II lezione

Il centro di una configurazione di punti nello spazio (Grassmann)

2.1

Dati due punti A e B il centro di questa configurazione è spontaneo definire il centro di questa configurazione il punto medio C del segmento AB. Da un punto di vista vettoriale questo significa che $\mathbf{AC}=\mathbf{CB}$ o anche

$$\mathbf{CA} + \mathbf{CB} = \mathbf{0}.$$

Questo suggerisce l'idea, in generale, di definire il centro di una configurazione $A_1, A_2, \ldots, A_n$ di n punti non necessariamente tutti diversi, come quel punto C tale che

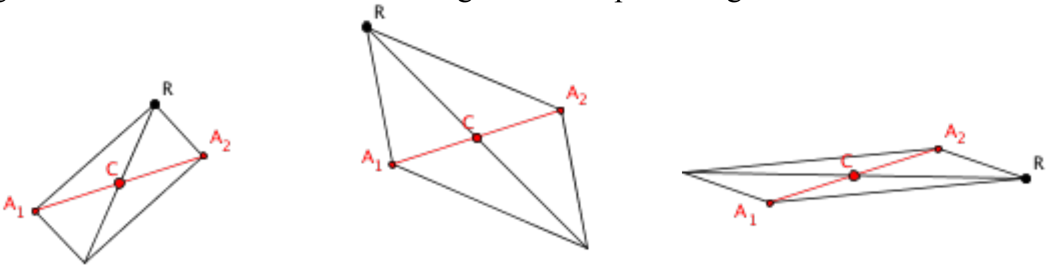
$$\mathbf{CA}_1 + \mathbf{CA}_2 + \ldots + \mathbf{CA}_n = \mathbf{0}.$$

Ma esiste sempre un tale punto e, nel caso, come trovarlo? E' unico? A quest'ultima domanda è facile rispondere infatti non possono esistere due punti C e C' che verificano questa relazione dato che sottraendo abbiamo

$$\begin{aligned}\mathbf{0} - \mathbf{0} &= (\mathbf{CA}_1 + \mathbf{CA}_2 + \ldots + \mathbf{CA}_n) - (\mathbf{C'A}_1 + \mathbf{C'A}_2 + \ldots + \mathbf{C'A}_n) = \\ &= (\mathbf{CA}_1 + \mathbf{CA}_2 + \ldots + \mathbf{CA}_n) + (\mathbf{A_1C'} + \mathbf{A_2C'} + \ldots + \mathbf{A_nC'}) = \\ &= \mathbf{CC'} + \mathbf{CC'} + \ldots + \mathbf{CC'} = n\,\mathbf{CC'}\end{aligned}$$

e $\mathbf{CC'} = \mathbf{0}$ significa che C=C'.

Per rispondere alle altre due domande ci viene in aiuto una semplice proprietà di un parallelogramma e cioè il fatto che le due diagonali si un parallelogramma si incontrano a metà:



Ciò significa nel linguaggio vettoriale che comunque si scelga un punto R il punto C divide in due il vettore $\mathbf{RA}_1 + \mathbf{RA}_2$ cioè $\mathbf{RA}_1 + \mathbf{RA}_2 = 2\mathbf{RC}$. Questa semplicissima idea si generalizza facilmente nel nuovo linguaggio.

Consideriamo il punto C ottenuto calcolando il vettore $\mathbf{RA}_1 + \mathbf{RA}_2 + \ldots + \mathbf{RA}_n$ e dividendo tale vettore in n parti uguali (n come il numero di punti!) il punto C verifica quindi la fondamentale relazione di Grassmann:

$$\boxed{\mathbf{RA}_1 + \mathbf{RA}_2 + \ldots + \mathbf{RA}_n = n\mathbf{RC}.}$$

Il fatto sorprendente è che quel punto C non dipende dalla scelta di R: qualunque sia il punto R di partenza C è sempre allo stesso posto. Infatti se Q è un altro punto qualsiasi, col nuovo punto Q calcoliamo il vettore $\mathbf{QA}_1 + \mathbf{QA}_2 + \ldots + \mathbf{QA}_n$, dividiamo questo vettore in n parti uguali trovando un punto D tale che $\mathbf{QA}_1 + \mathbf{QA}_2 + \ldots + \mathbf{QA}_n = n\mathbf{QD}$; ebbene il punto D coincide col punto C calcolato a partire da R. Infatti

$$\begin{aligned}n\mathbf{RC} &= \mathbf{RA}_1 + \mathbf{RA}_2 + \ldots + \mathbf{RA}_n = \\ &= (\mathbf{RQ}+\mathbf{QA}_1) + (\mathbf{RQ}+\mathbf{QA}_2) + \ldots + (\mathbf{RQ}+\mathbf{QA}_n) = \\ &= n\mathbf{RQ} + \mathbf{QA}_1 + \mathbf{QA}_2 + \ldots + \mathbf{QA}_n = n\mathbf{RQ} + n\mathbf{QD} \\ &= n\,\mathbf{RD}\end{aligned}$$

e quindi $\mathbf{RC} = \mathbf{RD}$ da cui C=D.

L'animazione geogebra *il centro.ggb* illustra dinamicamente questa situazione.

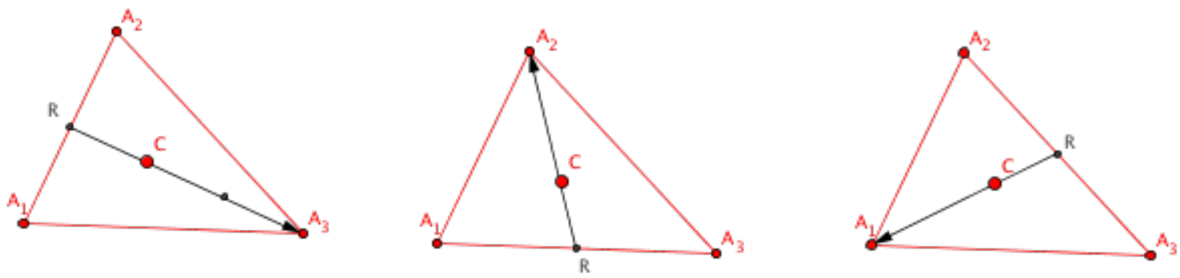
Non è difficile vedere ora che il punto C così costruito a partire da R o a un qualsiasi altro punto è il centro della configurazione, cioè che

$$\begin{aligned}&\mathbf{CA}_1 + \mathbf{CA}_2 + \dots + \mathbf{CA}_n = \\ &= (\mathbf{CR}+\mathbf{RA}_1) + (\mathbf{CR}+\mathbf{RA}_2) + \dots + (\mathbf{CR}+\mathbf{RA}_n) = \\ &= n\mathbf{CR} + n\,\mathbf{RC} = \mathbf{0}\end{aligned}$$

Nel caso di tre punti distinti A_1, A_2, A_3 possiamo calcolare il centro C prendendo come R il punto medio di un lato, ad esempio A_1A_2. In questo caso abbiamo $\mathbf{RA}_1 + \mathbf{RA}_2 = \mathbf{0}$ e quindi

$$\mathbf{RA}_1 + \mathbf{RA}_2 + \mathbf{RA}_3 = \mathbf{RA}_3 = 3\mathbf{RC}$$

C è allora quel punto sulla mediana RA_3 che la divide in tre parti uguali. Lo stesso ragionamento può farsi prendendo come R il punto medio del lato A_1A_3 . Con questa scelta troviamo che C è il punto che divide in tre parti uguali la mediana RA_2 . Scegliendo R sul terzo lato si trova che C è anche punto della mediana RA_1. Essendo il centro C di una configurazione unico, questo è un altro modo per vedere che le tre mediane di un triangolo si incontrano in un punto.



2.2

Nel caso di punti "pesati" cioè nel caso in cui ogni punto A_i della configurazioni lo si pensi associato a un peso p_i, allora il centro della configurazione dei punti pesati (A_1,p_1) , (A_2,p_2), ... , (A_n,p_n) è quel punto pesato (C,p) tale che

$$p_1\mathbf{CA}_1 + p_2\mathbf{CA}_2 + \dots + p_n\mathbf{CA}_n = \mathbf{0}$$

e $p = p_1 + p_2 + \dots + p_n$.

Tutte le considerazioni precedenti valgono anche in questo caso, in particolare per calcolare il centro di una configurazione di punti pesati, nel caso in cui la somma dei pesi è non nulla, basterà scegliere un qualunque punto R e calcolare punto C che verifica la relazione:

$$p_1\mathbf{RA}_1 + p_2\mathbf{RA}_2 + \dots + p_n\mathbf{RA}_n = (p_1 + p_2 + \dots + p_n)\mathbf{RC}.$$

Le configurazioni di punti pesate possono in modo naturale sommarsi: se $\mathcal{A} = \{(A_1,p_1) , (A_2,p_2), \dots , (A_n,p_n)\}$ e $\mathcal{B} = \{(B_1,q_1) , (B_2,q_2), \dots , (B_m,q_m)\}$ sono due configurazioni di punti pesate allora la configurazione $\mathcal{A} + \mathcal{B}$ è formata dai punti dell'insieme unione $\{A_1 , A_2 , \dots , A_n\} \cup \{B_1 , B_2 , \dots , B_m\}$ con l'accortezza di calcolare il peso di un punto comune ai due insiemi sommando i due rispettivi pesi.

La considerazione di insiemi di punti pesati permette di introdurre un altro metodo per calcolare il centro usando il seguente criterio.

Se $\mathcal{A}$ *è* $\mathcal{B}$ *sono due configurazioni di punti pesati e se* (A,p) *è il centro di* $\mathcal{A}$, *allora il centro della configurazione* $\mathcal{A} + \mathcal{B}$ *è uguale al centro della configurazione, ben più semplice,* $\{(A,p)\} + \mathcal{B}$. *In* *particolare se* (B,q) *è il centro della configurazione* $\mathcal{B}$ *allora* {(A,p), (B,q)} *ha lo stesso centro di* $\mathcal{A}+\mathcal{B}$ *.*

La dimostrazione è molto semplice infatti scelto un punto R per il calcolo dei centri di $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ abbiamo:

$$p_1\mathbf{RA}_1 + p_2\mathbf{RA}_2 + \ldots + p_n\mathbf{RA}_n = p\,\mathbf{RA} \quad \text{dove} \quad (p = p_1 + p_2 + \ldots + p_n)$$
$$q_1\mathbf{RB}_1 + q_2\mathbf{RB}_2 + \ldots + q_n\mathbf{RB}_n = q\,\mathbf{RB} \quad \text{dove} \quad (q = q_1 + q_2 + \ldots + q_n)$$

Se (E, $p+q$) è il centro della configurazione $\mathcal{A}+\mathcal{B}$ risulta

$$p_1\mathbf{RA}_1+p_2\mathbf{RA}_2+ \ldots + p_n\mathbf{RA}_n+q_1\mathbf{RB}_1+q_2\mathbf{RB}_2 + \ldots + q_n\mathbf{RB}_n = (p+q)\mathbf{RE}$$

sostituendo

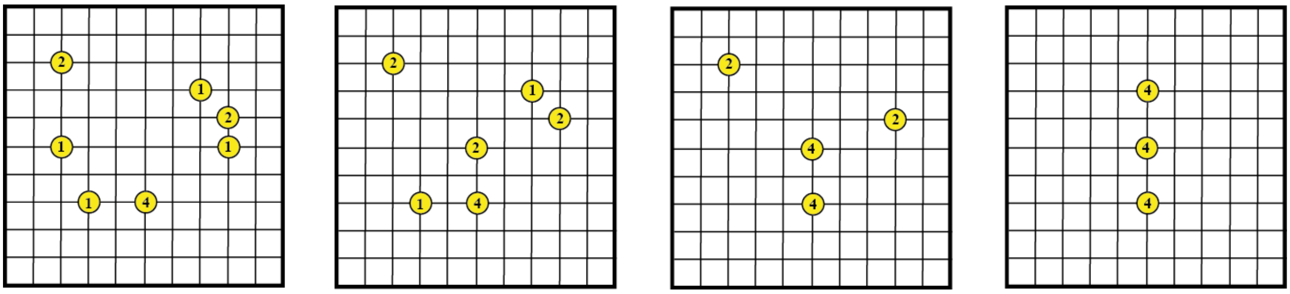
$$p\mathbf{RA}+ q_1\mathbf{RB}_1+q_2\mathbf{RB}_2 + \ldots + q_n\mathbf{RB}_n = (p+q)\mathbf{RE}$$

quindi (E,$p+q$) è il centro sia della configurazione $\mathcal{A}+\mathcal{B}$ che della configurazione {(A,p)}+ $\mathcal{B}$.

Questa proposizione può essere utile per trovare il centro di una configurazione raggruppando via via parti della configurazione delle quali sia facile trovare il centro.

Esempio

Supponendo che i centri dei dischetti gialli rappresentino dei punti col peso indicato sul dischetto, semplificando via via la configurazione possiamo vedere che il centro si trova esattamente al centro della scacchiera.



2.3

Usando le coordinate.

Supponiamo che i punti della configurazione siano espressi tramite coordinate $A_i = (x_i,y_i)$. Per calcolare il centro usiamo come punto R l'origine (0,0) degli assi. I vettori $\mathbf{RA}_i$ hanno come componenti nella base canonica (x_i,y_i) e quindi se C=(X,Y) l'equazione vettoriale

$$\mathbf{RA}_1 + \mathbf{RA}_2 + \ldots + \mathbf{RA}_n = n\mathbf{RC}.$$

diventa

$$(x_1,y_1) + (x_2,y_2) + \ldots + (x_n,y_n) = n(X,Y)$$

e da questo ricaviamo le coordinate del centro

$$X = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \quad , \quad Y = \frac{y_1 + y_2 + \ldots + y_n}{n}$$

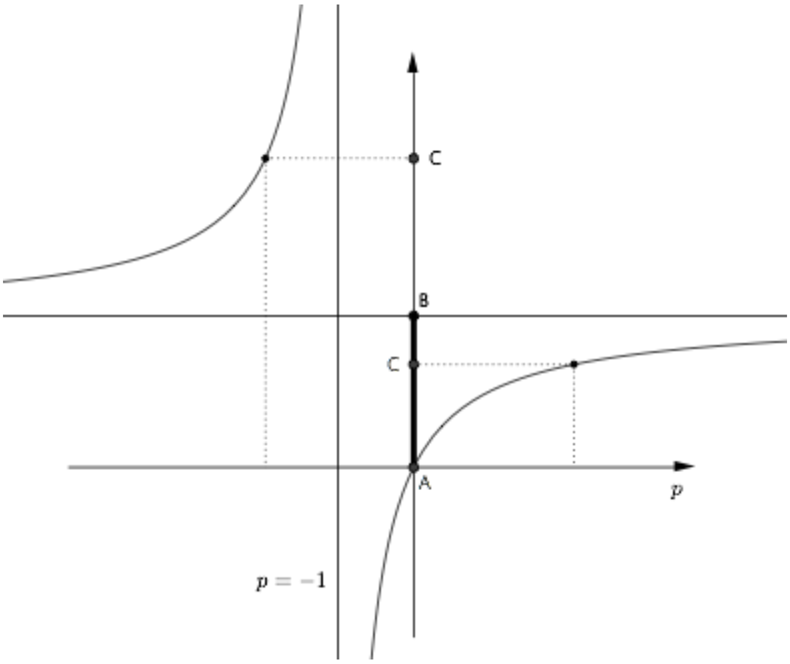
nel caso di una configurazione di punti pesati il discorso è del tutto analogo e si ottengono le formule

$$X = \frac{p_1x_1 + p_2x_2 + \ldots + p_nx_n}{p_1 + p_2 + \ldots + p_n} \quad , \quad Y = \frac{p_1y_1 + p_2y_2 + \ldots + p_ny_n}{p_1 + p_2 + \ldots + p_n}$$

Usando le coordinate si dovrebbe verificare che la posizione del centro relativamente alla posizione die diversi punti non dipende dalla scelta delle coordinate.

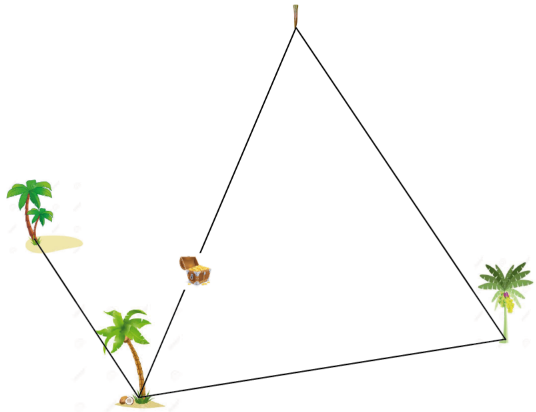
2.4

Esercizio (Cosa succede se $p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 0$)
Consideriamo sul piano cartesiano i punti A=(0,0) e B=(0,d), fissiamo un numero reale p qualsiasi e sia C=(0,y) il centro della configurazione $\{(A,1),(B,p)\}$. Disegnare i punti del piano di coordinate (p,y) al variare di p tra i numeri reali.
Soluzione



Il grafico mostra che il centro della configurazione $\{(A,1),(B,p)\}$ è interno al segmento se $p>0$. Se $-1<p<0$ il centro è "oltre" A, se invece $p<-1$ il centro è "oltre" B, e infine p=-1 il centro è all'infinito!

Esercizio (la mappa del tesoro)
Un ragazzo trova una mappa dove è indicata un'isola e delle istruzioni per trovare un tesoro sepolto. Ecco la mappa e le istruzioni:



Trova l'Isola del Pellicano, su quest'isola troverai tre alberi: sono una grande palma, una doppia palma e un banano. Mettiti con le spalle alla grande palma e guada sulla bussola in quale direzione si trova la doppia palma. Segui quella direzione e conta quanti passi ci sono tra le due palme. Vai dove c'è in banano e segui la stessa direzione che hai letto sulla bussola percorrendo un numero doppio di passi. Dove arrivi pianta un paletto. Conta quanti passi ci sono dal paletto alla grande palma, dividi per tre e scava in quel punto.

Il ragazzo trova dopo lunghe ricerche l'Isola del Pellicano e trova la doppia palma e il banano come specificato nelle istruzioni, ma, della grande palma, nessuna traccia. Come trovare il tesoro?

Soluzione

Indicando con A in punto dove si trova la doppia palma, con B quello dove si trova il banano e con R quello dove si trovava la grande palma, dalle istruzione troviamo $\mathbf{RB}+2\mathbf{RA}=3\mathbf{RT}$. Dunque T è il centro della configurazione {(B,1) , (A,2)} e allora il tesoro si trova dividendo in tre parti il segmento AB e prendendo dalla parte di A una di queste parti. La grande palma è quindi ininfluente.

Esercizio (Archimede)

Calcolare il centro di una distribuzione di punti allineati, equi distanziati e di peso uguale.

Svolgimento

Siano $A_1, A_2, \ldots, A_n$ gli n punti equi distanziati e M il punto medio del segmento A_1A_n. Allora $\mathbf{A_1M} = \mathbf{MA_n}$, dato che M è il centro di A_1A_n, ma anche $\mathbf{A_2M} = \mathbf{MA_{n-1}}$ dato che $A_1A_2 = A_{n-}A_n$. ecc. Ne segue che $\mathbf{MA_1} + \mathbf{MA_2} + \ldots + \mathbf{MA_n}, = \mathbf{0}$ e quindi M è il centro della configurazione.

Esercizio (Galileo Galilei).

Calcolare il centro di una distribuzione $\mathcal{A}$ data da n punti equi distanziati con i pesi che aumentano in progressione aritmetica su una stessa retta. $\mathcal{A} = \{(A_1,1), (A_2,2), \ldots, (A_n, n)\}$.

Svolgimento

Sia C il centro della configurazione. Abbiamo

$$\begin{aligned}
&\mathbf{0} = \mathbf{CA_1} + 2\,\mathbf{CA_2} + 3\,\mathbf{CA_3} + \ldots + n\,\mathbf{CA_n} = \\
&= \mathbf{CA_1} + 2\,(\mathbf{CA_1} + \mathbf{A_1A_2}) + 3\,(\mathbf{CA_1} + \mathbf{A_1A_3}) + \ldots + n\,(\mathbf{CA_1} + \mathbf{A_1A_n}) = \\
&(1+2+3+\ldots+n)\,\mathbf{CA_1} + [2\times1 + 3\times2 + \ldots + n\times(n-1)]\,\mathbf{A_1A_2}
\end{aligned}$$

dato che, essendo i punti equi distanziati, abbiamo

$$\mathbf{A_1A_3} = 2\,\mathbf{A_1A_2}\,,\ \mathbf{A_1A_4} = 3\,\mathbf{A_1A_2}\,, \ldots, \mathbf{A_1A_n} = (n-1)\,\mathbf{A_1A_2}.$$

Risolvendo l'equazione vettoriale troviamo

$$\mathbf{A_1C} = x\,\mathbf{A_1A_2}$$

Dove $x = \dfrac{2\times1+3\times2+\ldots n(n-1)}{1+2+3+\ldots n}$. Ora

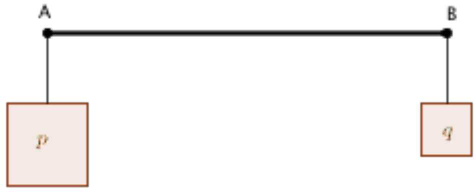
$$\sum_{i=1}^{n}(i-1)i = \sum_{i=1}^{n} i^2 - \sum_{1=1}^{n} i = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(2n-2)}{6} = \frac{n(n+1)(n-1)}{3}$$

e quindi

$$x = \frac{\frac{n(n+1)(n-1)}{3}}{\frac{n(n+1)}{2}} = \frac{2}{3}(n-1)$$

Poiché (n-1) $\mathbf{A_1A_2} = \mathbf{A_1A_n}$ abbiamo $\mathbf{A_1C} = \frac{2}{3}\,\mathbf{A_1A_n}$ e quindi il centro si trova in quel punto C del segmento A_1A_n che lo divide nel rapporto 2 : 3.

Esercizio (Archimede)
Calcolare il centro della distribuzione $\{(A,p), (B,q)\}$ con $p>0$, $q>0$ non nullo.
Svolgimento

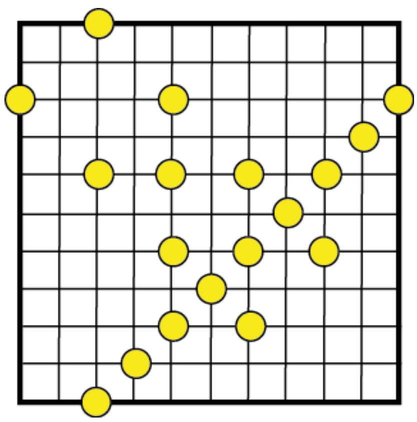


Svolgimento
Il centro della configurazione è quel punto C tale che $p\mathbf{CA}+q\mathbf{CB} = \mathbf{0}$, cioè $p\mathbf{AC} = q\mathbf{BC}$ e, passando alle lunghezze dei segmenti,

$$\frac{AC}{CB} = \frac{q}{p}$$

Tavola di Lavoro

Supponendo che i centri dischetti sulla scacchiera rappresentino dei punti ugualmente pesati, trovare semplificando via via la configurazione il centro della configurazione complessiva.



Soluzione
Il centro della configurazione è il centro della scacchiera con perso 18.

2.5
Applicazioni alla computer grafica.
In generale vi sono due modi per produrre una immagine digitale: uno (grafica raster) consiste nel scansionare pixel per pixel l'immagine. L'altra detta grafica vettoriale consiste nel descrivere le immagini tramite punti e vettori. La differenza tra i due modi (al di la della notevolissima differenza di peso) consiste nel fatto che ingrandendo una immagine raster si ingrandiscono tutti i pixel e l'immagine si sgrana dato che un pixel, che prima era un quadratino non percepibile, diventa via via

un quadrato sempre più grade e percepibile, se invece si ingrandisce una immagine vettoriale l'immagine mantiene intatta la sua originaria definizione. Come avviene questo miracolo? Proveremo a spiegarlo sull'esempio più semplice quello relativo al disegno di un segmento. Cominciamo col osservare che i punti dello schermo di un computer sono individuati da due coordinate (x,y) la cui origine O si trova nell'angolo alto a sinistra, l'asse delle ordinate scende verso il basso mentre l'asse delle ascisse è orientato verso destra. Un punto A è dunque definito da una coppia di numeri A=(a,b) che definiscono il vettore **OA**. I punti di un segmento AB possono ora essere individuati come il baricentro di un peso t ($0<t<1$) applicato in A e di un peso 1-t applicato in B, tale baricentro sarà il punto C definito dall'equazione vettoriale:

$$(1-t)\mathbf{OA}+t\mathbf{OB}=\mathbf{OC}$$

che, in termini di coordinate fornisce immediatamente le coordinate del punto C

$$x_C = (1-t)x_A+tx_B$$
$$y_C =(1-t)y_A+ty_B$$

Queste formule permettono di scrivere un programma che disegna i punti C al variare di t fissando l'incremento di t in funzione della distanza tra A e B. Il segmento è dunque dato solo dalle coordinate dei due punti A e B, un velocissimo programma calcola i punti C e li ricalcola cambiando l'incremento di t ogni volta che si ingrandisce il segmento. Una pagina di geogebra mostra come si realizza questo metodo. Nella grafica raster invece l'ingrandimento di un segmento avviene ingrandendo tutti i pixel come mostra la figura seguente.

1 volta 3 volte 6 volte

Una poligonale nella grafica vettoriale è data da una successione finita di punti, un velocissimo programma riempie poi i segmenti con i loro punti interni. Nella pagina seguente abbiamo descritto un poligono formatto da 8 punti (punti di ancoraggio nel linguaggio tecnico della grafica vettoriale) Il computer memorizza non l'intera figura ma solo gli 8 punti. Ingrandire la figura significa ricalcolare, con una omotetia, solo gli 8 punti. L'intero poligono è ridisegnato a partire da questi nuovi punti di ancoraggio col solito programma.

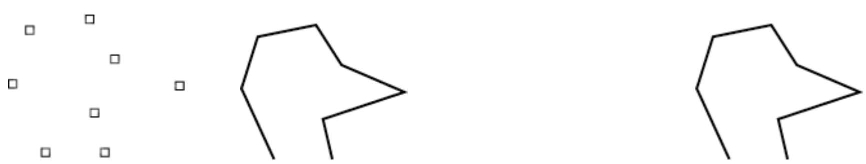


Immagine vettoriale immagine raster

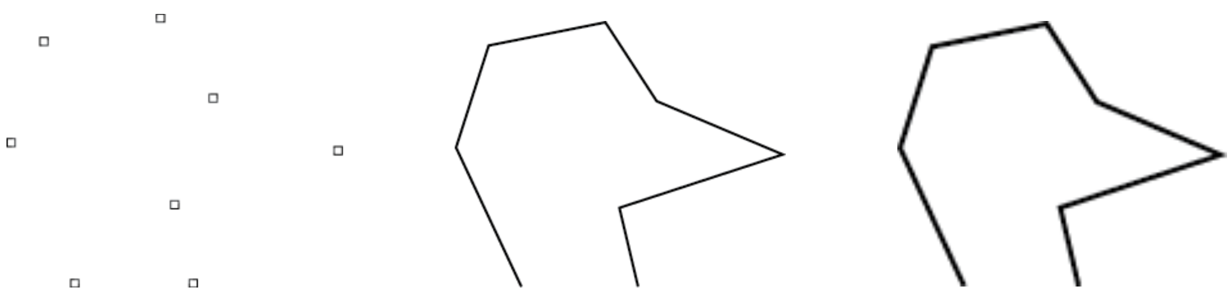
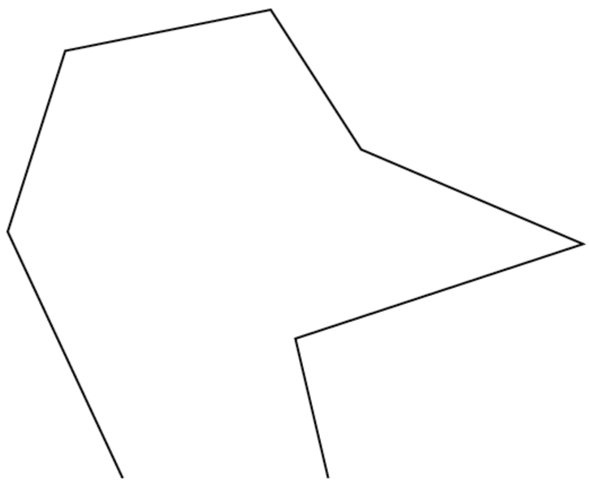


Immagine vettoriale raddoppiata

Immagine raster raddoppiata



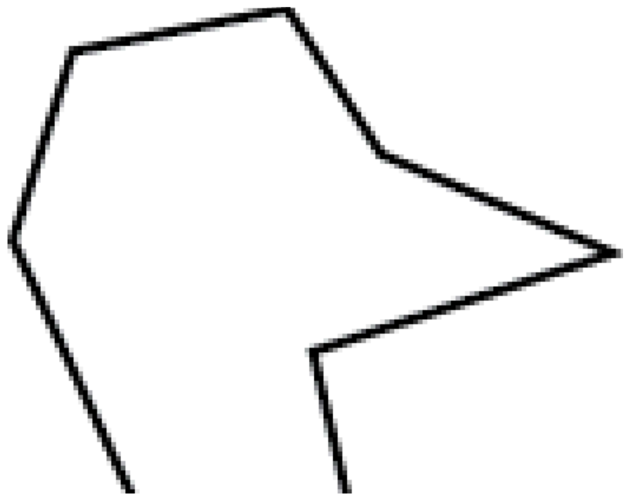


Immagine vettoriale quadruplicata

Immagine raster quadruplicata