Laboratorio: *Introduzione alle geometrie della sfera e della pseudosfera: una proposta didattica*

a cura di Franco Ghione, Francesca Tovena, Laura Lamberti, Ida Spagnuolo, Stefano Volpe

La geometria della sfera

Premessa alla prima attività

Punto di partenza dell’attività è stata la catena deduttiva costruita durante le lezioni di geometria.

1) 1° criterio di congruenza dei triangoli

↓

1° teorema dell'angolo esterno

↓

1° criterio del parallelismo + assioma della parallela

PROPRIETÁ DEL PARALLELISMO

↓

2° teorema dell'angolo esterno

↓

~~[illegible]~~
la somma degli angoli interni di qualsiasi triangolo é 180°.

Primo criterio di congruenza dei triangoli

$\downarrow$

Primo teorema dell'angolo esterno

$\downarrow$

Criterio del parallelismo $\wedge$ Assioma di Euclide

$\downarrow$

Proprietà del parallelismo

$\downarrow$

Secondo teorema dell’angolo esterno

$\downarrow$

Teorema della somma degli angoli interni di un triangolo

Prima attività

Somma degli angoli interni di un triangolo sferico

L’attività si è svolta facendo uso di palloni sui quali l’insegnante aveva precedentemente disegnato figure opportune.

Determina, facendo uso di un goniometro, la somma degli angoli interni (S_i) delle figure tracciate sui diversi palloni:

Pallone	A	B	C	D	E	F	G
S_i							

Quale figura della geometria piana ti rammentano le figure tracciate sui palloni?

____

Da quali elementi è costituito il contorno di un triangolo nel piano?

____

Quale ne è l'equivalente sulla sfera?

____

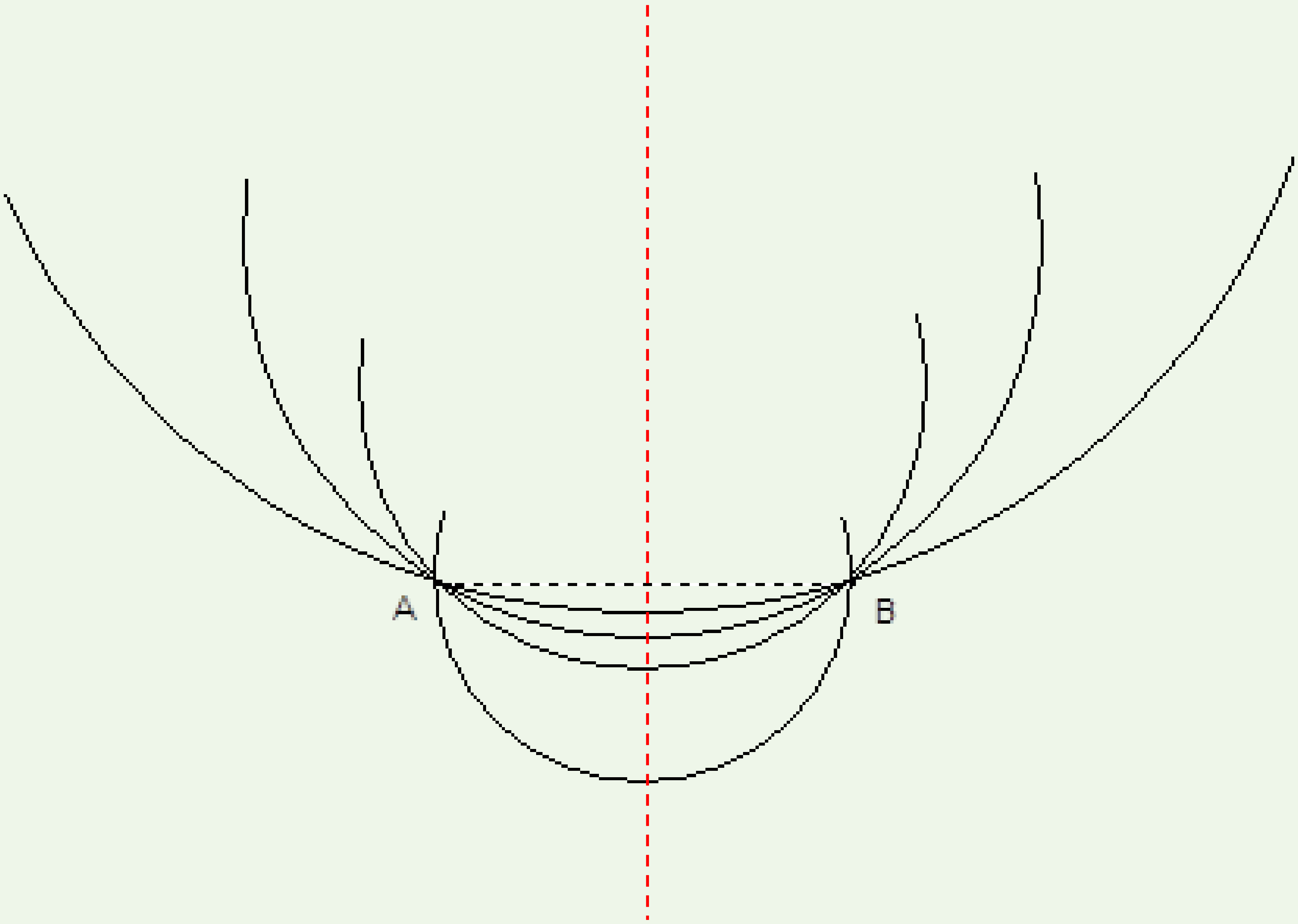
Spiega quali conseguenze si possono trarre dalle misurazioni che hai effettuato

____

Attraverso l’attività guidata gli studenti hanno scoperto (**non senza sorpresa!**) che la somma degli angoli interni delle figure disegnate sui palloni (**che gli alunni stessi hanno spontaneamente chiamato triangoli**) non è costante ed è maggiore di un angolo piatto.

Bisognava ora comprendere se tali figure potessero essere a ragione chiamate *triangoli*!

Si è dunque ragionato su quale potesse essere l’analogo del segmento sulla sfera.


A
B

Stabilito dunque che, dati due punti sulla sfera, l’analogo del segmento è il più piccolo dei due *archi di circonferenza massima* passanti per tali due punti, si è potuto procedere a dare un nome alle figure disegnate sui palloni: *triangoli sferici*

… e a comprendere quale è l’analogo della retta sulla sfera: *la circonferenza massima*.

Attraverso la scelta di opportune figure (due circonferenze massime), si è potuti pervenire alla non esistenza, sulla sfera, di rette parallele,

… alla non validità del primo

teorema dell’angolo esterno,

… alla non validità del

criterio del parallelismo.

Premessa
alla seconda attività

1. L’assioma di partizione del piano

2. La definizione di poligono convesso come intersezione di opportuni semipiani

3. L’incommensurabilità tra diagonale e lato di un quadrato

4. L’area della superficie sferica è pari a $4\pi r^2$

Seconda attività

Poligoni sferici

Dopo aver osservato che anche sulla superficie sferica vale (a patto di non prendere sui due semipiani due punti diametralmente opposti, perché in questo caso non sarebbe unico il segmento che li unisce) l’assioma di partizione del piano: «Una retta sferica divide il piano sferico in due parti convesse tali che preso un punto su una di esse e un punto sull’altra, il segmento che li unisce incontra la retta in un unico punto»,

… si è fatto notare, utilizzando una sfera di Lénárt (dal nome del matematico ungherese contemporaneo István Lénárt), che intersecando due semipiani si ottiene un poligono sferico delimitato da due lati: il biangolo.

Gli studenti sono stati poi condotti a comprendere la proporzionalità tra l’area dei biangoli e l’ampiezza dei rispettivi angoli interni per giungere alla determinazione dell'area di un biangolo.

Si è poi fatto notare che biangoli simmetrici sono congruenti.

Dopo aver notato che l’intersezione di tre semipiani genera un triangolo, gli studenti sono stati invitati a lavorare sui triangoli regolari sferici,


KIPSTA

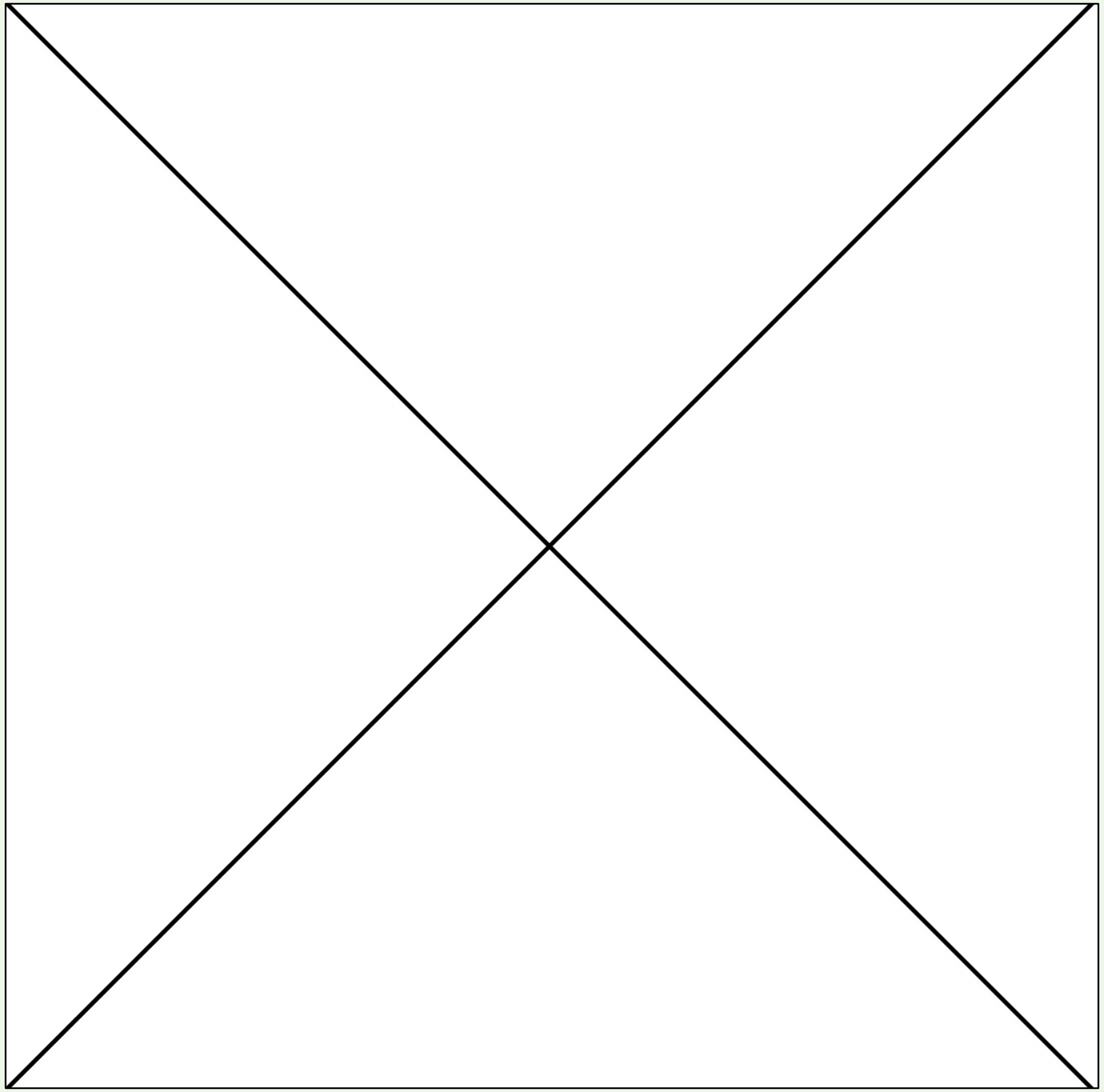
Pallone	**A** Vertici a 2 cm dal polo	**B** Vertici a 5 cm dal polo	**C** Vertici a 8 cm dal polo	**D** Vertici a 11 cm dal polo	**E** Vertici a 14 cm dal polo
lato (in cm)					
angolo (in gradi)					
S_i					

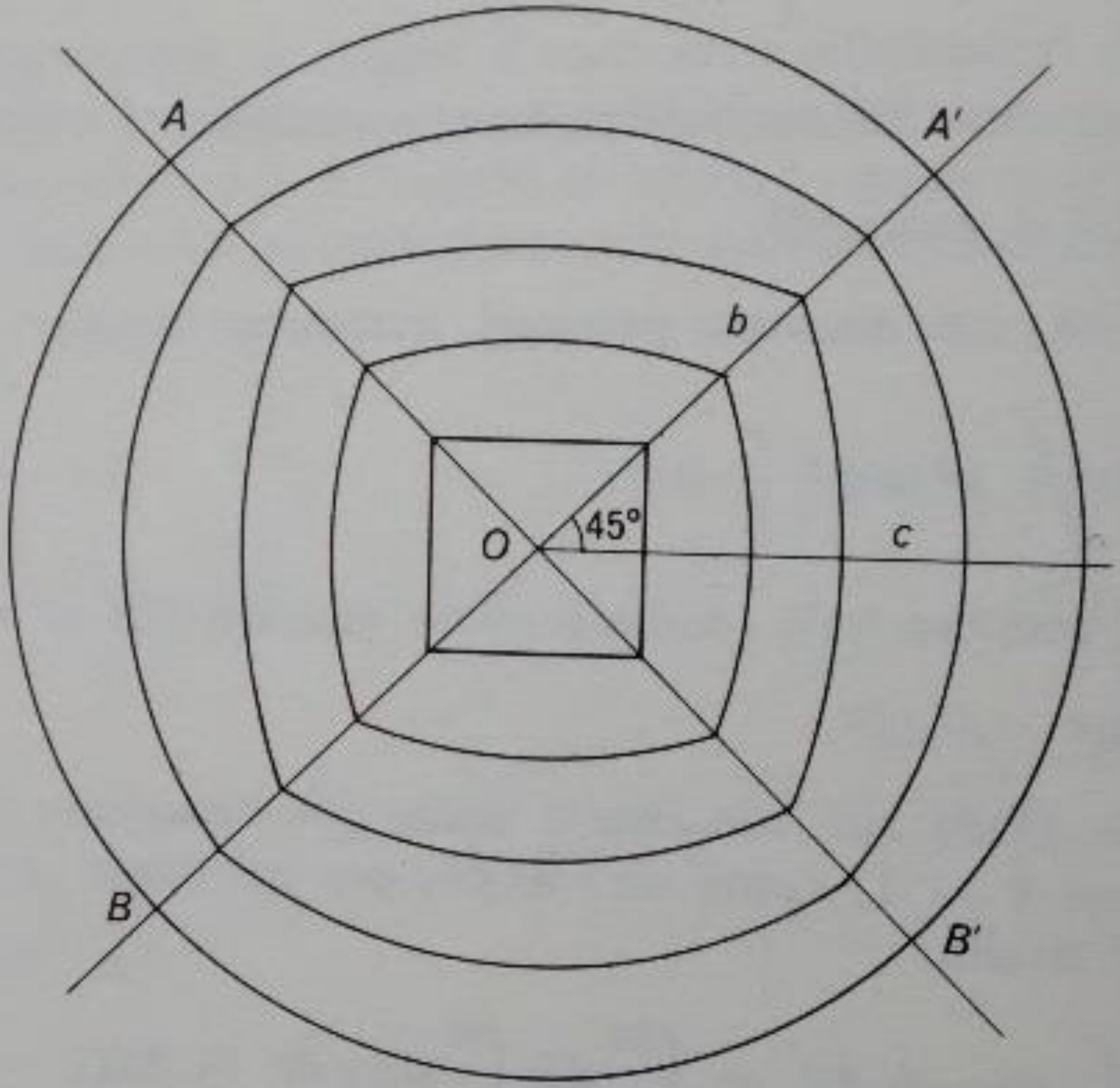
… giungendo alla conclusione che, a differenza di quanto avviene nel piano, se triangoli sferici regolari (con tutti i lati e tutti gli angoli congruenti) hanno lati differenti, allora hanno anche angoli di ampiezze diverse e che, al crescere dell'area del triangolo, cresce anche la somma dei suoi angoli interni. Si è quindi determinato che la somma degli angoli interni di un triangolo sferico è variabile e compresa tra 180° e 540°.

Si è poi passati allo studio dei quadrilateri.

Dopo aver osservato che quadrilateri regolari (con tutti i lati e tutti gli angoli congruenti) non hanno i lati opposti paralleli,

… gli studenti hanno svolto una attività analoga a quella svolta sui triangoli regolari,





Figura

Pallone	A	B	C	D	E
	Vertici a 2 cm dal polo	Vertici a 5 cm dal polo	Vertici a 8 cm dal polo	Vertici a 11 cm dal polo	Vertici a 14 cm dal polo
lato (in cm)					
angolo (in gradi)					
diagonale (in cm)					
d/l					

Pallone	A	B	C	D	E
	Vertici a 2 cm dal polo	Vertici a 5 cm dal polo	Vertici a 8 cm dal polo	Vertici a 11 cm dal polo	Vertici a 14 cm dal polo
lato (in cm)	3cm	7	11	14	15,5
angolo (in gradi)	90°	95°	110°	140	
diagonale (in cm)	4cm	10	16	21	28
d/l	$\frac{4}{3}$	1,4	$1,\overline{45}$	$\frac{3}{2}$	1,8

… giungendo alla conclusione che, a differenza di quanto avviene nel piano, se quadrilateri sferici regolari (con tutti i lati e tutti gli angoli congruenti) hanno lati differenti, allora hanno anche angoli di ampiezze diverse e che, al crescere dell’area del quadrilatero, cresce anche la somma dei suoi angoli interni. Si è quindi determinato che la somma degli angoli interni di un triangolo sferico è variabile e compresa tra 360° e 720°,

… e che nella geometria sferica, il rapporto tra la diagonale e il lato di un quadrato non è costante.

Quando il quadrato sferico ha il lato che tende a zero, esso tende al quadrato euclideo e quindi il rapporto tra la diagonale e il lato tende a $\sqrt{2}$.

Quando il quadrato tende alla metà della superficie sferica, la diagonale del quadrato tende alla metà della circonferenza massima e il lato del quadrato tende alla quarta parte di essa. E dunque il loro rapporto tende a 2.

Dunque $\sqrt{2} < d/l < 2$. E poiché tra questi valori vi sono infiniti numeri razionali, si è potuto concludere che sulla sfera esistono infiniti quadrati per i quali il rapporto tra la diagonale e il lato può essere espresso da un numero razionale.

Terza attività

Relazione tra l’area e la somma degli angoli interni di un triangolo

Sfruttando il risultato conseguito precedentemente sull’area del biangolo, si è pervenuti alla relazione che lega la somma degli angoli interni di un triangolo con la sua area.

Area biangolo di angolo α + area biangolo di angolo β +

+ area del biangolo di angolo γ =

= area della semisfera + 2 $\cdot$ area del triangolo (A)

Area biangolo di angolo α + area biangolo di angolo β +

+ area del biangolo di angolo γ =

$$= 2\pi R^2 + 2A$$

$$4\pi R^2 \cdot \frac{\alpha}{360°} + 4\pi R^2 \cdot \frac{\beta}{360°} + 4\pi R^2 \cdot \frac{\gamma}{360°} = 2\pi R^2 + 2A$$

$$4\pi R^2 \cdot \frac{\alpha}{360^\circ} + 4\pi R^2 \cdot \frac{\beta}{360^\circ} + 4\pi R^2 \cdot \frac{\gamma}{360^\circ} = 2\pi R^2 + 2A$$

$$2\pi R^2 \cdot \frac{\alpha}{360^\circ} + 2\pi R^2 \cdot \frac{\beta}{360^\circ} + 2\pi R^2 \cdot \frac{\gamma}{360^\circ} = \pi R^2 + A$$

$$\pi R^2 \cdot \frac{\alpha}{180^\circ} + \pi R^2 \cdot \frac{\beta}{180^\circ} + \pi R^2 \cdot \frac{\gamma}{180^\circ} = \pi R^2 + A$$

$$\pi R^2 \cdot \frac{\alpha}{180^\circ} + \pi R^2 \cdot \frac{\beta}{180^\circ} + \pi R^2 \cdot \frac{\gamma}{180^\circ} = \pi R^2 + A$$

$$\frac{\pi R^2}{180^\circ}(\alpha + \beta + \gamma) = \pi R^2 + A$$

$$\frac{\pi R^2}{180^\circ}(\alpha+\beta+\gamma)=\pi R^2+A$$

$$A=\frac{\pi R^2}{180^\circ}(\alpha+\beta+\gamma)-\pi R^2$$

$$A=\frac{\pi R^2(\alpha+\beta+\gamma)-180^\circ\pi R^2}{180^\circ}$$

$$A = \frac{\pi R^2 \left(\alpha + \beta + \gamma\right) - 180^\circ \pi R^2}{180^\circ}$$

$$A = \frac{\pi R^2 \left(\alpha + \beta + \gamma - 180^\circ\right)}{180^\circ}$$

$$A = \frac{\pi R^2 \left(\alpha + \beta + \gamma - 180° \right)}{180°}$$

$$A = \left(\alpha + \beta + \gamma - 180° \right) \frac{\pi R^2}{180°}$$

$$A = \left(\alpha + \beta + \gamma - 180^\circ\right)\frac{\pi R^2}{180^\circ}$$

viceversa

$$\alpha + \beta + \gamma - 180^\circ = \frac{A \cdot 180^\circ}{\pi R^2}$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ + \frac{A \cdot 180^\circ}{\pi R^2}$$

La differenza α + β + γ – 180°

$$\alpha + \beta + \gamma - 180° = \frac{A \cdot 180°}{\pi R^2}$$

viene detta **eccesso sferico** o **eccedenza angolare**.

Nel piano euclideo due triangoli che abbiano angoli corrispondenti uguali non sono in generale uguali ma sono simili. Se però due triangoli simili hanno la stessa area allora sono necessariamente uguali.

Nel caso dei triangoli sferici abbiamo visto che avere angoli corrispondenti uguali (e quindi somme angolari uguali) implica avere aree uguali. Ne segue che triangoli sferici simili sono necessariamente uguali.

La teoria euclidea della similitudine perde di senso in geometria sferica: figure che hanno la stessa forma sono necessariamente congruenti.

Terza attività

Esercizi

Gli esercizi sono tratti da Weeks J. R., *The shape of space*, Boca Raton, CRC Press, 2002

Qual è l’area di un triangolo sferico i cui angoli misurano 61°, 62° e 63°?

Supponi che il raggio della sfera sia lungo 1 metro.

Una società di "Flatlandesi" vive su una sfera il cui raggio misura esattamente 1000 metri. Un contadino ha un campo triangolare con i lati rettilinei e i cui angoli, accuratamente misurati, hanno ampiezze 43,624°, 85,123° e 51,270°.

Qual è l’area del campo?

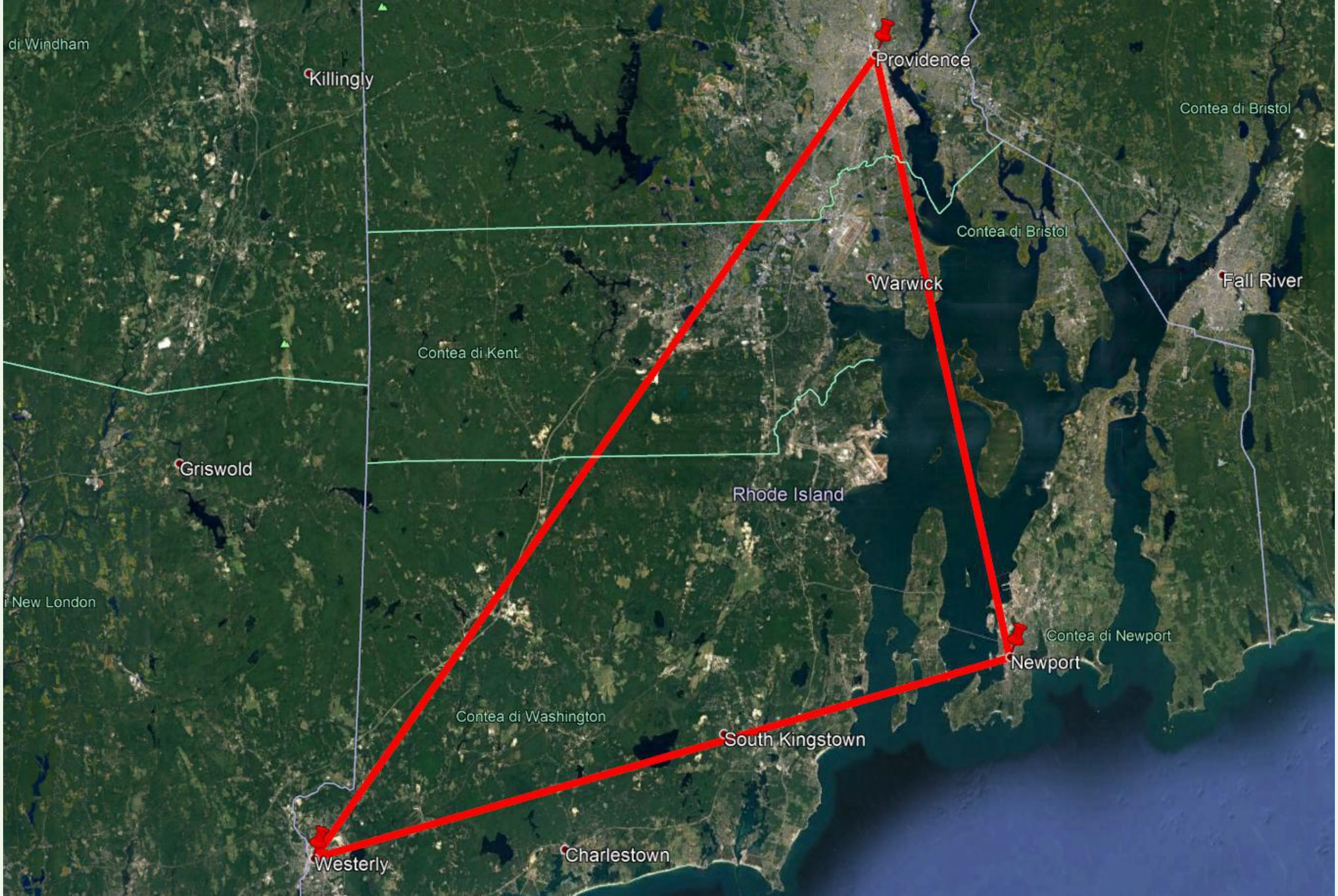
Una società di "Flatlandesi" vive su una sfera e determina, effettuando con attenzione delle misurazioni su di un triangolo, che gli angoli hanno ampiezze 60,0013°, 60,0007° e 60,0011°, mentre l’area è 5410,52 m^2.

Qual è l’area dell’intera superficie sferica?

Stima la somma degli angoli di ciascuno dei seguenti triangoli sferici. (Suggerimento: fai prima una stima approssimativa dell’area di ciascun triangolo).

Il raggio della Terra è approssimativamente 6.400 km.

a. Il triangolo avente come vertici Providence, Newport e Westerly, Rhode Island. Queste città distano approssimativamente 50 km.



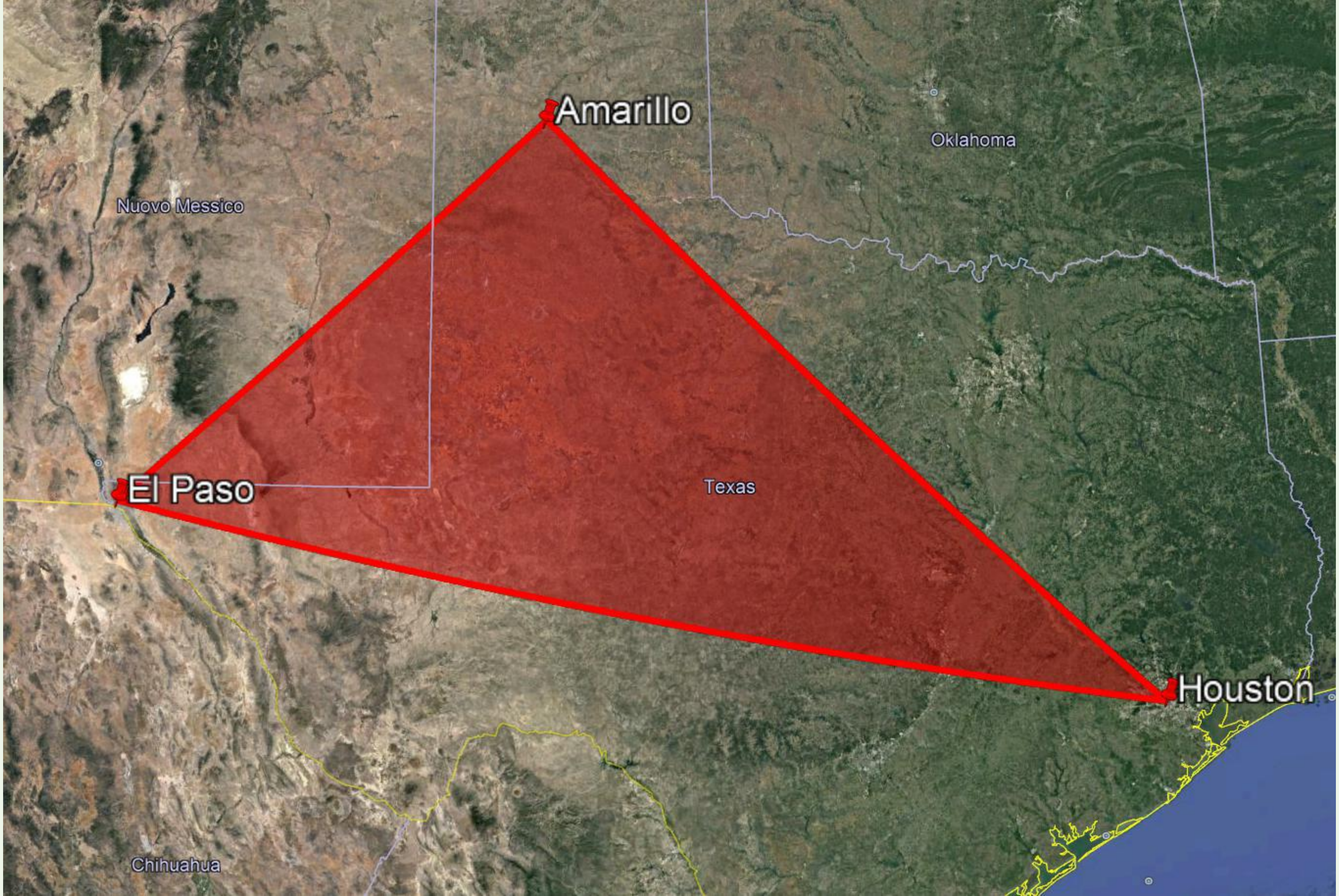
di Windham
Killingly
Providence
Contea di Bristol
Contea di Bristol
Warwick
Fall River
Contea di Kent
Griswold
Rhode Island
New London
Contea di Newport
Newport
Contea di Washington
South Kingstown
Westerly
Charlestown

Per una stima approssimativa dell’area di ciascun triangolo si può utilizzare la funzione "Area di un poligono" di Google Earth.

Per il primo triangolo si ottiene $A = 856\ km^2$.

$S_i \approx 180{,}0012°$ (Attenzione alle cifre significative!).

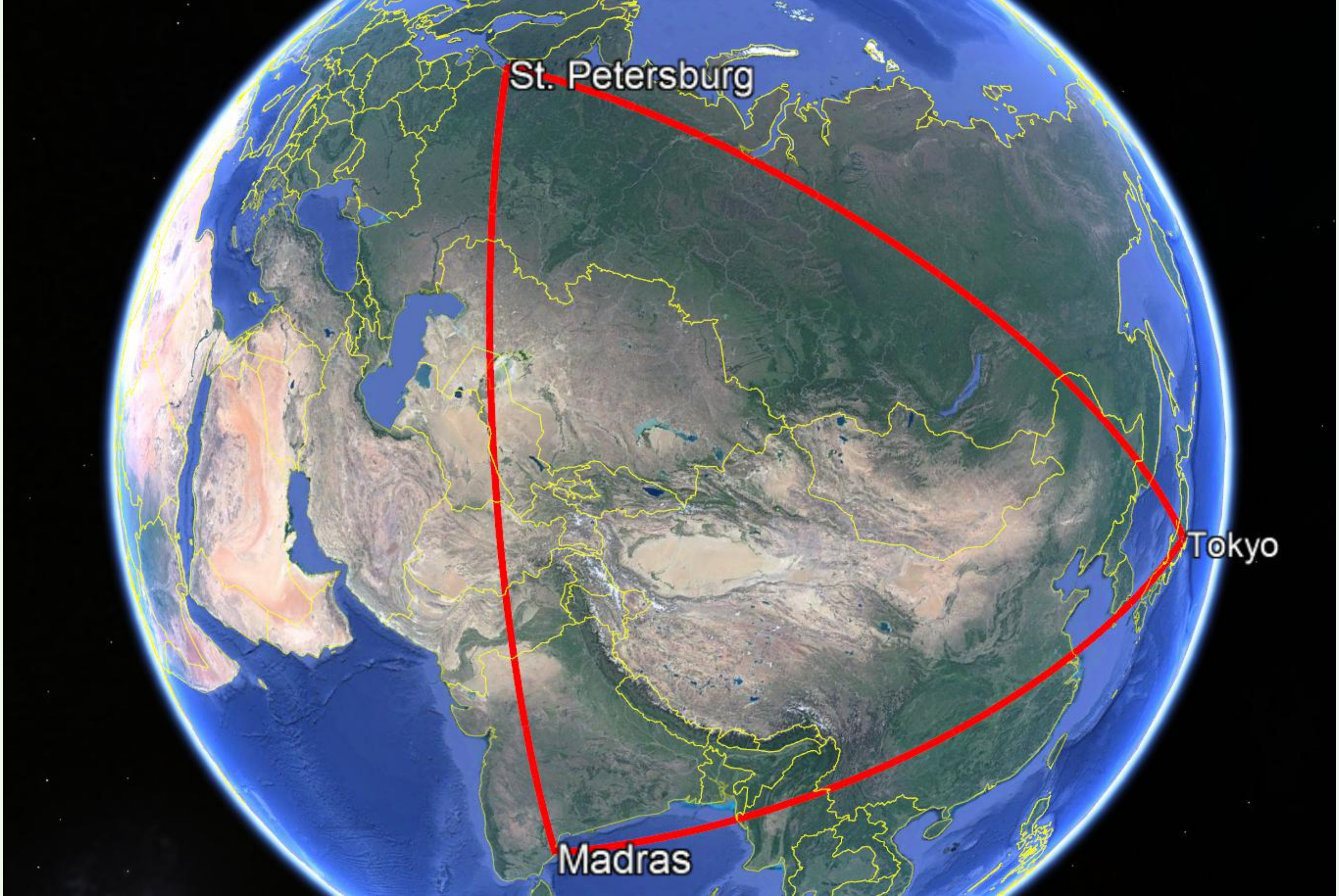
b. Il triangolo avente come vertici Houston, El Paso e Amarillo, Texas. Queste città distano approssimativamente 1.000 km.


Amarillo
Oklahoma
Nuovo Messico
El Paso
Texas
Houston
Chihuahua

Utilizzando la funzione "Area di un poligono" di Google Earth, si ottiene A = 247.672 km^2.

$S_i \approx 180{,}35°$.

c. Il triangolo avente come vertici Madras, India; Tokyo, Japan   and St. Petersburg, Russia. Queste città distano approssimativamente 7.000 km.


St. Petersburg
Tokyo
Madras

Utilizzando la funzione "Area di un poligono" di Google Earth, si ottiene A = 23.605.956,72 km^2.

$S_i \approx 213{,}02°$.

Quarta attività

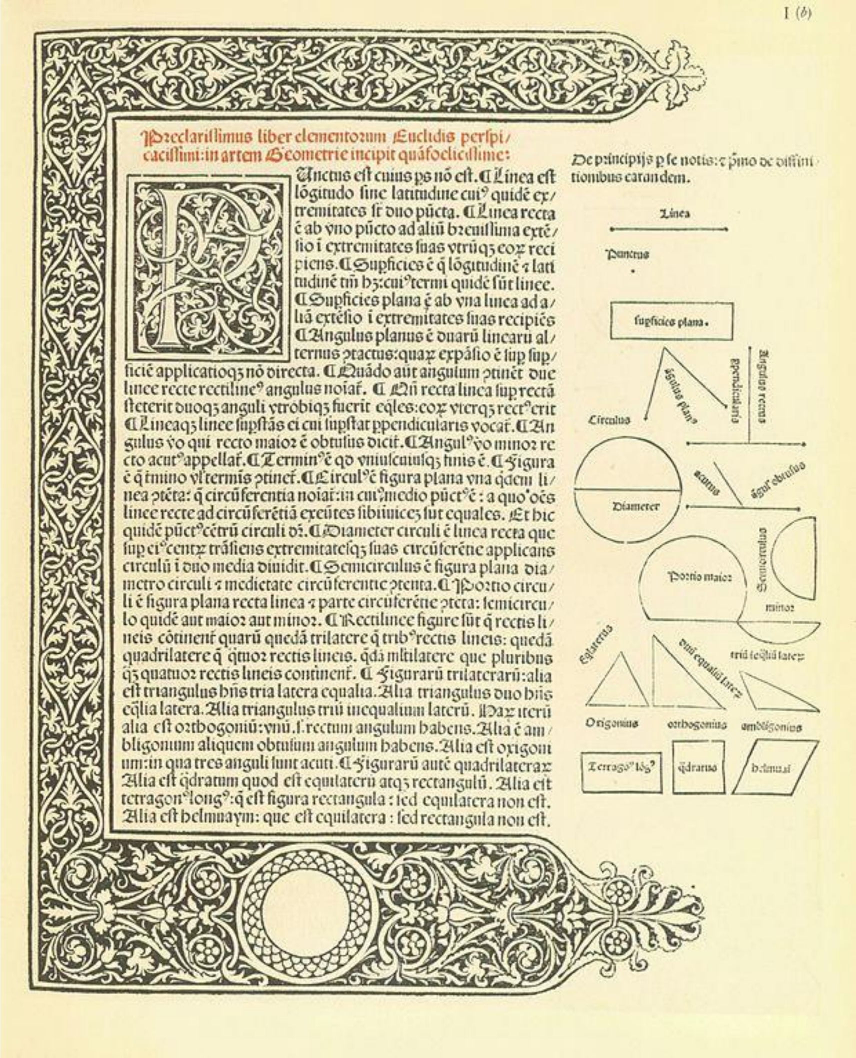
Geometrie a confronto

La lezione conclusiva sulla geometria sferica è stata dedicata a un confronto tra gli assiomi e i teoremi della geometria di Euclide e quelli della geometria di Riemann. In particolare è stata presentata la dimostrazione di un teorema di geometria sferica.

Euclide

(matematico greco

– 300 circa)



Elementi

opera in 13 libri

Libro I – I postulati

Si postula, ovverosia si domanda:

1. che da un punto qualsiasi si possa condurre un segmento ad ogni altro punto

2. che ogni segmento si possa prolungare continuamente per diritto

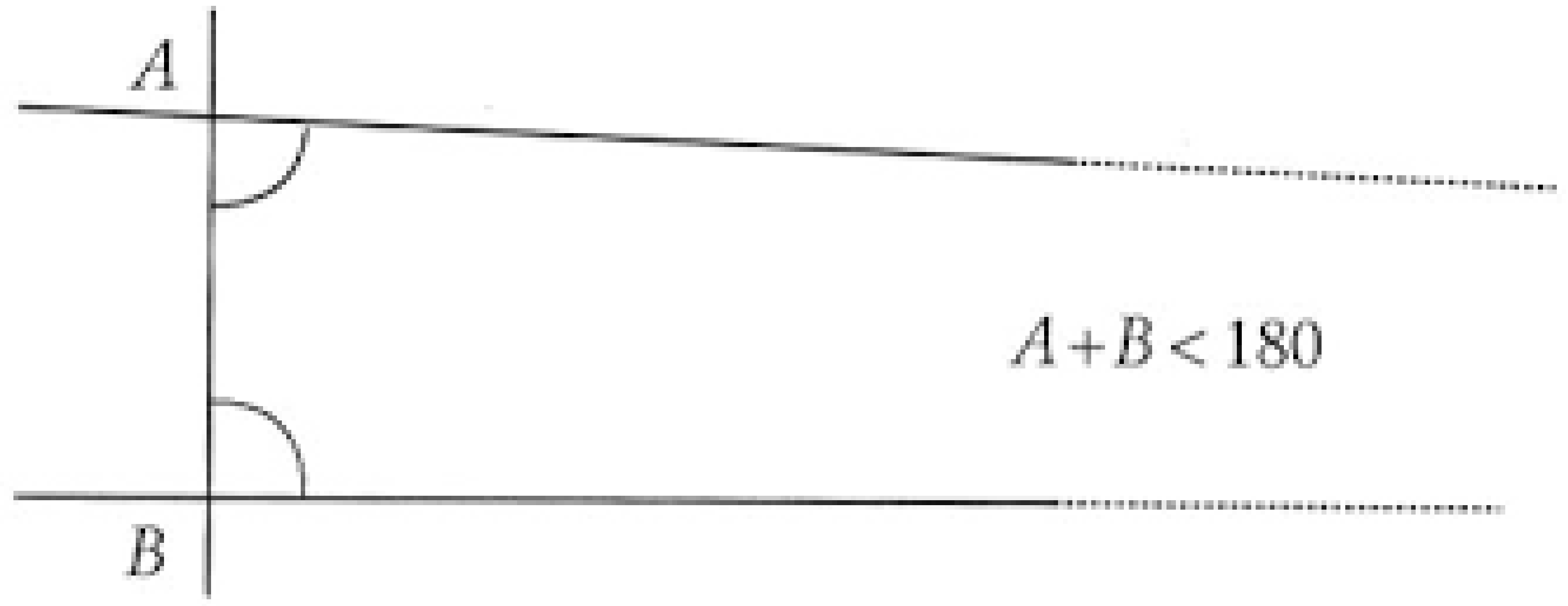
3. che con ogni centro e ogni distanza si possa descrivere una circonferenza

Libro I – I postulati

Si postula, ovverosia si domanda:

4. che tutti gli angoli retti siano uguali tra loro

5. (**Postulato della parallela**) che se una retta, incontrandone altre due, forma gli angoli interni da una stessa parte tale che la loro somma sia minore di due retti, le due rette, prolungate all’infinito, si incontrino dalla parte in cui la somma dei due angoli è minore di due retti.


A
B
$A+B<180$

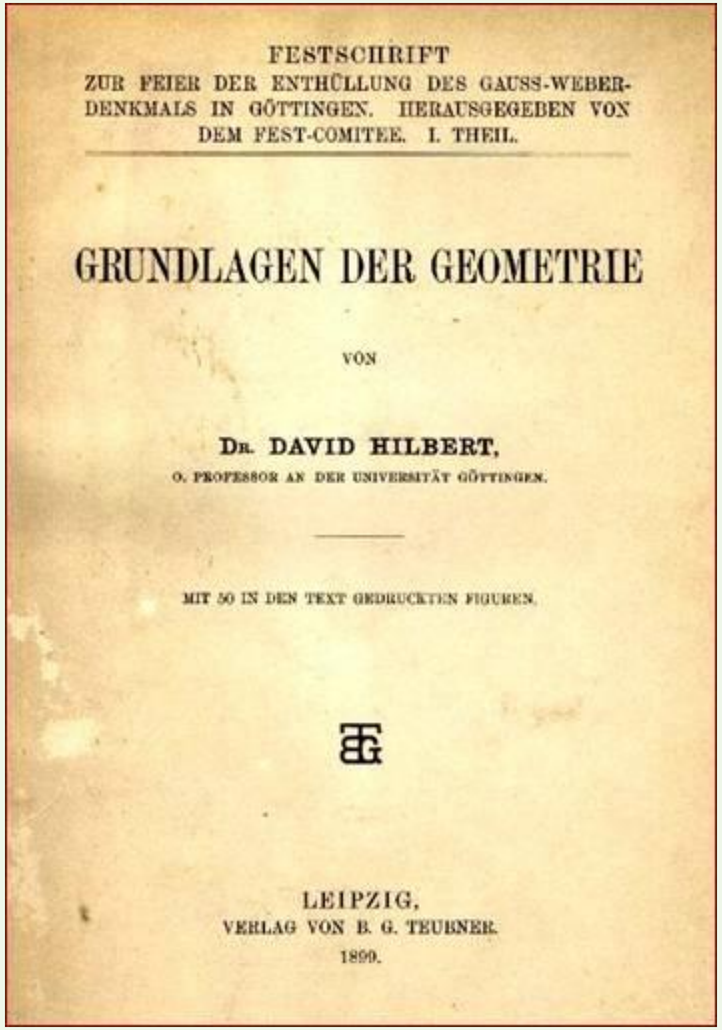
David Hilbert

(matematico tedesco

1862 – 1943)

Fondamenti della geometria

(1899)


FESTSCHRIFT
ZUR FEIER DER ENTHÜLLUNG DES GAUSS-WEBER-DENKMALS IN GÖTTINGEN. HERAUSGEGEBEN VON DEM FEST-COMITEE. I. THEIL.

GRUNDLAGEN DER GEOMETRIE

VON

DR. DAVID HILBERT,
O. PROFESSOR AN DER UNIVERSITÄT GÖTTINGEN.

MIT 50 IN DEN TEXT GEDRUCKTEN FIGUREN.

LEIPZIG,
VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1899.

Geometrie a confronto

Enti primitivi a confronto

Geometria piana	Geometria sferica
Punto	Punto
Retta	Circonferenza massima
Piano	Superficie sferica

Definizioni a confronto

Geometria piana	Geometria sferica
Segmento	Il minore dei due archi di circonferenza massima tra due punti
In tutte e due le geometrie il "segmento" costituisce il "cammino più breve" (**geodetica**) tra due punti.	
Semiretta	
Semipiano	Metà della superficie sferica
Poligono come intersezione di opportuni semipiani	Poligono come intersezione di semipiani
Rette perpendicolari	Circonferenze massime perpendicolari

Assiomi a confronto

Geometria piana	Geometria sferica
Per due punti distinti passa una e una sola retta	Vale solo se i punti non sono diametralmente opposti
Assegnato un verso di percorrenza è possibile ordinare i punti di una retta (cioè stabilire se un punto A precede o meno un punto B)	Assegnato un verso di percorrenza non è possibile ordinare i punti di una retta (cioè stabilire se un punto A precede o meno un punto B)
Assioma di partizione del piano	Vale con la sola eccezione che se si prendono sui due semipiani due punti diametralmente opposti non è unico il segmento che li unisce

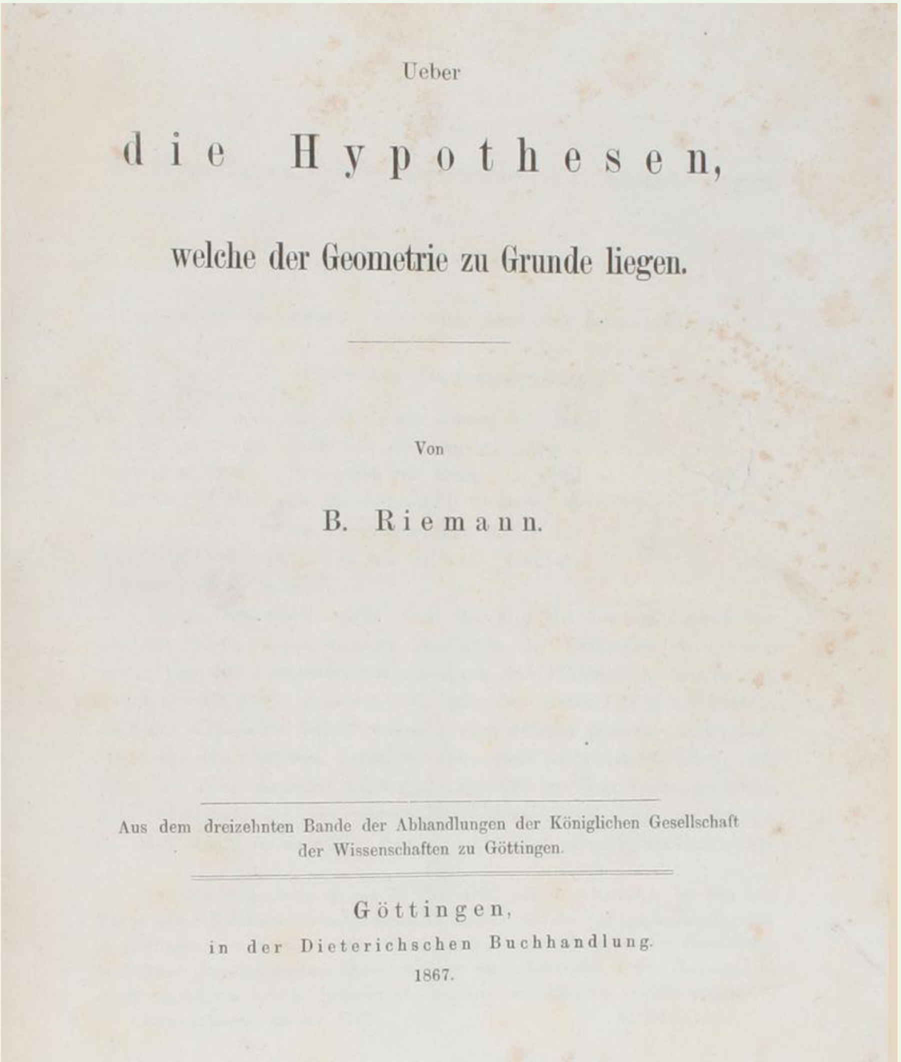
Assiomi a confronto

Geometria piana	Geometria sferica
Primo criterio di congruenza dei triangoli	Primo criterio di congruenza dei triangoli (indicato come teorema dalla maggior parte degli autori)
Quinto postulato di Euclide	Assioma di **Riemann**: "due rette qualsiasi del piano hanno sempre almeno un punto in comune". Nella geometria sferica hanno in comune sempre due punti diametralmente opposti

Bernhard Riemann

(matematico tedesco

1826 – 1866)


Ueber

die Hypothesen,

welche der Geometrie zu Grunde liegen.

Von

B. Riemann.

Aus dem dreizehnten Bande der Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen.

Göttingen,
in der Dieterichschen Buchhandlung.
1867.

Sulle ipotesi che stanno

alla base della geometria

(1854)

Teoremi a confronto

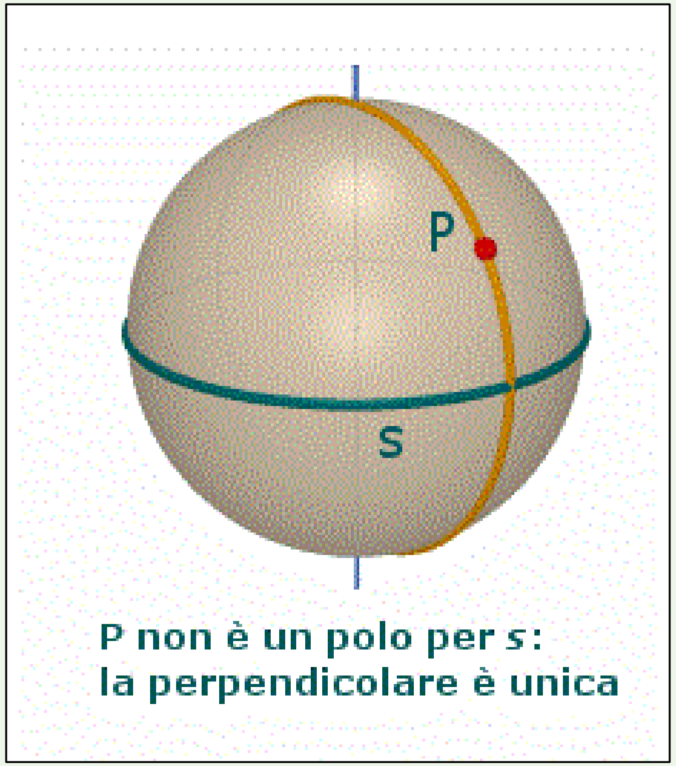
Geometria piana	Geometria sferica
Primo teorema dell’angolo esterno	Non validità del "Primo teorema dell’angolo esterno" mediante controesempio (triangolo trirettangolo)
Criterio del parallelismo	Non validità del "Criterio del parallelismo" mediante controesempio (prolungando i lati di un triangolo trirettangolo)
La somma degli angoli interni di un triangolo è pari a un angolo piatto	La somma S_i degli angoli interni di un triangolo è tale che 180° (un angolo piatto) < S_i < 540° (tre angoli piatti)

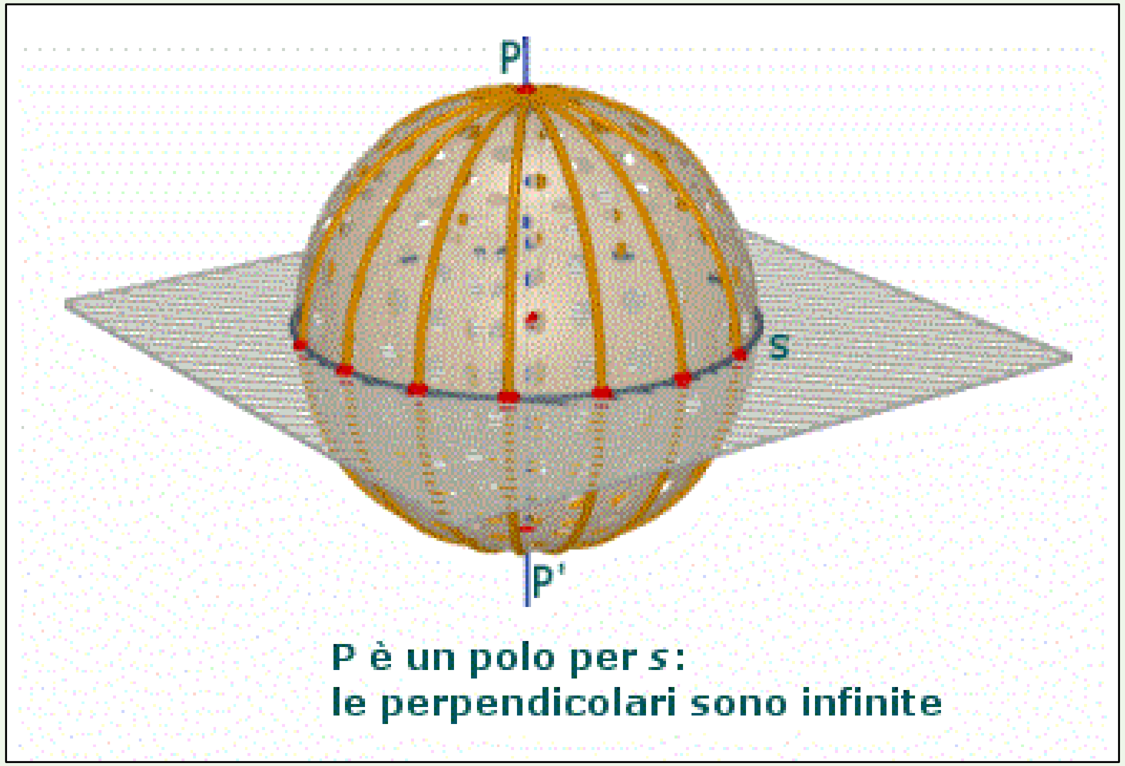
Teoremi a confronto

Geometria piana	Geometria sferica
La somma degli angoli interni di un quadrilatero è pari a due angoli piatti	La somma S_i degli angoli interni di un quadrilatero è tale che 360° (due angoli piatti) < S_i < 720° (quattro angoli piatti)
Secondo criterio di congruenza dei triangoli e sua generalizzazione	Secondo criterio di congruenza dei triangoli (non la sua generalizzazione!)
Terzo criterio di congruenza dei triangoli	Terzo criterio di congruenza dei triangoli

Teoremi a confronto

Geometria piana	Geometria sferica
Non c’è relazione tra l’area di un triangolo e la somma dei suoi angoli interni	$\alpha+\beta+\gamma=180°+\frac{A\cdot 180°}{\pi R^2}$
Esistono triangoli simili non congruenti	Non esistono triangoli simili non congruenti: quarto criterio di congruenza dei triangoli
Unicità della perpendicolare a una retta per un punto	Vale solo se il punto e la retta non sono un "polo" e il relativo "equatore"

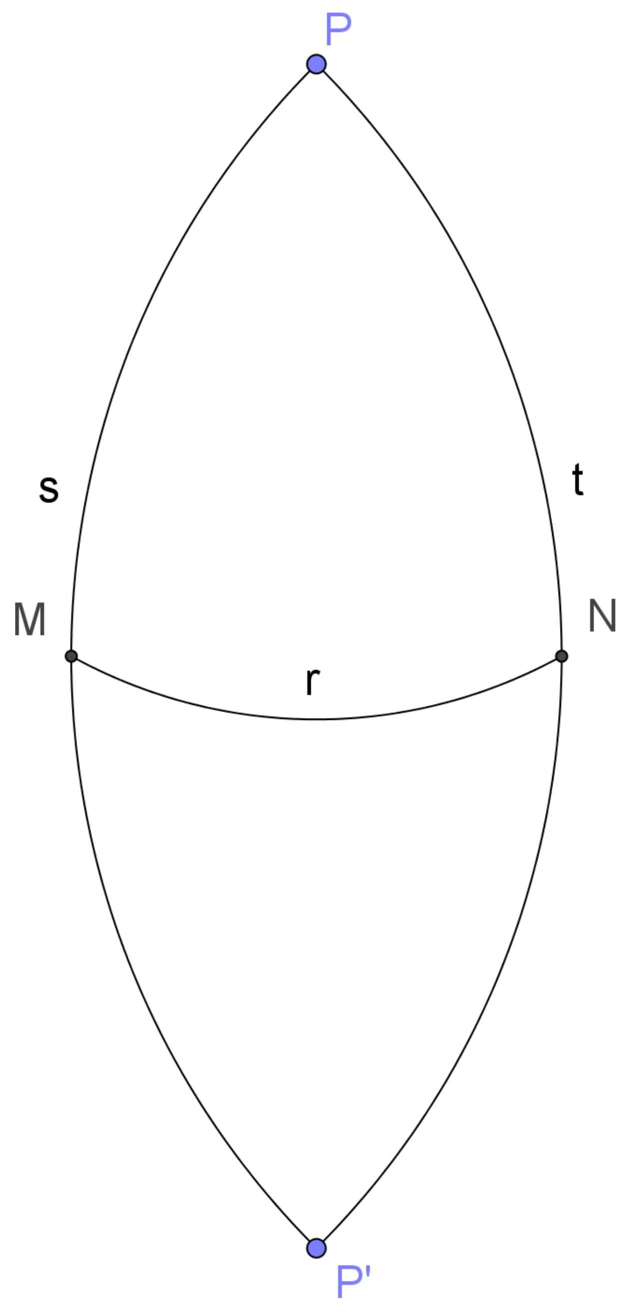

P
s
P non è un polo per *s*:
la perpendicolare è unica


P
s
P'
P è un polo per *s*:
le perpendicolari sono infinite

Dunque, mentre cade l’esistenza della parallela da un punto a una "retta", cade anche l’unicità della perpendicolare da un punto a una "retta".

Teorema

Se la retta *r* è perpendicolare a uno dei segmenti che unisce due punti diametralmente opposti P e P' ed è passante per il suo punto medio M, allora ogni altro segmento che unisce P con P' è diviso a metà dalla retta *r* ed è perpendicolare a essa.


P
s
t
M
N
r
P'

Hp:

PM $\cong$ MP'

$\widehat{\mathrm{PMN}} \cong \widehat{\mathrm{P'MN}}$

Th:

PN $\cong$ NP'

$\widehat{\mathrm{PNM}} \cong \widehat{\mathrm{P'NM}}$

Dimostrazione

Siano *s* e *t* due rette sferiche.

Per l'assioma di Riemann *s* e *t* si incontrano in un punto P. Allora esse si incontrano anche nel punto diametralmente opposto P'. Sia M il punto medio di PP' sulla retta *s* e si tracci per M la perpendicolare *r* a *s*. Per l'assioma di Riemann *r* incontra la retta *t* in un punto N.

Consideriamo i triangoli sferici MNP e MNP':

- $MP \cong MP'$ per ipotesi
- MN in comune
- $N\widehat{M}P \cong N\widehat{M}P'$ per ipotesi

Allora i due triangoli sono congruenti per il primo criterio di congruenza dei triangoli.

Come conseguenza si avrà:

- NP $\cong$ NP' (N è punto medio del segmento PP' della retta t)
- $\widehat{\mathrm{PNM}} \cong \widehat{\mathrm{P'NM}}$. Dal momento che i due angoli sono adiacenti, allora i due angoli sono retti. Dunque la retta *r* è perpendicolare alla retta *t*.

Dal momento che, fissati P e P', lo stesso ragionamento può essere ripetuto per qualsiasi altra retta passante per essi, si può considerare conclusa la dimostrazione.

In chiusura della lezione agli studenti è stata posta la seguente domanda:

"L’assioma di Riemann costituisce l’unica possibile negazione del V postulato di Euclide?".

La geometria della pseudosfera

L’attività si è svolta facendo uso di un modello di pseudosfera rivestito di un materiale tale da poter essere utilizzato come una sorta di lavagna "iperbolica". Per tracciare le geodetiche e per poter misurare l’ampiezza degli angoli si è fatto uso di righe "molli" non graduate e di un goniometro "molle".

Prima attività

Somma degli angoli interni di un triangolo iperbolico

Gli studenti, sollecitati dagli insegnanti hanno costruito sulla lavagna "iperbolica" due diversi triangoli e ne hanno misurato le ampiezze degli angoli interni. Sono così pervenuti all’affermazione che sulla pseudosfera la somma degli angoli interni di un triangolo non è costante ed è minore di un angolo piatto.

Seconda attività

Assioma di Lobačevskij

Gli studenti hanno potuto riflettere sugli assiomi già studiati e concludere che sulla pseudosfera non possono essere validi né l’assioma di Euclide (altrimenti la somma degli angoli interni di un triangolo sarebbe pari a un angolo piatto) né l’assioma di Riemann (altrimenti la somma degli angoli interni di un triangolo sarebbe maggiore di un angolo piatto).

Sono così pervenuti all’esistenza, per un punto esterno a una retta data, di almeno due parallele ad essa (assioma di Lobačevskij). Hanno poi potuto verificare, per qualche punto e per qualche retta, che sulla pseudosfera è valido l’assioma di Lobačevskij.

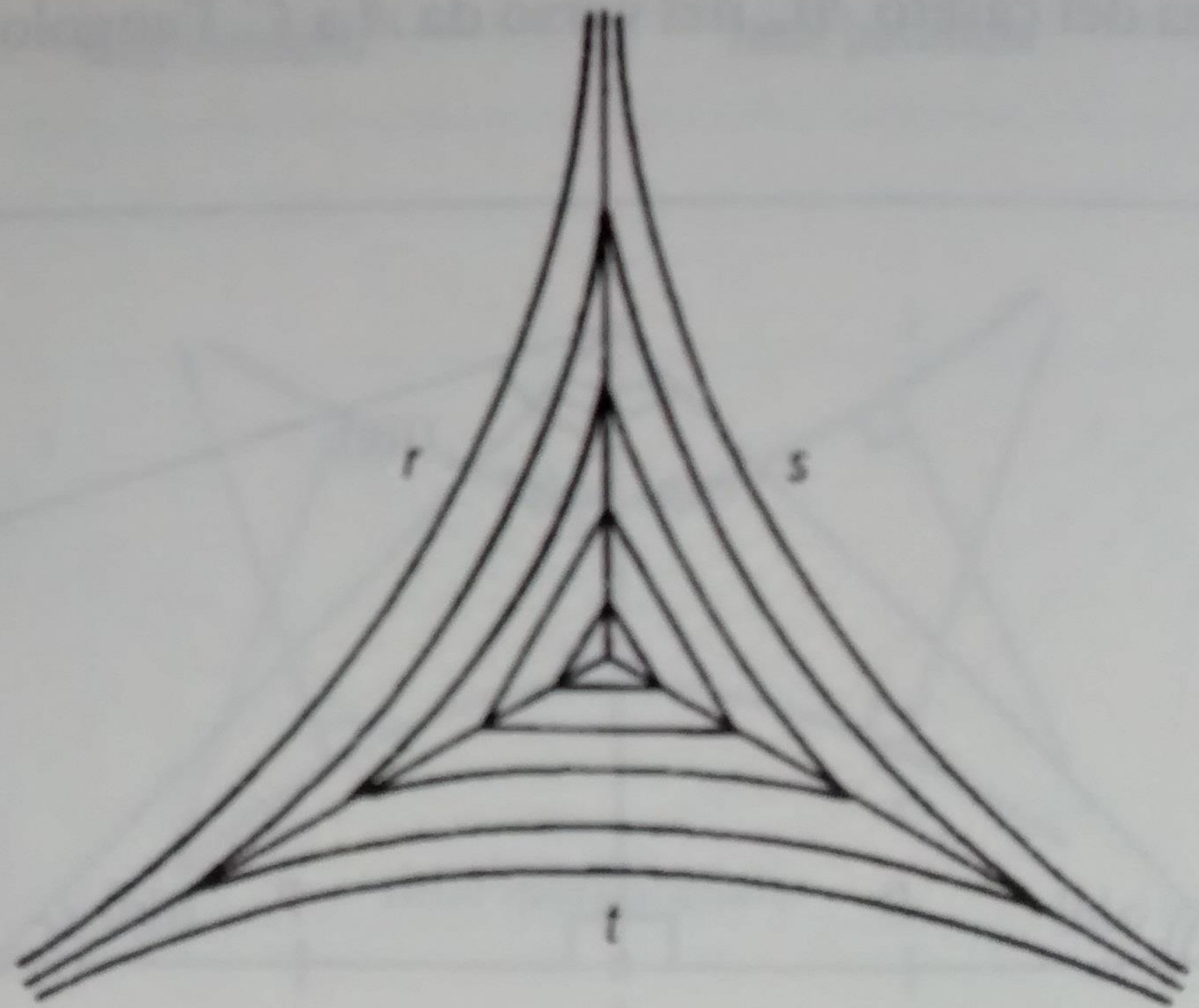
Terza attività

Triangoli iperbolici regolari

In analogia con quanto visto per la geometria sferica, gli studenti hanno costruito, a partire da un polo, tre semirette in modo da suddividere l’angolo giro in tre angoli di 120°. Presa poi su tali semirette una stessa distanza, pari a 5 cm, hanno costruito un primo triangolo equilatero. Altri triangoli equilateri sono stati costruiti a distanze pari a 10 cm e 15 cm dal polo.

Misurando gli angoli interni di ciascun triangolo equilatero gli studenti sono potuti pervenire alla conclusione che la somma degli angoli interni di un triangolo equilatero decresce al crescere dell’area del triangolo stesso.

FIGURA 61



Si ha dunque che la somma degli angoli interni di un triangolo iperbolico si avvicina a un angolo piatto quanto minore è l’area del triangolo, cioè, come già osservato nella geometria sferica, quanto minore è la "curvatura" del triangolo o quanto più il triangolo iperbolico si avvicina a un triangolo piano.

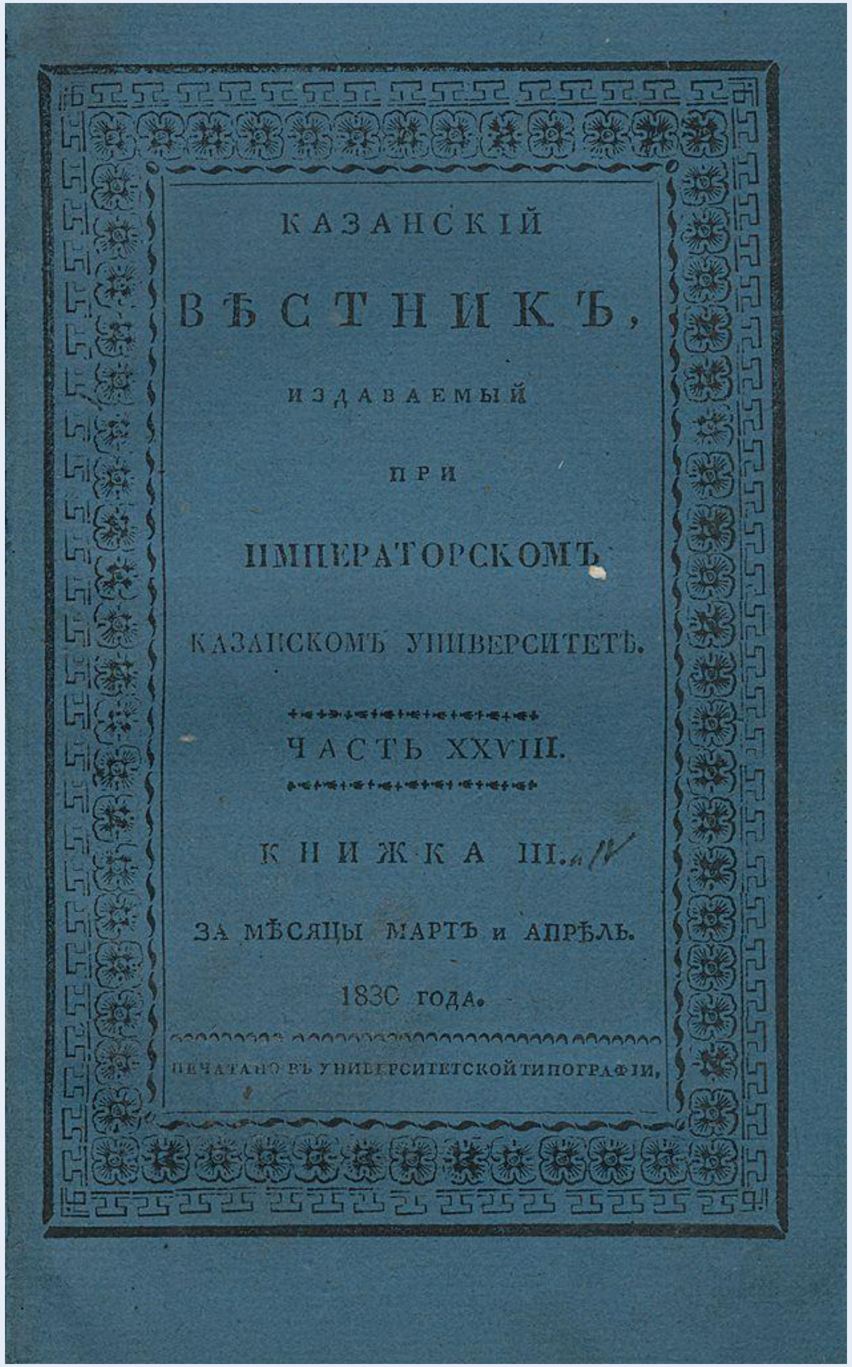
Nikolaj Ivanovič Lobačevskij

(matematico russo

1792 – 1856)

Sui principî della geometria

(1829)

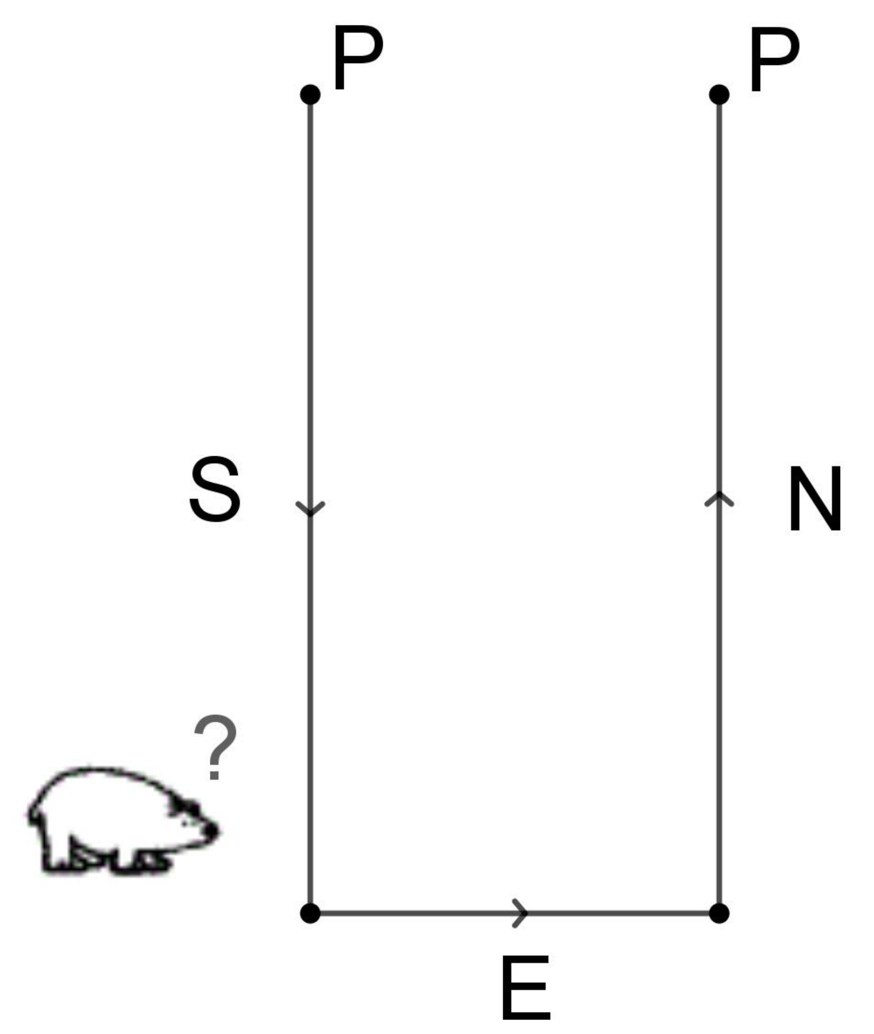


Al rientro dalle vacanze

Esercizi

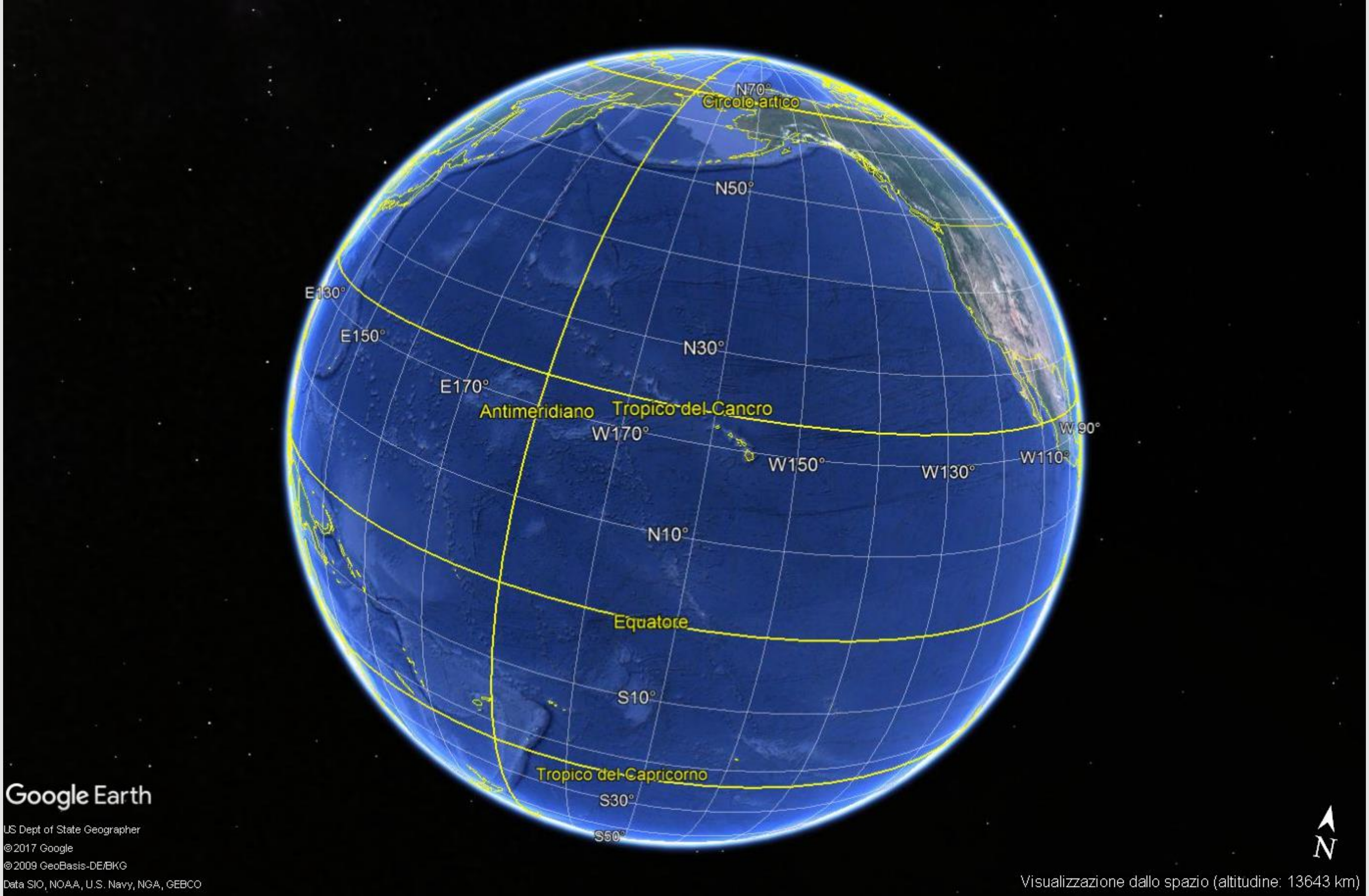
Un orso, inizialmente in un punto P, si sposta di due miglia verso sud. Poi esso cambia direzione e percorre un miglio verso est. Infine si volge a sinistra e così, dopo aver percorso due miglia verso nord, si ritrova esattamente al punto P di partenza. Di che colore è la pelliccia di quest’orso?

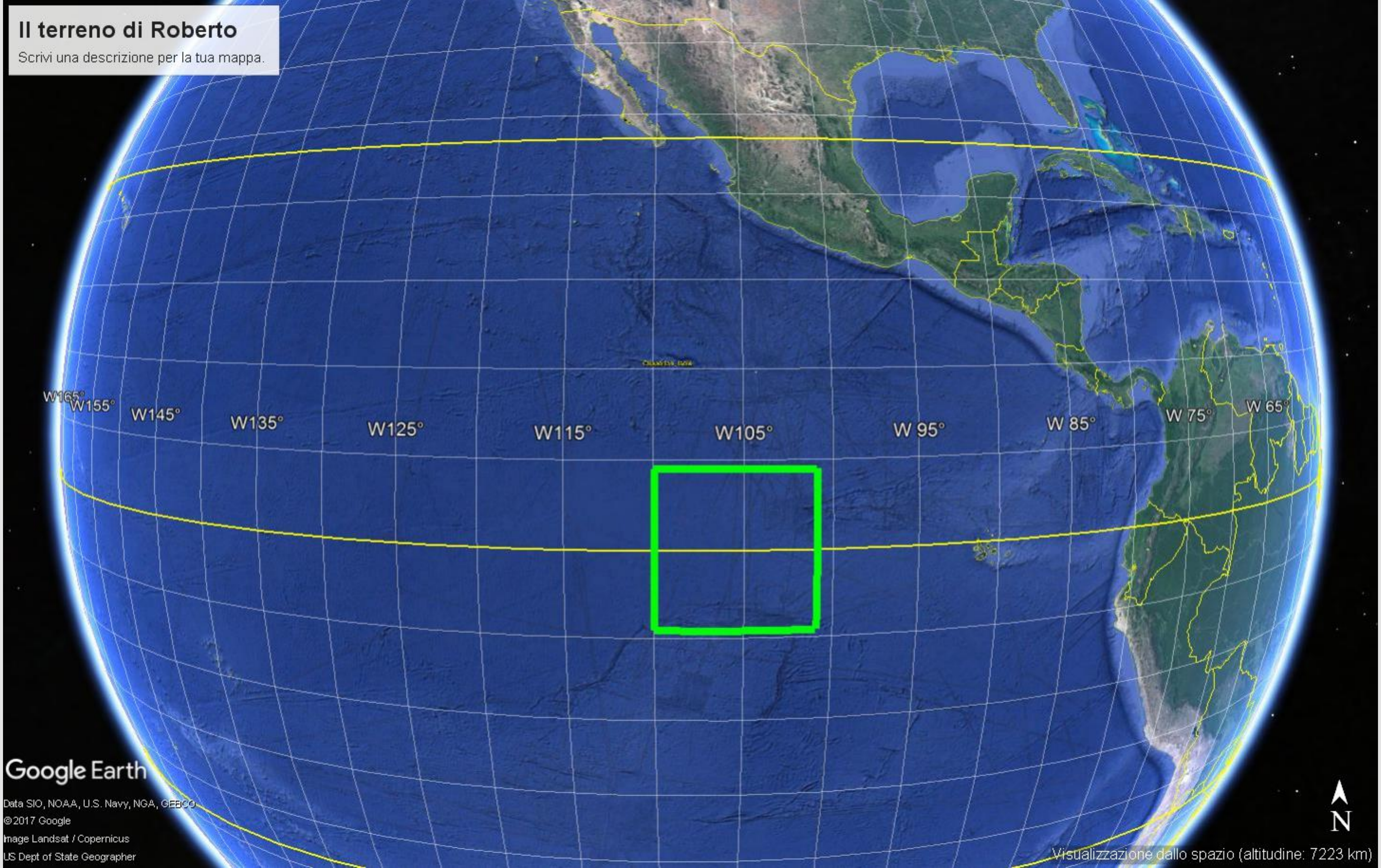
Polya G. , *Come risolvere i problemi di matematica. Logica ed euristica nel metodo matematico*, Milano, Feltrinelli, 1976


P
P
S
N
?
E

Roberto vuole comperare un appezzamento di terreno racchiuso da quattro linee di confine tali che due di esse abbiano proprio la direzione nord-sud e le altre due est-ovest; ciascuno delle quattro linee infine deve misurare esattamente 100 metri. Può Roberto comperare una siffatta porzione di terreno negli Stati Uniti?

Polya G. , *Come risolvere i problemi di matematica. Logica ed euristica nel metodo matematico*, Milano, Feltrinelli, 1976


N70°
Circolo artico
N50°
E130°
E150°
N30°
E170°
Antimeridiano
Tropico del Cancro
W170°
W 90°
W110°
W150°
W130°
N10°
Equatore
S10°
Tropico del Capricorno
S30°
S50°
Google Earth
US Dept of State Geographer
©2017 Google
©2009 GeoBasis-DE/BKG
Data SIO, NOAA, U.S. Navy, NGA, GEBCO
N
Visualizzazione dallo spazio (altitudine: 13643 km)


Il terreno di Roberto
Scrivi una descrizione per la tua mappa.
W165°
W155°
W145°
W135°
W125°
W115°
W105°
W 95°
W 85°
W 75°
W 65°
Google Earth
Data SIO, NOAA, U.S. Navy, NGA, GEBCO
©2017 Google
Image Landsat / Copernicus
US Dept of State Geographer
N
Visualizzazione dallo spazio (altitudine: 7223 km)