (III sec.), nel suo ***Libro dei numeri poligonali***.

Numeri Triangolari 1, 1+2, 1+2+3 ecc. $T_n = 1+2+3+ ...+n$
Numeri Quadrati 1, 1+3, 1+3+5, 1+3+5+7 ecc , $Q_n = 1+3+5 +...+(2n-1)$
Numeri Pentagonali 1, 1+4, 1+4+7, 1+4+7+10 ecc , $P_n = 1+4+7+10+ ...+ (3n-1)$

Teorema
L'ennesimo numero poligonale di k lati è la somma dei primi n termini di una progressione aritmetica che inizia con l'unità e ha come ragione k-2.

Un po' di storia (vedi Giacardi il sito indicato)
Molti matematici nel corso dei secoli, cercarono di penetrare la proprietà di questi numeri:
Diofanto, Fermat, Descartes, Euler, Gauss, Cauchy,...

P. Fermat [1636, *Oeuvres*, I, 305].
"Sono stato il primo a scoprire il teorema molto bello e generale che ogni numero [intero positivo] o è triangolare o è la somma di 2 o 3 numeri triangolari; ogni numero o è un quadrato o è la somma di 2,3 o 4 quadrati...e così all'infinito... Non posso dare qui la dimostrazione che dipende da numerosi e astrusi misteri dei numeri, perché intendo dedicare un intero libro a questo argomento" Ogni numero è la somma di al più **n** numeri ***n***-poligonali.

C.F. Gauss: lo dimostra nel caso dei numeri triangolari e annota il risultato nel suo diario nel modo seguente "Eureka Num = Δ+ Δ + Δ" (10.7.1796)

A.L. Cauchy: dimostra il teorema nella sua interezza [1813-15, *Oeuvres*, (2), VI, 320-353].

Esercizi difficili
Trovare la somma dei reciproci dei numeri triangolari (proposto da Huygens al giovane Leibnitz)

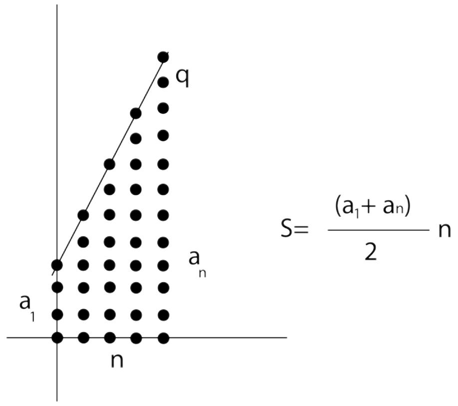
$$\sum \frac{2}{n(n+1)} = 2\sum\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

Problema molto difficile per gli anni successivi!
Trovare tutti i numeri che siano sia triangolari che quadrati. Il problema si riconduce all'equazione di Pell

$$X^2-2Y^2=1$$

che ha infinite soluzioni $T_n=Q_m$: X=2n+1, Y=2m. Esempio 36.

"**Numeri trapezioidali** (è una mia idea non esiste questo concetto in letteratura)"
La somma di una progressione aritmetica si ottiene geometricamente generalizzando la dimostrazione di Gauss



a_1, a_1+q, $a_1+ 2q$, $a_1 +3q$,..., $a_1+ (n-1)q$

Somma basi per altezza diviso due

Una volta che si sa calcolare la somma di una progressione aritmetica gli studenti (da soli) per esercizio possono trovare una formula chiusa per l'ennesimo numero quadrato e pentagonale ecc.

Ecco come Fibonacci presenta le progressioni aritmetiche nel suo Liber Abaci: si trovano nel Capitolo XII (il più esteso di tutto il trattato (152 pagine)) che tratta di problemi "erratici" Un paragrafo si intitola *La somma di numeri, e questioni simili* e fornisce questa regola per trovare la somma di n numeri in progressione aritmetica

Si divide per due il numero dei termini e si moltiplica per la somma del primo e dell'ultimo.

$$p_1 + p_2 + p_3 + ... + p_n = \frac{n}{2}(p_1 + p_n)$$

L'espressione verbale della formula potrebbe aiutare la memoria a ricordarla. Il problema della memoria è sempre presente nel manuale.

Ecco un problema erratico:
Dopo quanti giorni un viandante che percorre 1 miglio il primo giorno, 2 miglia il secondo giorno, 3 miglia il terzo giorno ecc, raggiunge un altro viandante che percorre 20 miglia al giorno. (Fibonacci)

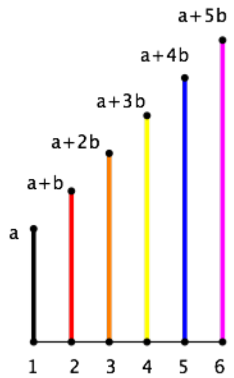
Nei *Nove capitoli sulle arti matematiche* (*Chiu Chang Suan Ching*) un antico manuale di matematica cinese (Liu Hui (commentatore del teso attivo nel 260 d.C) afferma che il libro e alcuni suoi commenti risalgono al II secolo a.C. ma la cosa è difficile da documentare. (Need. p.33)) vi sono nel VI capitolo alcuni problemi che riportano alle progressioni aritmetiche

(VI 18) Supponiamo che 5 persone dividono 5 sapechi [uniformemente] in modo che quello che prendono i primi due sia uguale a quello che prendono gli ultimi tre.

(VI 19) Supponiamo che una canna di bambù ha 9 spazi tra i nodi e che lo spazio occupato dai tre nodi inferiori sia 4 sheng mentre quello occupato dai 4 nodi superiori sia di 3 sheng. Si chiede quale sia la capacità dei tre nodi intermedi e quale sia la capacità dei 9 spazi.
La canna di bambù potrebbe essere l'immagine che richiama una progressione aritmetica: tanti nodi equidistanziati.

Questo percorso inizia con i numeri figurati che vengono legati alle progressioni aritmetiche che vengono studiate per conto loro e arricchite con vari esercizi e problemi. Abbiamo lavorato molto per trovare la notazione giusta T(n) oppure T_n . Queste notazioni introducono per la prima volta il concetto di funzione (la variabile indipendente è un numero naturale) e sarà ovviamente ripreso moltissime volte. $T_n = a+bn$ diventerà $f(x)=a+bx$ invece di progressione sarà chiamata funzione lineare oppure crescita proporzionale o proporzione diretta (si tratta sempre della stessa cosa). Quello che si farà in seguito sarà di ampliare il dominio di definizione della funzione sui numeri negativi e sui numeri reali. Anche i parametri a e b che ora sono naturali diventeranno reali ma la sostanza non cambia. Tutto questo sarà di grande utilità in fisica per modellizzare ogni fenomeno che presenta una crescita lineare come ad esempio i moti rettilinei uniformi (moti equabili: che bella parola equabile!) . La cosa non è così particolare e semplicistica dato che ogni funzione f(x) continua e derivabile (in zero) in piccolo diventa lineare $f(x)=f(0)+f'(0)x$.

L'immagina di una crescita di questo tipo che dipende da due parametri (dei quali il più importante è b) è facilmente realizzabile con geogebra, che consente di vedere la cosa al variare dei due parametri .



L'allineamento dei punti (che deriva dal teorema di Talete) - da qui il nome di funzione lineare- permette di prevedere lo sviluppo successivo della funzione conoscendo i primi due punti (per due punti passa una sola retta) La variabile dipendente è rappresentata sulla retta orizzontale.

Entra in gioco Euclide

Breve bibliografia sugli Elementi

- Esiste un'ottima edizione in rete in inglese con animazioni Java che illustrano ogni proposizione
  http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/toc.html
- Euclide Tutte le opere a cura di F. Acerbi ed. Bompiani
  Si trova anche l'ottica, la Sectio Canonis sulla musica e tutte le opere minori di Euclide
  Per una versione online con animazion in geogebra
  http://www.scienzaatscuola.it/euclide/euclide.html

- Gli elementi a cura di Fraiese ed. UTET
- Edizione di Tartaglia in volgare si trova in rete. Non è filologicamente accurata ma offre la possibilità di capire l'evoluzione della lingua matenatica http://www.astrofilibresciani.it/Biblioteca_UAB/Biblioteca/euclid_p.pdf,
- L'edizione di Commandino in volgare di poco successiva a quella di Tartaglia edita dall'accademia Rafaello in forma anastatica è molto più aderente al testo greco. I commenti dei due matemaici rinascimentali è sicuramente di grande utilità didattica. http://www.matematicamente.it/cultura/storia-della-matematica/gli-elementi-di-euclide/

L'aritmetica è trattata nei libri VII, VIII e IX degli Elementi

Nel Libro VII troviamo la definizione di frazione e il calcolo con le frazioni. Ci attardiamo un po' su questo perché pensiamo debba essere un concetto da rivedere con estrema cautela senza ricordare le regole ma cercando di capire fino in fondo la logica sottostante. Un buon lavoro sulle frazioni farà risparmiare tempo in futuro.

Def. 2
Il numero minore è parte del maggiore, quando egli misura il maggiore.

Quella parte piglia il nome dal numero, secondo il quale il minore misura il maggiore, perciocé se il minore lo misura due volte, ella si dimanda la metà, se tre volte la terza parte o vero il terzo, se quattro la quarta parte, ò vero il quarto & così procederassi nel nominarla se più volte lo misurerà. (Commandino)

Una *parte* (singolare) di un numero è un suo divisore, un suo pezzo e il numero è fatto da tanti di quei pezzi tutti uguali tra loro: 3 è parte (la metà) di 6 (3+3=6). 21 è parte (un quarto) di 84 (84=21+21+21+21)
A=B/n allora A è parte di B: più preciamente A è l'ennesima parte di B e B è diviso in n parti uguali.

La definizione 3 è fondamentale e va capita fino in fondo.
Def. 3
Ma quando non lo misura, farà parti di quello

A (minore di B) e B sono i due numeri. B è diviso in tante parti tutte uguali tra loro e A è formato da un certo numero di quelle parti. Precisamente, indicando con U una di quelle parti nelle quali B si è spezzato, sarà B=mU e A=nU con n<m. L'immagine da creare è quella un oggetto B che si spezza , si frantuma in tante parti uguali e A è formato da alcune di queste parti: una frazione di B. Discutere sul termine frazione nella lingua. Frazione di una citta. Quando Euclide dice A è parti (al plurale) di B significa che A è una frazione di B. Con un linguaggio più preciso, molto efficace e ben pensato (ricordiamoci quanto abbiamo lavorato per costruire un linguaggio ben fatto per indicare l'ennesimo numero triangolare) se B=mU diciamo che U è l'ennesima parte di B e A è n di queste parti cioè A=n volte (B/m) ... A è uguale a n m-esimi di B .... A= (n/m) di B.
Cosa è una frazione? Cosa vuol dire n/m? si divide 1 in m parti, si frantuma l'unità in parti uguali, e se ne prendono n. La frazione n/m vuol dire n/m **di 1** poiché il "di 1" viene sottointeso, se si dimentica, si può perdere il significato concreto della frazione.
Ecco il commento di Commandino alla definizione 3.

*La parti pigliano il nome da quei numeri, secondo li quali una misura comune di tutti e due li misura, perciochè se la misura lor comune misurerà il minore due volte & il maggiore tre volte , si diranno due terzi; si misurerà l'istesso minore tre volte & e il maggiore 4, tre quarti, ò vero se misurerà il maggiore 5 volte , tre quinti le chiameremo:& in quella maniera si procederà nel nominare l'altre. I moderni scrittori il numero, secondo il quale la misura comune misura il minore , chiamano **numeratore** perciò che egli determina la moltitudine delle parti:& quello secondo il quale l'istessa misura comune misura il maggiore addimandano **denominatore** conciosiacosa che egli imponga il nome alle* *parti.*

La comprensione del concetto di frazione facilita il ripasso delle operazioni coi numeri razionali: l'operazione di somma si può fare se si sommano le stesse parti si B: se A è parti di B e C è parti di B come si può sommare A con C? Si deve dividere B nello stesso numero m di parti di modo che se A =n volte (B/m) e C= s volte (B/m) allora A+C sarà OVVIAMENTE n+s volte (B/m). Si può spezzare B nello stesso numero di parti? Certamente sì, dato che se A è n parti di (B/m) allora dividendo ogni parte in ulteriori k parti sarà A n×k parti di (B/k×m) ecc. In questo modo abbiamo

$$\frac{n}{m}+\frac{s}{t}=\frac{nt}{mt}+\frac{ms}{mt}=\frac{nt+ms}{mt}$$

L'uso del minimo comune multiplo è un trucco per abbreviare il calcolo del quale si può benissimo fare a meno. Penso sia meglio ridurre allo stesso denominatore moltiplicando numertore e denominatore per quello che serve. Quando si passerà alla somma di funzioni razionali la riduzione al minimo multiplo comune sarà di peso.
Ugualmente il prodotto diventa nautarale come funzione composta. Un prodotto in generale si prefigura come funzione composta: qua abbiamo un modo per cominciare al allenare il pensiero a questa non facile operazione. Se A è n volte (B/m) cosa sarà s volte di (A/t). Un ragionamento semplice una immagine esemplificativa, porta immediatamente alla scoperta della regola.

Storicamente un numero razionale positivo si scriveva con la sua parte intera più una frazione (minore di 1) ad esempio 32/3 è 10 e 2/3, in questo modo la natura del numero e il modo di dirlo è più concreta. Le operazioni venivano fatte in modo meno meccanico ma più laborioso. La semplificazione e l'aquisizione di una regola meccanica, la più semplice possibile, va sicuramennte acquisita con molti esercizi ripetitivi dopo però che si è ben compreso il senso di quello che si sta facendo.

Il libro VII continua con la descrizione dell'algoritmo euclideo del massimo comun divisore. E' un algoritmo fondamentale in aritmetica per le cose che implica, inoltre è il primo algoritmo della storia.

- Permette di trovare sempre una parte U comune a due numeri A e B
- Permette di ridurre una frazione ai minimi termini,
- Permette di dimostrare che se un primo divide un prodotto divide uno dei due numeri
- Permette di risolvere l'equazione diofabtea ax-by=c
- permette di affrontare il problema della incommensurabilità
- Permette di dimostrare che le classi resto modulo p formano un campo
- permette di risolvere l'equazione di Pell: $X^2 - aY^2=1$

Alcuni teoremi importanti
VII-4 Se A è maggiore di B a è parti di B cioè A è una frazione di B cioè A = n(B/m)
cioè esiste una parte U comune ad A e a B (la maggiora) tale che A=nU e B=mU
VII-11 A:B=C:D se e solo se A è parti di B come C è parti di D A = n(B/m) e C = n(D/m)
VII-30 p è primo se e solo se p| ab allora o p|a o p|b

Il Libro VIII studia le progressioni geometriche.
Si studiano l'uguaglianza di frazioni cioè a:b=c:d cioè la proporzionalità di 4 numeri e, molto importante,le progressioni continue oggi dette progressioni geometriche

A:B = B:C = C:D = D:E ecc
la progressione è A, B, C, D, E ecc

esempio 8, 12, 18, 27.
Ovviamente se A, B, C, D, E ecc è una progressione geometrica anche kA, kB, kC, kD, kE ecc è

una progressione geometrica. Euclide studia le progressioni geometriche ridotte ai minimi termini.

VIII-1 se A e E sono primi tra loro la progressione è ridotta ai minimi termini

VIII-2 Dato il rapporto m:n (primi tra loro) costruire una progressione geometrica con quel dato rapporto. La soluzione è m^2 , nm, n^2; se la progressione inzia con 1 la soluzione è 1, n, n^2 .

Si cerca la forma delle progressioni continue con numeri interi (può essere interessante anche solo il caso di progressioni di tre o 4 termini), se il primo e l'ultimo sono primi tra loro allora la progressione continua è sempre ridotta ai minimi termini ed ha la forma:

$$a^n , a^{n-1} b, a^{n-2} b^2, a^{n-3} b^3, \dots , ab^{n-1}, b^n$$

Questo studio è propedeutico allo studio delle potenze e poi dei logaritmi.

Il Libro IX conclude lo studio delle progressioni geometriche che iniziano con 1. Esso sono teutte del tipo

$$1\ a, a^2, a^3,\dots, a^n.$$

Se d è il MCD tra il primo e l'ultimo della progressione, la progressione è:

$$da^n , da^{n-1} b, da^{n-2} b^2, da^{n-3} b^3, \dots , dab^{n-1}, db^n$$

IX-29 Esistono infiniti numeri primi

IX 35 La somma di una progressione geometrica P_1,P_2,P_3 ... è :

$$P_1 + P_2 + \dots + P_{n-1} = P_1 \frac{P_n - P_1}{P_2 - P_1}$$

$$a + aq + aq^2 + \dots + aq^n = a\frac{q^{n+1} - 1}{a - 1}$$

IX 36 Euclide descrive una famiglia di numeri perfetti: $2^{n-1}(2^n - 1)$ sono numeri perfetti se il secondo numero è primo.

Questa è l'ultimo teorema è il punto di arrivo dell'aritmetica euclidea.

Alcune suggerimenti sui numeri perfetti e amici

A e B sono *amici* se la somma dei divisori (compreso 1) di A è uguale a B e la somma dei divisori di B (compreso 1) è uguale ad A: esempio 220 e 284
220 è divisibile per 1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55 e 110 e la loro somma risulta 284
284 è divisibile per 1, 2, 4, 71, 142 che sommati tra loro restituiscono proprio 220.

A è *perfetto* se A è amico di A.

La nozione porta a calcolare il numero di divisori di un dato numero e per fare questo occorre il teorema fondamentale dell'aritmetica.

http://areeweb.polito.it/didattica/polymath/htmlS/info/Numeri/Set06/Numeri.htm

Nel Medioevo, un patto di amicizia fra due persone veniva siglato con i due numeri, 220 e 284: uno dei due amici portava inciso su un medaglione il numero 220 e l'altro portava inciso il 284.

Ritroviamo la stessa coppia di numeri anche nella Bibbia in *Genesi*, XXXII, 14, dove si dice che le pecore date da Giacobbe ad Esaù erano 220. Nell'antichità, incisi su un talismano si riteneva inoltre che rafforzassero l'amore in una coppia. Secondo un'antica usanza araba, due innamorati si scambiavano dei dolci sui quali erano segnati i due numeri magici e mangiavano questi dolci insieme, per garantirsi amore eterno.

http://www.shyamsundergupta.com/

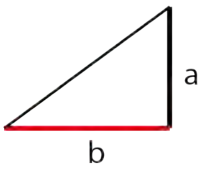
Su questo sito si trovano tantissime proprietà curiose sui numeri triangolari dalla quali si possono ricavare tavole di lavoro per gli studenti

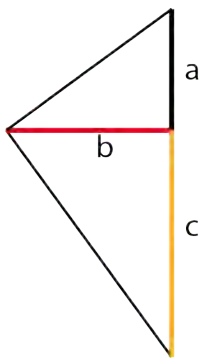
220 è divisibile per 1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55 e 110 e la loro somma risulta 284
284 è divisibile per 1, 2, 4, 71, 142 che sommati tra loro restituiscono proprio 220.

Si pensa che le coppie di numeri amici siano infinite, ma nessuno ne ha ancora dato una dimostrazione e, prima del computer la loro ricerca non è stata molto semplice. Solo nel Duecento un matematico arabo Ibn al-Banna', noto come Aboul-Abbas Ahmed ibn Mohammad ibn othmane al-Azdi, ne trovò una seconda, 17 296 e 18 416, scoperta applicando una regola proposta da un altro grande matematico arabo vissuto nell'ottavo secolo dopo Cristo, Tha'bit ibn Qurra.
Se p, q e r sono tre numeri primi - affermava Tha'bit, il quale tuttavia non riuscì a trovare nessun'altra coppia di numeri oltre a quella già nota, 220 e 284 – e se questi tre numeri sono della forma
$p = 3 \times 2^n - 1$, $q = 3 \times 2^{n-1} - 1$, $r = 9 \times 2^{2n-1} - 1$
allora $2^n pq$ e $2^n r$ sono numeri amici.
Con $n = 2$, abbiamo $p=11$, $q = 5$ e $r = 71$, che sono tutti numeri primi, quindi $2^n pq = 220$ e $2^n r = 284$. Allo stesso modo, con n = 4 otteniamo la coppia 17 296 e 18 416.

Progressioni e visione

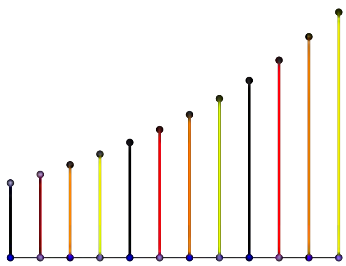
Si genera una progressione a partire da un qualunque rapporto a:b (a e b sono le lunghezze dei primi due segmenti) e poi vengono costruiti a spirale triangoli rettangoli via via simili (metodo attribuito a Platone)

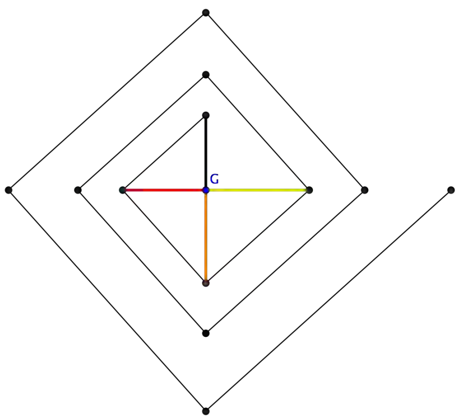




a : b = b : c

Con geogebra si possono costruire tutte le progressioni geometriche.





I risultati sulle progressioni geometriche del VIII e IX libro in particolare la loro riduzione ai minimi termini e loro struttura, portano naturalmente allo studio dell'irrazionalità . La progressione di tre termini a,b,c (a: b=b:c) conduce all'equazione

$$ac=b^2$$

da risolvere in numeri interi. Se sono dati due numeri si vuole trovare il terzo e ci si trova di fronte ai primi teoremi di impossibilità. Se si vuole inserire n numeri in progressione geometrica tra 1 e a si deve risolvere per numeri interi l'equazione $x^{n+1} = a$ dato che tale progressione ha la forma $1,x,x^2,..,x^n$, a.

Le progressioni geometriche sono in rapporto strettissimo con la musica (Vedi il saggio di L. Catastini *Tra parole, matematica e musica* in Quale scuola a cura di Cementi e Serianni, Carocci 2015) . L'orecchio umano identifica due suoni (puri) se le frequenze del primo suono è parte della frequenza del secondo suono (ad esempio la metà). Così se il suono è emesso da una corda pizzicata se si raddoppia la lunghezza della corda l'orecchio avverte la stessa nota. In più l'orecchio umano identifica l'intervallo tra le note a e b con quello tra le note c e d se il RAPPORTO tra le frequenza di a e b è lo stesso di quello tra le frequenze di c e d

$$a : b = c : d$$

La distanza tra due note è un rapporto non una differenza! I rapporti sono parte della natura della fisiologia del nostro orecchio. Il rapporto 1:2 (ottava) produce due note uguali, si vorrebbe dividere questo intervallo in 7 parti uguali introducendo 6 note che abbiano una dall'altrea la stessa distanza cioè gli stessi intervalli:

$$1 , x , x^2 , x^3 , x^4 , x^5 , x^6 , 2$$

Ovviamente una tale progressione non può esistere con numeri interi. Già il caso più semplice, quello di dividere in due intervalli uguali l'intervallo di ottava risulta impossibile con numeri interi dato che non esiste nessuna progressione geometrica 1 , x , 2. In pratica, dividere l'ottava in due intervalli uguali, significa costruire tre corde di lunghezza a, b, c (rigorosamente intere) tali che a:b=b:c (in modo che i due intervalli siano uguali) e a:c=1:2 (in modo che l'intervallo a:c sia una ottava) Si ratta quindi di trovare tre numeri interi (le lunghezze delle corde) tali che

$$b^2=ac \text{ con } c=2a$$

L'impossibilità di fare questo, questa impotenza della matematica pitagorica, sembra sia stato il primo teorema di impossibiltà nella storia della matematica dimostrato dal pitagorico Archita da Taranto. Su questa impossibilità interviene anche Aristotele ed rappresenta l'atto di nascita dei numeri irrazionali.

Un ulteriore problema, ricco di leggenda e di matematica, che si lega alle progressioni geometriche è quello della duplicazione del cubo: si tratta di inserrire due medie proporzionali tra 1 e 2;

$$a:x=x:y=y:c \quad \text{con } a:c=2.$$

Questo è equivalente a risolvere con numeri razionali l'equazione x=2. Vi sono diversi modi per costruire praticamente con strumenti costruiti ad hoc questi due medi proporzionali. Il mesolabio di Eratostene (che potrebbe essere costruito materialmente dagli studenti) è uno di questi: le due squadre di Platone, la due parabole di Menecmo sono altri metodi interessanti.
L'approccio euclideo a questi problemi non è quello di tentare di risolvere una a una con numeri razionali le equazioni del tipo $x^n = a$, ma di studiare le progressioni geometriche in generale e dimostrare che quelle ridotte ai minimi termini sono di tipo canonico e sono ridotte ai minimi termini se il primo e l'ultimo termine lo sono. Questo approccio potrebbe sembrare più complesso ma ci potrebbero essere vantaggi a studiare in generale le progressioni geometriche e la loro aritmetica.

Come le progressioni aritmetiche quelle geometriche prefigurano delle funzioni e dei fenomeni di crescita di grande importanza $P_n = a^n$ diventrà $P(x) = a^x$ e sarà lo strumento per studiare i fenomeni che crescono con grande rapidità “esponenziale”. Galileo stesso che aveva pochi strumenti in più per studiare il “grande libro della natura” suppone che la velocità di un corpo in caduta libera sia proporzionale allo spazio percorso (e non al tempo impegato per percorrelo) questo produrrebbe una crescita esponenziale dello spazio percorso, idea che alla fine dovette abbandonare.

Lo studio delle spirali è strettamente legato alle progressioni: quella di Archimede comporta progressioni aritmetiche e quelle logaritmiche (relative ad esempio ai numeri di Fibonacci) che comportano progressioni geometriche.
Modelli di crescita del tipo $x_{n+1} = a\, x_n$. dopo N passaggi (se nessuno muore nel frattempo) producono una crescita esponenziale. Quanti individui dopo N?

In definitiva attraverso le progressioni e l’aritmetica euclidea abbiamo iniziatio a parlare di due equazioni differenziali fondamentali $f'(x)=b$ e $f'(x)= ax$.

Possibili argomenti successivi collegati strettamente all’aritmetica

- Le classi resto e la crittografia
- I numeri irrazionali
- Equazioni diofantee
- Terne pitagoriche
- Somme di quadrati
- L’equazione di Pell