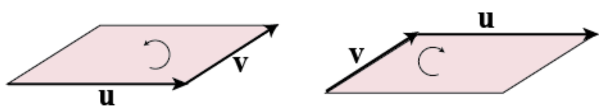
III Lezione
Gli spatheck

Grassmann chiama *spatheck* il “prodotto” di due vettori. Questa operazione produce una “estensione di dimensione due” cioè un’area orientata la quale a sua volta produce un asse di rotazione (perpendicolare al piano che contiene l’area). Questi oggetti possono identificarsi con un vettore in due modi diversi a seconda del verso che si assegna all’asse. I fisici fanno una distinzione tra vettore polare (che sarebbe il vettore geometrico matematico) e pseudo vettore o vettore assiale che sarebbe un “vettore” con le stesse caratteristiche dello spatheck di Grassmann. Vedremo più avanti questa distinzione. Per evitare confusione useremo qui il termine storico spatheck.

3.1
Seguendo l'impostazione di Grassmann , diciamo che un vettore **u** che trasla lungo un secondo vettore **v** descrive una estensione che Grassmann chiama uno s*patheck.*.



L’ordine dei due vettori è molto importante e si rappresenta nella figura disegnando il primo vettore **u** e facendo partire il secondo **v** dal punto finale del primo. Questo ordine definisce un senso di rotazione “da **u** a **v**” nel piano dei due vettori. Cambiando l’ordine dei due vettori si inverte il verso di rotazione come si vede nella figura.

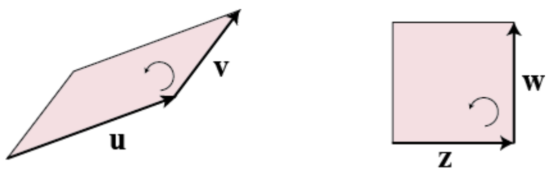
Nello spatheck non contano il vettore iniziale **u** e neppure il vettore di traslazione **v** quello che conta è l’*estensione* generata da quella traslazione (cioè, in questo caso bidimensionale l’area del parallelogramma) la *giacitura* del piano dove tale traslazione è avvenuta e il *verso di rotazione* (da **u** a **v**) che si è determinato. Nel linguaggio comune, in geografia, le giaciture non hanno un nome proprio tranne la giacitura orizzontale che è quella di un qualunque piano perpendicolare alla verticale. Di giaciture verticali ve ne sono molte a seconda della direzione che viene ad assumere l’intersezione di questo piano con il piano orizzontale.

3.2
Due coppie ordinate di vettori (**u,v**) e (**z,w**) definiscono lo stesso spatheck se hanno uguale

- la giacitura
- il verso di rotazione
- l’estensione

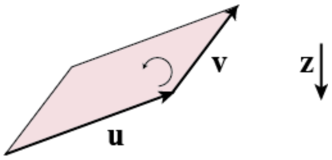
Lo spatheck individuato dalla coppia ordinata di vettori (**u**,**v**) sarà denotata col simbolo $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ e sarà rappresentata col disegno precedente nel quale si evidenzia l’estensione generata, la rotazione e il piano dei due vettori. Dunque $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = \mathbf{z} \wedge \mathbf{w}$ se e solo se i vettori si trovano su piani paralleli, definiscono lo stesso verso di rotazione e la stessa estensione.

Vediamo ora quali forme diverse può assumere uno stesso spatheck. Osserviamo intanto che uno spatheck u può sempre assumere la “forma quadrata”. Se $u = \mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ basterà costruire, sul piano dei due vettori, un quadrato che abbia la stessa area del parallelogramma generato da **u** e **v** e orientare i suoi lati per avere lo stesso verso di rotazione.

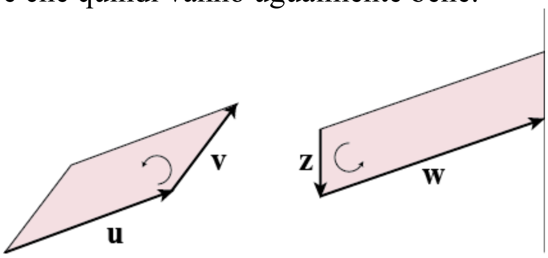


$$\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = \mathbf{z} \wedge \mathbf{w}$$

Posiamo anche cambiare il vettore iniziale di uno spatheck scegliendo un qualsiasi vettore **z** e, su questo, costruire un parallelogramma con la stessa area e verso. La figura rappresenta uno spatheck e un vettore **z** sul quale vogliamo costruire *lo stesso* spateheck



Ecco il risultato. Ovviamente una volta scelto **z** esistono infiniti vettori **w** che danno luogo a parallelogrammi equivalenti e che quindi vanno ugualmente bene.



$$\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = \mathbf{z} \wedge \mathbf{w}$$

Osserviamo infine che ogni rettangolo o, più in generale, ogni parallelogramma orientato può essere visto come uno spateheck.

L'animazione geogebra *La natura degli Spatheck*, mostra le diverse forme di uno stesso spatheck le sue possibili rappresentazioni.

Se **u** e **v** hanno la stessa direzione se cioè sono linearmente dipendenti, il parallelogramma degenera in un segmento e non si genera alcuna estensione, ne giacitura, ne rotazione. In questo caso lo spatheck risultante, sarà detto lo s*patheck nullo.* Dunque **u, v** sono linearmente dipendenti se e solo se $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = \mathbf{0}$. In particolare

$$\boxed{\mathbf{u} \wedge \mathbf{u} = \mathbf{0}}$$

Si vede già da questo, come questo tipo di prodotto, sia molto strano dato $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = \mathbf{0}$ non implica l'annullamento di uno dei due fattori. Di più la condizione geometrica che tre punti A, B, C siano allineati si traduce nella "equazione"

$$\mathbf{AB} \wedge \mathbf{BC} = \mathbf{0}$$

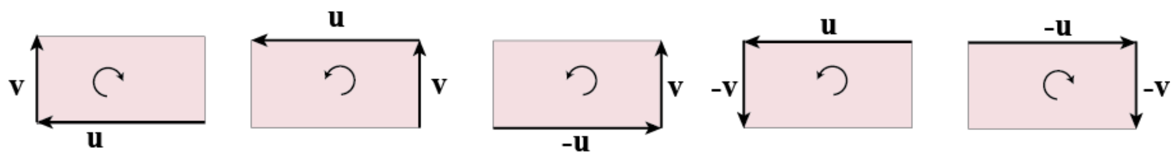
3.3

Se due spatheck $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$ si trovano sullo stesso piano non è difficile definire la loro somma: la giacitura sarà ovviamente quella del piano comune mentre l'area e il verso sarà il risultato di una "somma algebrica": se i due spatheck $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$ hanno la stessa orientazione la somma sarà la somma delle due aree con quella orientazione. Se invece le orientazioni sono opposte $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$ avrà come area la differenza tra l'area maggiore con quella minore e come orientamento quello dello spatheck di area maggiore.

In questo modo la somma di due spatheck con la stessa giacitura la stessa estensione e orientazioni opposte è nulla. Ogni spatheck $\boldsymbol{u}$ ha dunque un suo opposto che indicheremo con $-\boldsymbol{u}$ che verifica la relazione

$$\boldsymbol{u} + (-\boldsymbol{u}) = \mathbf{0}.$$

Verifichiamo con delle immagini la "regola dei segni". Sia $\boldsymbol{u} = \mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ allora



$\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ $\quad$ $\mathbf{v} \wedge \mathbf{u}$ $\quad$ $(-\mathbf{u}) \wedge \mathbf{v}$ $\quad$ $\mathbf{u} \wedge (-\mathbf{v})$ $\quad$ $(-\mathbf{u}) \wedge (-\mathbf{v})$

$$-(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) = (-\mathbf{u}) \wedge \mathbf{v} = \mathbf{u} \wedge (-\mathbf{v}) = \mathbf{v} \wedge \mathbf{u}$$

e dunque

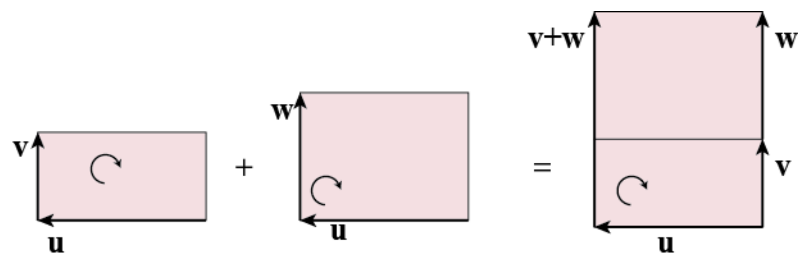
$$(-\mathbf{u}) \wedge (-\mathbf{v}) = \mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$$

La proprietà

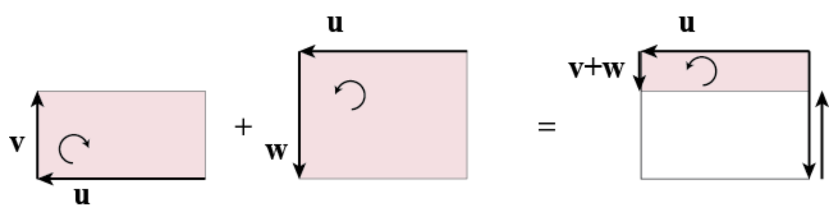
$$\boxed{\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = -\mathbf{v} \wedge \mathbf{u}}$$

si chiama *proprietà anti commutativa* ed è la prima volta che nel calcolo appare una proprietà così strana!

Vediamo ora con delle immagini come l'operazione di somma di due spatheck complanari si rifletta sui vettori che definiscono i due spatheck. Rappresentiamo $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$ con lo stesso vettore iniziale $\mathbf{u}$: $\boldsymbol{u} = \mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$, $\boldsymbol{v} = \mathbf{u} \wedge \mathbf{w}$ cosa sempre possibile. Ecco cosa accade



stessa orientazione

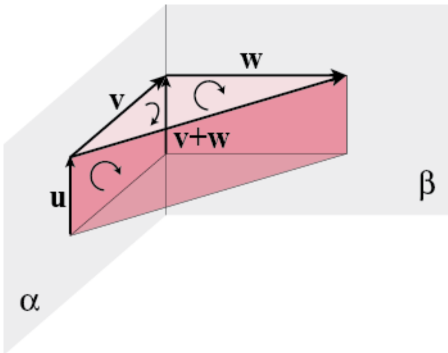


Orientazioni opposte

Nei due casi risulta verificata questa notevolissima *proprietà distributiva* della somma rispetto al "prodotto".

$$\boxed{\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} + \mathbf{u} \wedge \mathbf{w} = \mathbf{u} \wedge (\mathbf{v} + \mathbf{w})}$$

Vediamo ora come si possano sommare due spatheck che si trovino su due giaciture diverse. Supponiamo che lo spatheck $\boldsymbol{u}$ si trovi sul piano α e lo spatheck $\boldsymbol{v}$ sul piano β . Poiché i due piani non sono paralleli, essi avranno una retta in comune; sia **u** un vettore di tale retta. Rappresentiamo i due spatheck con lo stesso vettore **u** come primo vettore e definiamo la somma mediante la proprietà distributiva. Vediamo questa costruzione con una immagine



Naturalmente, come nel caso di vettori non paralleli, l'estensione definita dalla somma di due spatheck è più piccola della somma delle due estensioni come invece avviene nel caso di due spatheck sullo stesso piano.

Abbiamo in questo modo definito tra gli spatheck una operazione di somma che è associativa, commutativa, con un elemento neutro e l'opposto, esattamente come con i vettori geometrici proprio perché queste proprietà sono ereditate dalle analoghe proprietà relative alla somma di due vettori.

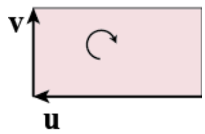
$$\boldsymbol{u}+(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}) = (\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})+\boldsymbol{w} \qquad (1)$$
$$\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}+\boldsymbol{u} \qquad (2)$$
$$\boldsymbol{u} + \mathbf{0} = \boldsymbol{u} \qquad (3)$$
$$\boldsymbol{u} + (-\boldsymbol{u}) = \mathbf{0} \qquad (4)$$

Per la proprietà commutativa ad esempio, abbiamo:

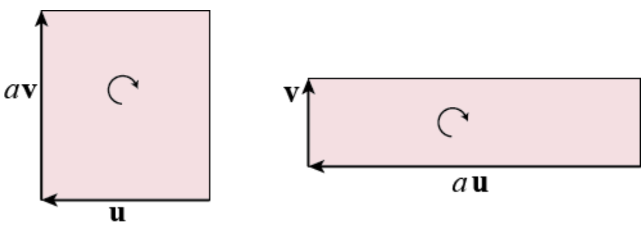
$$\mathbf{u}\wedge\mathbf{v} + \mathbf{u}\wedge\mathbf{w} = \mathbf{u}\wedge(\mathbf{v}+\mathbf{w}) = \mathbf{u}\wedge(\mathbf{w}+\mathbf{v}) = \mathbf{u}\wedge\mathbf{w} + \mathbf{u}\wedge\mathbf{v}\,.$$

3.4

Gli spatheck, come i vettori, possono moltiplicarsi per uno scalare; se a è un numero reale e $\boldsymbol{u}$ uno spatheck , il prodotto $a\boldsymbol{u}$ è lo spatheck che ha la stessa giacitura di $\boldsymbol{u}$, l'estensione data dal prodotto dell'estensione di $\boldsymbol{u}$ e con $|a|$, e l'orientazione uguale a quella di $\boldsymbol{u}$ se a>0, opposta se a<0. In particolare il prodotto di -1 per $\boldsymbol{u}$ è lo spatheck opposto $-\boldsymbol{u}$ dato che questa operazione cambia solo l'orientazione di $\boldsymbol{u}$. Vediamo come si interpreta geometricamente questa nuova operazione. Sia $\boldsymbol{u} = \mathbf{u}\wedge\mathbf{v}$ lo spatheck rappresentato nella figura e a>0 un numero positivo



per moltiplicare per a l'area del rettangolo basterà moltiplicare per a una sua misura che sia quella lungo **u** o lungo **v** non conta:



Non è difficile dimostrare, qualunque sia il segno di a la formula seguente

$$\boxed{a\,(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) = (a\,\mathbf{u}) \wedge \mathbf{v} = \mathbf{u} \wedge (a\,\mathbf{v})}$$

Questa operazione verifica le usuali proprietà valide per i vettori proprio perché da queste sono ereditate:

$$a(b\mathcal{u}) = (ab)\mathcal{u} \qquad (5)$$

$$(a+b)\mathcal{u} = a\mathcal{u} + b\mathcal{u} \qquad (6)$$

$$a(\mathcal{u} + \mathcal{v}) = a\mathcal{u} + a\mathcal{v} \qquad (7)$$

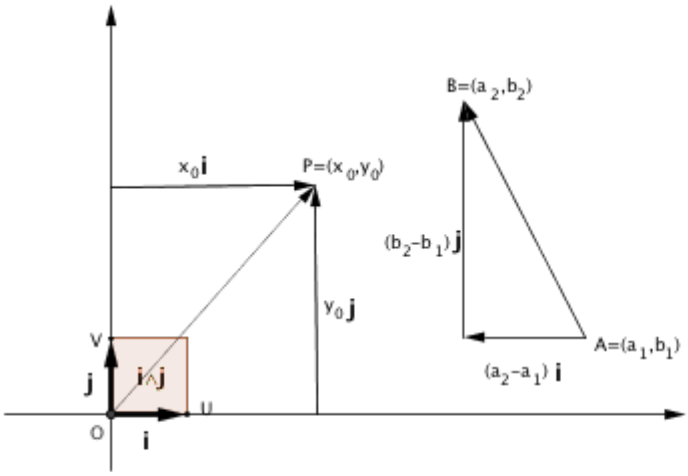
$$1\mathcal{u} = \mathcal{u} \qquad (8)$$

Vediamo ad esempio come si dimostra la (6). Scegliamo un rappresentante $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ per $\mathcal{u}$.
$(a+b)\mathcal{u} = (a+b)\ \mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = ((a+b)\mathbf{u}) \wedge \mathbf{v} = (a\mathbf{u}+b\mathbf{u}) \wedge \mathbf{v} = (a\mathbf{u} \wedge \mathbf{v})+(b\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) = a(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v})+b(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) = a\mathcal{u}+b\mathcal{u}$
Con gli spatheck ci siamo a questo punto costruito un armamentario algebrico (struttura che prende il nome di spazio vettoriale) che ci permette di fare tutti i calcoli che si facevano coi vettori con la possibilità di interpretare geometricamente in termini di area i risultati ottenuti.
In definitiva il prodotto vettoriale di due vettori produce dei nuovi oggetti che abbiamo chiamato spatheck secondo tre regole fondamentali

$$\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = -\,\mathbf{v} \wedge \mathbf{u}$$
$$(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \wedge \mathbf{w} = \mathbf{u} \wedge \mathbf{w} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{w}$$
$$a\,(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) = (a\,\mathbf{u}) \wedge \mathbf{v}$$

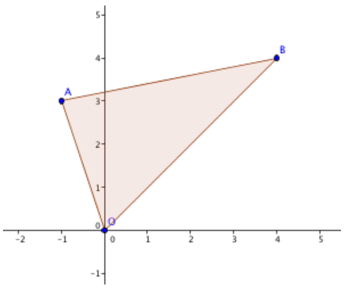
Nel gergo matematico si dice che il prodotto vettoriale è antisimmetrico (la prima delle tre proprietà) e bilineare (la seconda e la terza proprietà).

3.5 Nel piano cartesiano.
Fissiamo una base per i vettori del piano: sia U= (1,0) e V=(0,1), consideriamo i due vettori linearmente indipendenti **OU=i** e **OV = j**. Tali vettori sono una base per i vettori del piano.



Se P=(x_0,y_0) allora il vettore **OP**=x_0 **i**+y_0 **j**, Mentre se A=(a_1,b_1) e B=(a_2,b_2) allora il vettore
AB=AO+OB=OB-OA= (a_2 **i**+b_2 **j**) – (a_1 **i**+b_1 **j**) = ($a_2 - a_1$)**i** + ($b_2 - b_1$)**j**.
Lo spatheck **i** ∧ **j** è il quadrato di area 1 orientato in senso antiorario.

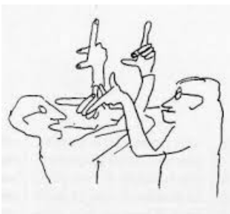
Esercizio
Nel piano cartesiano calcolare l'area del triangolo di vertici O=(0,0), A=(-1,3),B=(4,4).

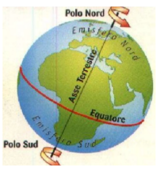


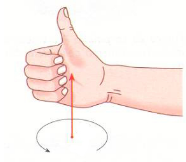
Abbiamo **OA**= -**i** + 3**j** , **OB** = 4**i** + 4**j**. Lo spatheck **OA** ∧ **OB** definisce l'area del parallelogramma di lato OA e OB, ora:
OA ∧ **OB**= (-**i** + 3**j**) ∧ (4**i** + 4**j**) =-4 **i** ∧ **j** + 12 **j** ∧ **i** = -16 **i** ∧ **j**
quindi l'area del parallelogramma, che è orientato in senso orario, vale 16 volte quella del quadrato unitario che vale 1, dunque l'area del triangolo è 8. In generale se A=(x_1 ,y_1) e B=(x_2,y_2) allora **OA** ∧ **OB** = (x_1 y_2 - x_2,y_1) **i** ∧ **j** e quindi il determinate $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$ si interpreta come area del parallelogramma di lati OA e OB.

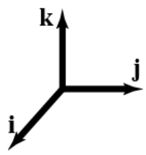
3.6 Un isomorfismo innaturale

L'insieme di tutti gli spatheck si può mettere in corrispondenza biunivoca con i vettori facendo corrispondere allo spatheck **u** ∧ **v** il vettore che ha la direzione ortogonale a quella del piano definito dai due vettori e il modulo uguale all'area che essi definiscono. Resta il problema di come definire il verso di tale vettore. Ora come la retta e il piano hanno due possibili orientazioni, ugualmente lo spazio ha pure due possibili orientazioni. L'orientazione di una retta è definita da un suo vettore **u** (-**u** sarà l'orientazione opposta) e due vettori della stessa retta definiscono la stessa orientazione se sono concordi. L' orientazione di un piano è definita da una coppia ordinata di due suoi vettori indipendenti (**u**,**v**) che definiscono un verso di rotazione: da **u** verso **v** che può essere oraria o antioraria. Nello spazio non abbiamo ne un nome per definire una orientazione ne un modo naturale come le lancette dell'orologio cui riferirci. I fisici se la cavano introducendo l'orientazione della "mano destra" (pollice, indice, medio) che deriva probabilmente dal "sistema terra" che ruota introno all'asse in senso antiorario (pollice, indice) con la scelta del terzo vettore dal polo Sud al polo Nord. In questo modo tre vettori (**u**,**v**,**w**) definiscono l'orientazione della "mano destra" se, immaginando di stringere la mano destra intorno a un asse da **u** verso **v** il vettore **w** ha la direzione del pollice.





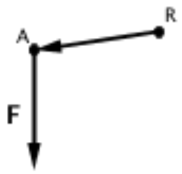




L'orientazione (**u**,**v**,**w**) e (**u**,**v**,-**w**) sono opposte così come le orientazioni (**u**,**v**,**w**) e (**v**,**u**,**w**). In definitiva possiamo dire in modo discorsivo che due terne definiscono la stessa orientazione se stringendo la mano dal primo vettore al secondo il pollice ha la stessa direzione del terzo vettore.
Per definire un isomorfismo tra gli spatheck e i vettori occorre dunque fissare una orientazione dello spazio che ci permetta di scegliere la direzione dell'asse. Poiché ne abbiamo a disposizione due possibili e la scelta di una delle due è assolutamente arbitraria, abbiamo quello che in matematica si chiama un isomorfismo non naturale, una identificazione cioè tra due spazi vettoriali, gli spatheck e i vettori dipendente da una scelta legittimamente compatibile con una scelta opposta. Vediamo più avanti come Feynman discute questa delicata questione.

3.7 Applicazioni in Fisica.

Il momento di una forza **F** applicata in un punto A rispetto a un punto R è, per definizione il prodotto **RA** ∧ **F**. Il senso fisico di questa definizione consiste nel considerare R ed A rigidamente collegati, tenere fisso il punto R e vedere se il sistema resta fermo o ruota. Il momento misura attraverso il prodotto $\mathbf{RA} \wedge \mathbf{F}$ questa rotazione dando sia il verso che l'intensità. Come sappiamo l'ordine dei fattori è essenziale e nel caso della figura



la rotazione che si genera è in senso antiorario. Questo prodotto è uno spatheck (usando la terminologia di Grassmann) o usando la terminologia dei fisici un vettore assiale dal momento che la direzione dell'asse di rotazione non ha alcun significato fisico. Per convenzione e poter fare dei conti i fisici scelgono quella "della mano destra".

Se abbiamo n forze parallele $\mathbf{F}_i = f_i\, \mathbf{f}$ applicate ai punti A_1 ,A_2, ... , A_n possiamo sommare i momenti rispetto a uno stesso punto R e abbiamo:

$$\mathbf{RA}_1 \wedge \mathbf{F}_1 + \mathbf{RA}_2 \wedge \mathbf{F}_2 + ... + \mathbf{RA}_n \wedge \mathbf{F}_n = f_1\, \mathbf{RA}_1 \wedge \mathbf{f} + f_2\, \mathbf{RA}_2 \wedge \mathbf{f} + ... + f_n\, \mathbf{RA}_n \wedge \mathbf{f} =$$
$$[f_1\, \mathbf{RA}_1 + f_2\, \mathbf{RA}_2 + ... + f_n\, \mathbf{RA}_n\,] \wedge \mathbf{f} = (f_1 + f_2 + ... + f_n\,)\, \mathbf{RC} \wedge \mathbf{f} =$$
$$= \mathbf{RC} \wedge (f_1\, \mathbf{f} + f_2\, \mathbf{f} + ... + f_n\, \mathbf{f}) = \mathbf{RC} \wedge \mathbf{F}$$

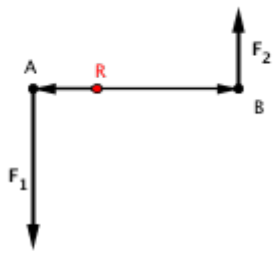
essendo $\mathbf{F} = f_1\, \mathbf{f} + f_2\, \mathbf{f} + ... + f_n\, \mathbf{f}$ la somma di tutte le forze. Se R è tenuto fisso il sistema ruota attorno a R.

Teorema (Grassmann-Varignon)

La somma dei momenti di n forze parallele è equivalente al momento della somma di tutte le forze applicate al centro della configurazione di punti pesati $\mathcal{A} = \{(A_1, f_1)\,, (A_2, f_2), ... , (A_n, f_n)\}$.

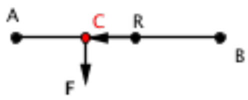
Se in particolare il punto R coincide col centro della configurazione allora $\mathbf{RC} = \mathbf{0}$ e il momento è nullo e dunque il sistema resta in equilibrio. Ciò significa che il centro geometrico coincide col baricentro fisico definito come quel punto dello spazio nel quale le forze peso di una configurazione di punti pesanti si equilibrano.

Vediamo in maggiore dettaglio il caso di due forze:



Sia $\mathbf{F}_1 = f_1\, \mathbf{f}$, $\mathbf{F}_2 = f_2\, \mathbf{f}$, $\mathbf{F} = f_1\, \mathbf{f} + f_2\, \mathbf{f}$ e C il centro della configurazione $(A,f_1),(B,f_2)$, allora riproducendo i calcoli precedenti troviamo

$$\mathbf{RA} \wedge \mathbf{F}_1 + \mathbf{RB} \wedge \mathbf{F}_2 = \mathbf{RC} \wedge \mathbf{F}$$



Dunque se R è tenuto fisso il sistema ruota in senso antiorario attorno a R se R $\neq$ C mentre se R =C il sistema è in equilibrio.

Se invece $\mathbf{F}_1 = -\mathbf{F}_2 = -\mathbf{F}$ il sistema prende il nome di coppia e il suo momento non è mai nullo e non dipende dalla posizione del punto R sul braccio. Abbiamo infatti:

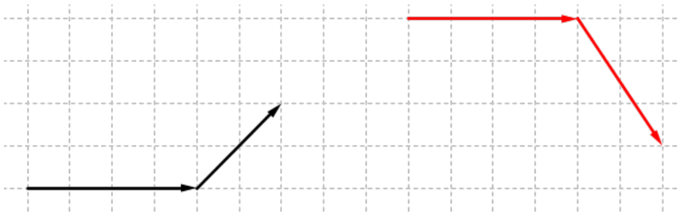
$$\mathbf{RA} \wedge \mathbf{F}_1 + \mathbf{RB} \wedge \mathbf{F}_2 = -\mathbf{RA} \wedge \mathbf{F} + \mathbf{RB} \wedge \mathbf{F} = (\mathbf{AR} + \mathbf{RB}) \wedge \mathbf{F} = \mathbf{AB} \wedge \mathbf{F}$$

e qualunque sia il punto R che viene tenuto fisso il sistema continuerà a ruotare attorno a R lungo un asse perpendicolare al piano di AB ed **F** con la stessa intensità data da prodotto di AB per l'intensità di **F**.

Ecco la conseguenza fisica di un centro all'infinito.

Tavola 1
(di riscaldamento)

Esercizio 1



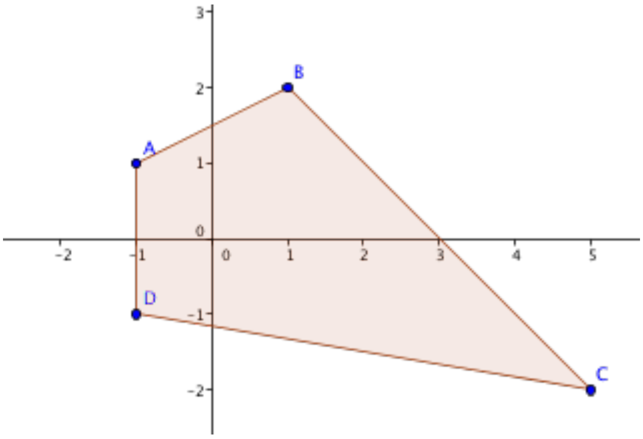
Sia $\boldsymbol{u}$ lo spatheck definito dai due vettori neri e $\boldsymbol{v}$ quello definito dai vettori rossi.
Trovare se esistono due numeri *a* e *b* tali che

$$a\boldsymbol{u} + b\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$$

Soluzione
L'area definita dallo spatheck $\boldsymbol{u}$ è 8 e la rotazione è in senso antiorario.
L'area definita dallo spatheck $\boldsymbol{v}$ è 12 e la rotazione è in senso orario, quindi $\boldsymbol{v} = -(12/8)\boldsymbol{u}$ è

$$12\boldsymbol{u} + 8\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$$

Esercizio 2



Nel piano cartesiano calcolare l'area del quadrilatero di vertici:
A=(-1,1), B=(1,2), C=(5,-2),D=(-1,-1).
Soluzione
DB=2**i**+3**j**, **DC**=6**i - j**, **DA**=2**j**. Calcoliamo l'area del triangolo DAB e del triangolo (orientato in verso anti orario) e quello del triangolo CDB orientato nello stesso verso. L'area che cerchiamo sarà la somma di queste due area.

$\mathbf{DB} \wedge \mathbf{DA} = (2\mathbf{i}+3\mathbf{j}) \wedge 2\mathbf{j} = 4\, \mathbf{i} \wedge \mathbf{j}$
$\mathbf{DC} \wedge \mathbf{DB} = (6\mathbf{i} - \mathbf{j}) \wedge (2\mathbf{i}+3\mathbf{j}) = 18\, \mathbf{i} \wedge \mathbf{j} - 2\, \mathbf{j} \wedge \mathbf{i} = 20\, \mathbf{i} \wedge \mathbf{j}$

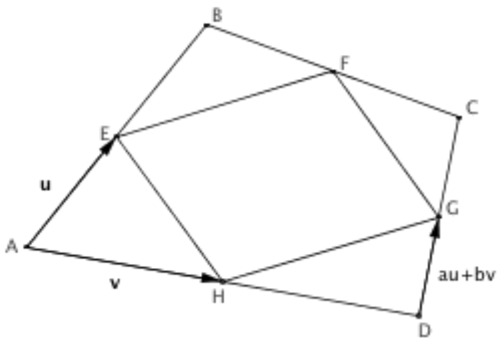
L'area del parallelogramma è dunque 12.

Tavola 2

Il trionfo di Grassmann! Dimostrare con un calcolo il celebre teorema di Varignon:

I punti medi di un qualsiasi quadrilatero sono vertici di un parallelogramma la cui area è la metà dell'area del quadrilatero.

Riprendiamo la tavola di lavoro sul teorema di Varignon prima parte i cui calcoli ci servono per calcolare le aree.



$\mathbf{AE} = \mathbf{u}$, $\mathbf{AH} = \mathbf{v}$, $\mathbf{AB} = 2\mathbf{u}$, $\mathbf{AD} = 2\mathbf{v}$.

Il punto C è un punto qualunque del piano e quindi il vettore DC può essere un qualsiasi vettore del piano. Poniamo

$$\mathbf{DG} = a\mathbf{u}+b\mathbf{v} \;,\; \mathbf{DC} = 2a\mathbf{u}+2b\mathbf{v}$$

senza nessuna restrizioni su a e b. In questo modo il quadrilatero potrà anche essere non convesso o intrecciato a seconda della scelta dei due parametri.

Facendo i calcoli vettoriali abbiamo:

$$\mathbf{BC} = \mathbf{BA}+\mathbf{AD}+\mathbf{DC} = -2\mathbf{u}+2\mathbf{v}+2a\mathbf{u}+2b\mathbf{v} = 2[(a-1)\mathbf{u}+(b+1)\mathbf{v}]$$

$$\mathbf{BF} = \mathbf{FC} = (a-1)\mathbf{u}+(b+1)\mathbf{v}$$

$$\mathbf{EH} = -\mathbf{u}+\mathbf{v}$$

$$\mathbf{EF} = \mathbf{EB}+\mathbf{BF} = a\mathbf{u}+(b+1)\mathbf{v}$$

$$\mathbf{FG} = \mathbf{FC}+\mathbf{CG} = (a-1)\mathbf{u}+(b+1)\mathbf{v} -[a\mathbf{u}+b\mathbf{v}] = -\mathbf{u}+\mathbf{v}$$

$$\mathbf{HG} = \mathbf{HD} + \mathbf{DG} = \mathbf{v} + a\mathbf{u}+b\mathbf{v} = a\mathbf{u}+(b+1)\mathbf{v}$$

L'area del parallelogramma EHGF è data da

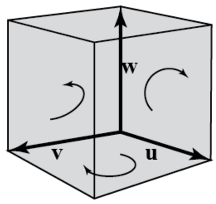
$$\mathbf{EH} \wedge \mathbf{HG} = (-\mathbf{u}+\mathbf{v}) \wedge [a\mathbf{u}+(b+1)\mathbf{v}] = -(b+1)\,\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} + a\,\mathbf{v} \wedge \mathbf{u} = (a+b+1)\,\mathbf{v} \wedge \mathbf{u}$$

L'area del quadrilatero ABCD è la somma dell'area dei triangoli ABD e BDC ed è quindi la metà di $\mathbf{AD} \wedge \mathbf{AB} + \mathbf{DC} \wedge \mathbf{CB}$. Ora sviluppando il calcolo abbiamo

$$\mathbf{AD} \wedge \mathbf{AB} + \mathbf{DC} \wedge \mathbf{CB} = 2\mathbf{v} \wedge 2\mathbf{u} - 2(a\mathbf{u}+b\mathbf{v}) \wedge 2\,[(a-1)\mathbf{u}+(b+1)\mathbf{v}] =$$
$$= 4\,\mathbf{v} \wedge \mathbf{u} - 4[(ab+a)\,\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} + (ba-b)\,\mathbf{v} \wedge \mathbf{u}] = 4\,\mathbf{v} \wedge \mathbf{u} - 4[(a+b)\,\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} =$$
$$= 4(a+b+1)\,\mathbf{v} \wedge \mathbf{u}.$$

Tavola 3

Consideriamo tre facce adiacenti di un cubo come in figura.

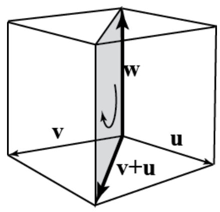


Descrivere lo spatheck $\mathbf{w} \wedge \mathbf{v} + \mathbf{w} \wedge \mathbf{u} + \mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$. Dire cioè qual è il suo piano, quale la sua area e quale la sua orientazione.

Soluzione

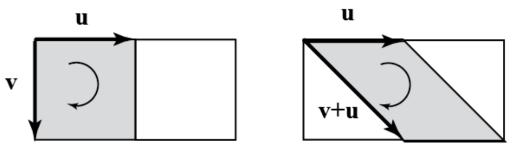
Cominciamo col calcolare $\mathbf{w} \wedge \mathbf{v} + \mathbf{w} \wedge \mathbf{u}$

Abbiamo $\mathbf{w} \wedge \mathbf{v} + \mathbf{w} \wedge \mathbf{u} = \mathbf{w} \wedge (\mathbf{v} + \mathbf{u})$ e questo è lo spatheck rappresentato dalla figura seguente.



$\mathbf{w} \wedge (\mathbf{v} + \mathbf{u})$

Dobbiamo ora sommare questo spatheck allo spatheck $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$. La retta comune al piano orizzontale di **u** e **v** e al piano verticale di **w** e **v+u** è la retta di **v+u** cerchiamo, sul piano orizzontale un vettore **z** tale che $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = \mathbf{z} \wedge (\mathbf{v}+\mathbf{u})$. Non è difficile vedere che $\mathbf{z} = \mathbf{u}$ sia osservando la figura



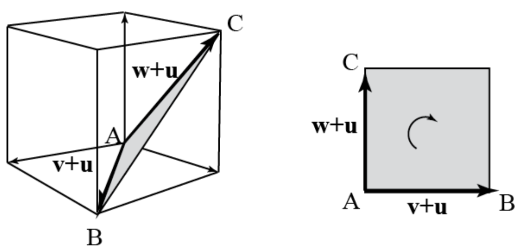
$\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = \mathbf{u} \wedge (\mathbf{v}+\mathbf{u})$

sia attraverso il calcolo, dato che $\mathbf{u} \wedge (\mathbf{v}+\mathbf{u}) = \mathbf{u} \wedge \mathbf{v} + \mathbf{u} \wedge \mathbf{u} = \mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$.

Tornando al nostro problema, abbiamo quindi

$\mathbf{w} \wedge \mathbf{v} + \mathbf{w} \wedge \mathbf{u} + \mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = \mathbf{w} \wedge (\mathbf{v} + \mathbf{u}) + \mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = \mathbf{w} \wedge (\mathbf{v} + \mathbf{u}) + \mathbf{u} \wedge (\mathbf{v}+\mathbf{u}) = (\mathbf{w} + \mathbf{u}) \wedge (\mathbf{v} + \mathbf{u})$.

Si tratta ora di interpretare geometricamente questo spatheck. Per fare questo basta individuare i due vettori $(\mathbf{w} + \mathbf{u})$ e $(\mathbf{v} + \mathbf{u})$.



In conclusione il piano dello spatheck è quello definito dai punti A,B,C del cubo, l'orientazione è quella indicata e l'area, se il cubo ha lato 1, AB=AC= $\sqrt{2}$ sarà 2.