



Istituto Istruzione Superiore "E. Amaldi"

Test di ammissione alle facoltà scientifiche

Materiale preparatorio

Prof. Franco Ghione, Università di Roma Tor Vergata

A cura di

Numeri: prof.ssa Enrica Medici

Numeri: prof.ssa Paola Chiacchio

Algebra: prof.ssa Maria Bianchi

Geometria: prof.ssa Claudia Nisi

Funzioni: prof.ssa Stefania Di Giacomo

Modellizzazione: prof.ssa Eugenia Mattei

Logica: prof.ssa Eugenia Mattei

Probabilità: prof.ssa Maria Antonietta Sallustio



Test di ammissione alle facoltà scientifiche

Materiale preparatorio

Prof. Franco Ghione, Università di Roma Tor Vergata

Questo opuscolo raggruppa, diviso per argomenti, i quesiti che sono stati assegnati negli scorsi anni, a livello nazionale, come test d'ingresso per tutti i corsi di laurea scientifici sulla base di un syllabus elaborato dalla Conferenza Nazionale dei presidi delle facoltà scientifiche e tecnologiche. Ogni singolo docente ha esaminato i quesiti di un determinato argomento individuando quelli di maggiore difficoltà o più insidiosi in rapporto alla preparazione standard degli allievi della Scuola. I quesiti sono stati successivamente rivisti e discussi collegialmente con l'intento di evidenziare difficoltà, ostruzioni, lacune maggiormente frequenti, individuando le procedure essenziali e i concetti base sui quali insistere maggiormente nella preparazione dei propri studenti a questo tipo di prova. In tutti i quesiti occorre comprendere un testo che può contenere numeri, formule e figure. Riteniamo che l'incomprensione del testo sia una causa molto frequente del fallimento in questo tipo di prova. Per evitare questo occorre proporre esercizi il cui contenuto verbale non sia scontato a priori ma vada di caso in caso elaborato dallo studente evitando un uso esclusivo di esercizi identici, ripetitivi, il cui testo verbale risulta del tutto inessenziale alla comprensione dell'esercizio.

I termini e i simboli che vengono utilizzati variano tra quelli di più frequente uso nella scuola e nelle prime lezioni universitarie. In particolare si utilizzano notazioni elementari e termini del linguaggio degli insiemi ("elemento", "appartiene", "sottoinsieme", "unione", "intersezione", "differenza", "complementare" e "prodotto cartesiano") e le espressioni "per ogni", "tutti", "nessuno", "alcuni" e "almeno uno". In alcuni quesiti è necessario passare dalla descrizione a parole di una situazione (per esempio di una relazione fra grandezze) a una sua formalizzazione algebrica oppure a una sua rappresentazione grafica, e viceversa. Questo tipo di competenze in alcuni quesiti è preponderante rispetto ai concetti matematici coinvolti. In tutti i quesiti, con diversi gradi di complessità, occorre fare deduzioni logiche (per esempio stabilire se un certo enunciato, o la sua negazione, è conseguenza logica di altri). Alcuni concetti di base risultano, in questo contesto, più importanti di altri e vanno di volta in volta ripetuti evitando il più possibile, nella soluzione dei quesiti, l'uso di formule, o procedure meccaniche (che fanno appello esclusivamente alla memoria) privilegiando invece il ragionamento a partire dai concetti di base. Ogni fascicolo è preceduto dal relativo syllabus al quale segue una selezione di quesiti operata dagli insegnanti che hanno partecipato al progetto e discussi collegialmente nel gruppo di lavoro.

- *Numeri* : prof.ssa Enrica Medici
- *Numeri* : prof.ssa Paola Chiacchio
- *Algebra*: prof.ssa Maria Bianchi
- *Geometria*: prof.ssa Claudia Nisi
- *Funzioni*: prof.ssa Stefania Di Giacomo
- *Modellizzazione*: prof.ssa Eugenia Mattei
- *Logica*: prof.ssa Eugenia Mattei
- *Probabilità*: prof.ssa Maria Antonietta Sallustio

Numeri : prof.ssa Enrica Medici

SYLLABUS definizione e proprietà dei logaritmi; percentuali; analisi di problemi e scelta dell'incognita.

I quesiti selezionati riguardano essenzialmente:

- Riconoscimento ed applicazione delle proprietà dei logaritmi
- Saper lavorare con le percentuali
- Saper analizzare testi e problemi e saper determinarne le incognite anche se non espressamente dichiarate

Riconoscimento ed applicazione delle proprietà dei logaritmi

2009	12. Sia c la soluzione dell'equazione $\log_2(x+1) = -2.$ Allora A $-\frac{3}{2} < c < -1$ B $-1 < c < -\frac{1}{2}$ [*] C $-\frac{1}{2} < c < 0$ D $0 < c < \frac{1}{2}$	
commento	soluzione	
Usa la definizione e la proprietà fondamentale dei logaritmi	per definizione di logaritmo deve essere: $x+1 > 0$ quindi $x > -1$ e: $x+1=2^{-2}$, quindi $x+1=1/4 \rightarrow x = -\frac{3}{4}$. Questo giustifica la scelta della risposta B.	

2010	19. Se $\log_2 \sqrt{a} = 6$, allora A. $a = 2^{12}$ B. $a = 2^3$ C. $a = 2^6$ D. $a = 2^4$ E. $a = 2^9$	
commento	soluzione	
si riduce alla definizione di logaritmi come funzione inversa.	dalla definizione di logaritmo : $\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b$ applicata al presente caso da: $2^6 = \sqrt{a}$ poichè $a > 0$: $(2^6)^2 = (\sqrt{a})^2$; $2^{12} = a$. Risposta A.	

2011	2. Una e una sola delle seguenti affermazioni è esatta, quale? A. $\log_{10}(2^{10}) > 100$ B. $30 < \log_{10}(2^{10}) < 40$ C. $4 < \log_{10}(2^{10}) < 5$ D. $3 < \log_{10}(2^{10}) < 4$ E. $40 < \log_{10}(2^{10}) < 50$
commento	soluzione
Questo tipo di esercizio serve per dare concretezza numerica a espressioni astratte come il logaritmo di un numero. Occorre sempre introducendo una qualunque funzione $f(x)$ fare molti esercizi nei quali si trovano approssimazioni sempre più fini di $f(n)$ dove n è un numero dato	dalla definizione di logaritmo $\log_{10}(2^{10}) = c \Leftrightarrow 10^c = 2^{10}$. $2^{10} = 2^5 \cdot 2^5 = 32 \cdot 32 = 1024 > 10^3$. Pertanto risulta: $10^c > 10^3$ e minore di 10^4 in quanto $1000 < 1024 < 10000$ pertanto $10^3 < 10^c < 10^4$. La risposta corretta è la D
2011	15. Per ogni coppia di numeri $a, b > 0$, la funzione $f(x) = \log x$ soddisfa: A. nessuna delle altre uguaglianze indicate B. $f(a \cdot b) = f(a) + f(b)$ C. $f(a \cdot b) = f(a) \cdot f(b)$ D. $f(a + b) = f(a) \cdot f(b)$ E. $f(a + b) = f(a) + f(b)$
commento	soluzione
L'esercizio richiama la proprietà fondamentale dei logaritmi e la scrittura in termini di funzione. Vuole richiamare l'attenzione dello studente su possibili proprietà "matematiche" sbagliatissime. E' spesso utili sottolineare la NON PROPRIETA' di una data funzione	posto $f(x) = \log x$, $f(a \cdot b)$ equivale a: $\log(a \cdot b)$ che come è noto corrisponde alla risposta A.
2012	4. Se $\log_3 \frac{6}{c} = 2$, allora c è uguale a A. $\frac{2}{3}$ B. 1 C. 2 D. $\frac{3}{2}$ E. $\frac{1}{3}$
commento	soluzione
	per definizione di logaritmo dal testo segue che $3^2 = \frac{6}{c}$; semplificando e risolvendo rispetto a c si ha la risposta A

2012	77. La relazione tra livello sonoro L e intensità sonora I di un rumore è $L = \log_{10} I + 12.$ Allora se la differenza tra i livelli sonori di due rumori vale 2, quanto vale il rapporto tra le loro intensità sonore? A. 20 B. 112 C. 100 D. 12 E. 24
commento	soluzione
	$L - L' = 2$; $2 = \log_{10} i + 12 - (\log_{10} i' + 12)$; $2 = \log_{10} i - \log_{10} i'$ per la ben nota proprietà dei logaritmi si ha che $2 = \log_{10} \frac{i}{i'}$; da questo segue per la definizione di logaritmo : $\frac{i}{i'} = 10^2$. La risposta corretta è la C.
2013	4. Se $\log_2(10t) = 10$, allora t è A. 1 B. 2 C. 10 D. 102,4 E. 1024
commento	soluzione
	dalla definizione di logaritmo $2^{10} = 10t$; $\frac{2^{10}}{10} = t$; $t = \frac{1024}{10}$. Risposta corretta la D.

percentuali

2009	19. Dato un rettangolo, si aumenta la sua base del 40% e si diminuisce l'altezza del 50%. Allora di quanto diminuisce in percentuale l'area del rettangolo iniziale? A del 25% B del 30% [*] C del 35% D del 40%
commento	soluzione
Analizza il concetto di percentuale	del nuovo rettangolo si sa che $b_1 = b \cdot 1,4$; $h_1 = h \cdot 0,5$. Pertanto $A_1 = b \cdot 1,4 \cdot h \cdot 0,5 = b \cdot h \cdot 0,7 = A \cdot 0,7$ questo giustifica la risposta B.

2010	16. Il numero di individui di una popolazione è aumentato in un anno del 27%. Se P era il numero all'inizio dell'anno, qual è il numero alla fine dell'anno? A. $P + 0,27$ B. $P \cdot 1,27$ C. $P \cdot 0,27$ D. $P + 1,27$ E. $P/0,27$
commento	soluzione
L'esercizio richiede di <u>saper scrivere una percentuale come frazione e una frazione come numero decimale</u> . <i>Conviene fare molti esercizi di questo tipo</i>	Alla fine dell'anno è $P + 0,27P = P \cdot 1,27$. risposta B.

2011	18. In modalità "prestazioni elevate", il consumo di energia di un computer portatile aumenta del 25% rispetto all'utilizzo normale. Di quanto diminuisce la durata della batteria nell'utilizzo "prestazioni elevate" rispetto all'utilizzo normale? A. 33% B. 40% C. 25% D. 20% E. 30%
commento	soluzione
L'esercizio è poco spiegato. Per risolverlo occorre infatti sapere che la durata delle batterie è inversamente proporzionale al consumo di energia. Se dunque X è il consumo $T=k/X$ è la durata (la costante non serve a nulla). In questo modo si trova la risposta D. E' utile svolgere esercizi di questo tipo: data una funzione $f(x)$, se la variabile x aumenta di $a\%$ come cambia la variabile $f(x)$. Nel nostro caso è $f(x)=1/x$	per l'utilizzo normale utilizza tutta la carica della batteria in un certo tempo. Se ne consuma in prestazioni elevate il 25% in più in pratica nello stesso tempo ha a disposizione il 75 % della carica .

2013	7. Luca subisce una ritenuta fiscale del 20% su ogni compenso lordo L pagatogli dal datore di lavoro, il quale deve a sua volta versare a enti previdenziali oneri pari al 20% di L. Quale costo complessivo deve preventivare il datore di lavoro, se vuole che a Luca resti un compenso netto di 300 euro? A. 450 euro B. 432 euro C. 480 euro D. 420 euro E. 360 euro
commento	soluzione
	Luca prende al netto l'80% di L , il datore di lavoro paga il 120% di L cioè 450 euro . risposta A

Saper analizzare testi di problemi e saper determinarne le incognite anche se non espressamente dichiarate

2011	1. La media aritmetica di due numeri s e t è $\frac{2}{3}$. Allora t è uguale a A. $\frac{4-2s}{3}$ B. $\frac{3-2s}{2}$ C. $\frac{4-3s}{2}$ D. $\frac{4-3s}{3}$ E. $\frac{2-3s}{3}$
commento	soluzione
per risolvere l'esercizio occorre saper tradurre un problema in una equazione. Vi sono dunque due processi 1. <i>Trovare l'equazione giusta</i> 2. risolverla <i>Si deve insistere molto sul primo dei due problemi</i>	la media aritmetica si esegue facendo la somma dei dati diviso per il numero n dei dati. In questo caso essendo $n=2$ si può scrivere: $\frac{s+t}{2} = \frac{2}{3}$ da questa applicando il secondo principio di equivalenza delle equazioni si ha : $2 \frac{s+t}{2} = \frac{2}{3} \cdot 2$ ossia : $s+t = \frac{4}{3}$; applicando il primo principio si ha : $t = \frac{4}{3} - s \rightarrow t = \frac{4-3s}{3}$. La risposta corretta è la D.

12. Per verniciare la superficie di un cubo di volume V occorrono 600g di vernice. Quanta vernice serve per verniciare un cubetto di volume $\frac{1}{8}V$?
- A. 150g
 - B. 200g
 - C. 300g
 - D. 100g
 - E. 75g

commento

L'esercizio presuppone una serie di ragionamenti propedeutici che necessitano di introdurre una incognita (il lato l del cubo) che non è indicata nel testo. I calcoli sono molto semplici ma occorre ogni volta fare un ragionamento. Anche qua la difficoltà consiste nel tradurre in linguaggio matematico una situazione che non è fatta in quei termini.

soluzione

per verniciare un cubo di lato l occorre ricoprire di vernice i sei quadrati che ne costituiscono la superficie totale pertanto con 600g di vernice, si ricopre una superficie di $6l^2$. Se il volume diventa $\frac{1}{8}V$ essendo un cubo lo si può scrivere come $\frac{1}{8}V = \left(\frac{1}{2}l\right)^3$ pertanto le facce hanno lato $\frac{1}{2}l$. La relativa superficie da verniciare risulta $S_T = 6\left(\frac{1}{2}l\right)^2 = \frac{6}{4}l^2 = \frac{6l^2}{4}$. Per verniciare il secondo cubo occorrono $\frac{600}{4}g = 150g$ di vernice. Risposta A.

Numeri 1: prof.ssa Paola Chiacchio

SYLLABUS

Proprietà delle operazioni e della relazione d'ordine nell'insieme dei numeri razionali $\mathbf{Q}$ e nell'insieme dei numeri reali $\mathbf{R}$. Definizione di potenza con esponente razionale e proprietà. Semplici calcoli con i radicali.

I quesiti selezionati riguardano essenzialmente:

- Rappresentazione di una frazione in forma decimale e viceversa
- Frazioni e disposizioni dei numeri sulla retta
- Potenze e in particolare le radici quadrate

2010

79. Due numeri interi positivi, entrambi non primi, hanno massimo comun divisore 7 e minimo comune multiplo 105. Allora la loro somma è
- A. 112
 - B. 22
 - C. 56
 - D. 36
 - E. 42

Seguendo l'elenco degli argomenti ho scelto questo quesito poiché tratta il m.c.m. e il M.C.D di numeri non primi. Lo ho sottoposto agli alunni di due classi prime del liceo scientifico, proprio ora che questo argomento è stato affrontato e solo alcuni hanno saputo dare la risposta corretta C. Molti, non considerando il fatto che i due numeri dovessero essere non primi, hanno dato come risposta la A. Le difficoltà maggiori di questo quesito nascono da una lettura frettolosa del testo. Il consiglio è allora di abituare gli studenti a leggere bene le richieste, proponendo esercizi sempre diversi che li costringano a leggere attentamente la consegna.

2013

78. Nelle affermazioni che seguono n denota un opportuno numero intero positivo. Si sa che basta toglierne una perché le rimanenti siano compatibili tra loro: quale affermazione basta togliere?
- A. n è un quadrato perfetto
 - B. n è multiplo di 7
 - C. n è pari
 - D. n è somma di un multiplo di 11 e di un multiplo di 13
 - E. n è minore di 49

Questo quesito ha destato molte più problematiche del primo, proprio perché le affermazioni da confrontare sono cinque e solo una non è compatibile. Si è trovata una soluzione solo dopo un po' di suggerimenti ed osservazioni. Molti anche qui hanno avuto problemi di interpretazione del testo. Il suggerimento che ho dato è stato quelli di partire dai quadrati perfetti che potessero essere pari e multipli di 7 e li ho fatti ragionare con il $196 = 14 \times 14$. Hanno provato poi a scomporlo come somma di un multiplo di 11 e di un multiplo di 13; $196 = 11 \times 6 + 13 \times 10 = 66 + 130$. Hanno concluso che l'unica affermazione da togliere era la risposta **E**.

2013

5. Qual è il valore della frazione

$$\frac{-3^4 + 1}{\frac{1}{3} + \frac{1}{6}} ?$$

- A. - 160
- B. 164
- C. 41
- D. - 337
- E. - 40

In questo quesito, come nel prossimo, si deve saper ben lavorare con le frazioni. Le problematiche riscontrate sono due: prima di tutto il segno del 3^4 , spesso confuso con un + perché è per loro ormai immediato che alle potenze pari si associano i segni positivi, secondo il calcolo del denominatore che va invertito. La risposta esatta è la **A** ma confusa spesso con la E per via del denominatore fratto. Il concetto di divisione sin dalle elementari e medie è visto come una ripartizione e non come l'inverso della moltiplicazione. Crea spesso problemi fare l'inversione di un inverso.

2012

5. L'espressione

$$\frac{2^{-1} + 2^{-2}}{2^{-3} - 2^{-4}}$$

è uguale a

- A. 16
- B. 12
- C. 8
- D. 3
- E. 4

Si aggiunge in questo quesito la difficoltà delle potenze ad esponente negativo che è già di per sé un'inversione in una frazione in cui si deve calcolare il m.c.m. sia a numeratore che a denominatore. Proposto in classe, chi è riuscito a trovare la soluzione esatta ha prima invertito tutte le potenze negative e poi calcolato il m.c.m.. Il suggerimento che si potrebbe dare, eliminando il problema delle potenze ad esponente negativo, è quello di moltiplicare numeratore e denominatore per 2^4 , facendo capire ai ragazzi che è molto più facile cambiare le frazioni in frazioni equivalenti che non calcolare meccanicamente il m.c.m.. A tal proposito abbiamo analizzato con degli esempi l'ALGORITMO EUCLIDEO, un procedimento di calcolo univoco e semplice da far vedere agli studenti anche con Excel. Questo algoritmo permette di calcolare il M.C.D. ricorrendo solo a somme e sottrazioni. Il suggerimento è sempre quello di abituare i ragazzi al ragionamento usando meno regole possibile.

2009

3. Per tutti i valori di p e q diversi da zero, l'espressione

$$p^{-1}q^{-1}(q+2p)$$

è equivalente a

A $\frac{1}{p} + \frac{2}{q}$ [*]

B $\frac{1}{p} + 2$

C $\frac{q}{p} + \frac{2p}{q}$

D $\frac{q}{p} + \frac{2}{q}$

Qui, oltre alla difficoltà delle potenze negative, si aggiunge la parte letterale e il saper lavorare con le frazioni suddividendo la prima parte del numeratore con il denominatore e la seconda parte del numeratore con lo stesso denominatore.

2010

5. L'espressione $2^{-\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{2}$ è uguale a

A. $2\sqrt{2}$

B. 1

C. $\frac{1}{\sqrt{2}}$

D. $\frac{1}{2}$

E. 2

Ho selezionato ora 5 quesiti relativi alle radici: prodotto di radici, somma di radici, radici di numeri decimali. Le radici sono un argomento che risulta sempre poco chiaro e anche la definizione pone spesso molti problemi. Esaminando il 5 del 2010 si può scrivere $\sqrt{2}$ come $2^{1/2}$ e applicare la proprietà delle potenze eliminando così il problema dell'esponente negativo.

2011

5. Il valore dell'espressione

$$\sqrt{27} + \sqrt{12}$$

è

- A. $\sqrt{50}$
- B. $\sqrt{78}$
- C. $\sqrt{75}$
- D. $\sqrt{69}$
- E. $\sqrt{39}$

In questo quesito bisogna saper scomporre i numeri in fattori primi, saper portare fuori dalla radice quadrata, sommare radici con stesso radicando, e saper portare dentro la radice. La risposta esatta è la **C** ma la **E** piace sicuramente di più...

2012

3. Il prodotto

$$(p - \sqrt{p^2 + 1})(p + \sqrt{p^2 + 1})$$

è uguale a

- A. 1
- B. $2p^2 - 1$
- C. p^2
- D. $2p$
- E. -1

In questo quesito il prodotto notevole somma per differenza si può facilmente riconoscere, quello che forse sfugge è il segno. La risposta corretta è la **E**.

2013

10. Qualunque sia il numero reale a , l'espressione

$$\sqrt{(\sqrt{a^2 + 4} - 2)(\sqrt{a^2 + 4} + 2)}$$

equivale a

- A. $-a$
- B. $|a|$
- C. a
- D. $\sqrt{a^2 + 8}$
- E. $\pm a$

Anche in questo quesito ricompare la somma per differenza con le radici in una radice. La difficoltà che si può incontrare, una volta calcolato il prodotto, è stabilire se il risultato è la risposta B o la risposta E. Si sbaglia spesso perché il concetto di modulo è compreso male. La confusione nasce anche dalle scuole medie, dove il concetto di radice quadrata di un numero elevato al quadrato viene dato con la doppia possibilità del più e del meno. La risposta corretta è la **B**.

2012

1. Il numero $\sqrt{0,000025}$ è uguale a

- A. $5 \cdot 10^{-6}$
- B. $5 \cdot 10^{-2}$
- C. $5 \cdot 10^{-8}$
- D. $5 \cdot 10^{-4}$
- E. $5 \cdot 10^{-3}$

Qui è necessario saper scrivere un numero decimale in potenza negativa e calcolare la radice quadrata. La risposta esatta è la **E**. Sia qui che negli esercizi riportati in seguito sono essenziali le proprietà delle potenze che, sempre nell'ottica di ridurre al minimo le regole e al massimo il ragionamento, possiamo riassumere in due proprietà:

1. $a^n = a \cdot a \cdots a$ n VOLTE

2. $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$

Si possono allora proporre degli esercizi di approssimazione dei numeri, applicando concretamente solo le due proprietà date.

2011

3. Un numero h verifica la relazione $2 < h < 3$. Si può dedurre che

- A. $h^2 < 4$
- B. $\frac{1}{h^2} < \frac{1}{4}$
- C. $\frac{1}{\sqrt{h}} < \frac{1}{3}$
- D. $\sqrt{h} > 2$
- E. $\frac{1}{h} > \frac{1}{2}$

Ho proposto questo esercizio in classe, e tutti sono partiti sostituendo al posto di h un numero, nel migliore dei casi 2,5. Hanno provato le varie disuguaglianze e si sono fermati all'unica che risultava corretta, la **B**.

Questo esercizio può essere anche risolto sapendo la monotonia delle funzioni descritte: $a < x < b$ se e solo se $F(a) < F(x) < F(b)$ se F è crescente altrimenti la disuguaglianza si inverte.

2010

1. Quale delle seguenti disuguaglianze è vera?

A. $\frac{5}{2} < 3,6 < \frac{7}{2}$

B. $\frac{10}{3} < 3,6 < \frac{11}{3}$

C. $\frac{7}{3} < 3,6 < \frac{8}{3}$

D. $\frac{8}{3} < 3,6 < \frac{10}{3}$

E. $\frac{9}{2} < 3,6 < \frac{11}{2}$

Anche in questo quesito riguardante le disuguaglianze, la maggior parte degli alunni ha svolto la divisione in colonna e controllato tra chi era compreso il numero 3,6. Alcuni hanno ridotto allo stesso denominatore il 3,6 ($3,6=36/10=18/5$), richiamando la disposizione dei numeri sulla retta. La risposta corretta è la **B**.

2010

10. Sia b un numero diverso da 0. Se a è il triplo di b e c è metà di b , qual è il rapporto tra $3c$ e $2a$?

A. $\frac{1}{6}$

B. $\frac{1}{2}$

C. $\frac{1}{4}$

D. $\frac{2}{3}$

E. $\frac{3}{2}$

In questi altri tre quesiti ho selezionato i rapporti, le divisioni e i prodotti. Nel 10 del 2010 si deve prima tradurre algebricamente quanto richiesto e poi calcolare il rapporto che da come risultato $1/4$, cioè la risposta **C**. E' essenziale sapere bene che una frazione non cambia moltiplicando numeratore e denominatore per lo stesso numero. Proposto agli alunni, la maggioranza lo ha risolto sostituendo dei numeri, in pochi algebricamente o utilizzando i segmenti.

4. Qual è il risultato della divisione di $0,16 \cdot 10^{-4}$ per 0,05?
- A. 0,00032
 - B. 0,0032
 - C. 3,2
 - D. 0,032
 - E. 0,32

In questa divisione tra decimali conviene trasformare $0,16 \cdot 10^{-4}$ come $16 \cdot 10^{-6}$ e 0,05 come $5 \cdot 10^{-2}$. Calcolare la divisione $16:5=3,2$ e, per la proprietà delle potenze, $10^{-6}:10^{-2}=10^{-4}$ quindi $3,2 \cdot 10^{-4} = 0,00032$ cioè la risposta A. Sono ancora essenziali le proprietà delle potenze.

ALGEBRA : Prof.ssa Bianchi Maria

SYLLABUS

Manipolazioni di espressioni algebriche. Concetto di soluzione e di “insieme delle soluzioni” di una equazione, di una disequazione, di un sistema di equazioni e/o disequazioni. Equazioni e disequazioni di primo e secondo grado. Sistemi lineari.

I POLINOMI

SETTEMBRE 2009

11. È dato il polinomio

$$P(a) = a^3 - a^2 - 3a + 1.$$

Allora $P(\sqrt{2})$ è uguale a:

- A $-1 + \sqrt{2}$
- B $3 - \sqrt{2}$
- C $-1 - \sqrt{2}$ [*]
- D $3 + \sqrt{2}$

N.B. $P(\sqrt{2}) = (\sqrt{2})^3 - (\sqrt{2})^2 - 3\sqrt{2} + 1 = 2\sqrt{2} - 2 - 3\sqrt{2} + 1 = -\sqrt{2} - 1$

Nella risoluzione di questo quesito si possono evidenziare due problematiche:

1) Comprendere il significato di $P(\sqrt{2})$, ovvero calcolare il valore che il polinomio

$P(a)$ assume quando si sostituisce alla variabile a il valore $\sqrt{2}$

2) Lavorare con i radicali

Eventuali errori:

- $(\sqrt{2})^3 = 4\sqrt{2}$ (errore tipico con i radicali nel portar fuori dalla radice un fattore) ottenendo così la risposta A
- $-a^2 = (-\sqrt{2})^2 = 2$ ottenendo così la risposta B
- Se si commettono entrambi gli errori descritti si arriva alla risposta D

SETTEMBRE 2009

3. Il polinomio $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ si annulla in -4 , -2 , 1 e 2 . Allora il termine noto d è uguale a:

- A 16 [*]
- B -16
- C 4
- D -4

N.B. E' importante ricordarsi che un polinomio si può scrivere come somma di monomi o come prodotto di polinomi (scomposizione), per esempio per un polinomio di secondo grado avrò $P(x) = x^2 + ax + b = (x - x_0)(x - x_1) = x^2 - (x_0 + x_1)x + x_0x_1$.

Essendo il polinomio di quarto grado e conoscendo i quattro valori per cui esso si annulla, basta scomporlo, $P(x) = (x + 4)(x + 2)(x - 1)(x - 2)$ e ricavare così il termine noto $d = 4 \cdot 2 \cdot (-1) \cdot (-2) = 16$.

La difficoltà principale del quesito consiste proprio nell'associare i quattro valori dati ai binomi con cui si può scomporre il polinomio, e nel capire che dal polinomio scomposto si possono ricavare tutti i coefficienti, a, b, c, d .

SETTEMBRE 2010

80. Gli zeri del polinomio $P(x) = x^2 + ax + b$ sono -1 e 2 . Allora $P(7)$ vale

- A. 35
- B. 42
- C. 54
- ~~X~~ D. 40
- E. 30

N.B. Il quesito si può risolvere in due modi

- 1) Si scrive prima il polinomio nel prodotto di due binomi $P(x) = (x + 1)(x - 2)$ (vedi quesito 3 del 2009) e poi si applica al polinomio scomposto quello detto nell'esercizio 11 del 2009 $P(7) = (7 + 1)(7 - 2) = 40$
- 2) Si pensa alla scomposizione del trinomio di secondo grado $x^2 + ax + b = (x - x_1)(x - x_2) = x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2$
Quindi $b = -1 \cdot 2 = -2$ $a = -(-1 + 2) = -1$
 $\Rightarrow P(x) = x^2 - x - 2 \Rightarrow P(7) = 40$

Eventuali errori:

- Nella risoluzione 2) si dimentica di fare l'opposto della somma degli zeri ottenendo $a = 2 - 1 = 1 \Rightarrow P(x) = x^2 + x - 2 \Rightarrow P(7) = 54$ risposta C
- Per altri errori valgono le stesse considerazioni fatte nei quesiti precedenti

SETTEMBRE 2011

8. Per un fissato valore del parametro k , si sa che il polinomio $P(x) = x^2 - 3x + k$ ha un'unica radice. Quale delle seguenti condizioni è vera?

- A. $1 < k < 2$
- ~~X~~ B. $2 < k < 3$
- C. $-2 < k < -1$
- D. $0 < k < 1$
- E. $-1 < k < 0$

N.B. Il quesito si può risolvere in diversi modi

- 1) Il polinomio dato è un trinomio di secondo grado con il coefficiente della x^2 pari ad 1 quindi $P(x) = x^2 - 3x + k = (x - x_1)(x - x_2) \Rightarrow x_1 + x_2 = -3$ e $x_1 \cdot x_2 = k$ ma

$$\text{dovendo essere } x_1 = x_2 \Rightarrow 2x_2 = -3 \text{ e } x_2^2 = k \Rightarrow x_2 = -\frac{3}{2} \text{ e } k = \frac{9}{4}$$

$$\Rightarrow 2 < k < 3$$

- 2) Si può pensare di scomporre il polinomio come quadrato di un binomio

$$P(x) = x^2 - 3x + k = (x + a)^2 \Rightarrow x^2 - 3x + k = x^2 + a^2 + 2ax \Rightarrow 2a = -3$$

$$\Rightarrow a = -\frac{3}{2} \text{ e } k = a^2 \Rightarrow k = \frac{9}{4}$$

- 3) Si possono utilizzare le conoscenze sulle equazioni di secondo grado .

$$x^2 - 3x + k = 0 \text{ per avere soluzioni coincidenti } \Delta = 0 \Rightarrow 9 - 4k = 0 \Rightarrow k = \frac{9}{4}$$

Oppure invece di lavorare direttamente con il Δ , si calcolano le due radici e poi si uguagliano, così facendo i calcoli si complicano, ci si impiega più tempo ed aumenta la probabilità di errore.

Eventuali errori:

- Nella risoluzione 3), errore nel calcolare il Δ , ovvero $\Delta = 9 + 4k$
 $\Rightarrow k = -\frac{9}{4}$ e collocandolo non in modo corretto sulla retta si ottiene la risposta C
- Nella risoluzione 2) si confonde il valore di a con k per cui si ottiene
 $\Rightarrow k = -\frac{3}{2}$ risposta C

LE ESPRESSIONI ALGEBRICHE

SETTEMBRE 2012

3. Il prodotto

$$(p - \sqrt{p^2 + 1})(p + \sqrt{p^2 + 1})$$

è uguale a

- A. 1
- B. $2p^2 - 1$
- C. p^2
- D. $2p$
- ☒ ~~E.~~ -1

N.B. Il quesito si risolve velocemente, è importante però riconoscere il prodotto come somma per differenza. $(p - \sqrt{p^2 + 1})(p + \sqrt{p^2 + 1}) = p^2 - p^2 - 1 = -1$

Se non si riconosce il prodotto notevole si deve semplificare l'espressione lavorando con i radicali (si impiega più tempo ed aumentano i calcoli).

Eventuali errori:

- Anche se si riconosce il prodotto notevole si applica la formula erroneamente, per esempio non si cambia il segno a tutto il secondo termine ottenendo $p^2 - p^2 + 1 = 1$ risposta A; oppure $p^2 + p^2 - 1 = 2p^2 - 1$ risposta B

SETTEMBRE 2013

10. Qualunque sia il numero reale a , l'espressione

$$\sqrt{(\sqrt{a^2 + 4} - 2)(\sqrt{a^2 + 4} + 2)}$$

equivale a

- A. $-a$
- ☒ B. $|a|$
- C. a
- D. $\sqrt{a^2 + 8}$
- E. $\pm a$

N.B. Nella risoluzione dell'espressione sotto radice valgono le stesse considerazioni fatte nel quesito precedente. $\sqrt{(\sqrt{a^2 + 4} - 2)(\sqrt{a^2 + 4} + 2)} = \sqrt{a^2 + 4 - 4} = \sqrt{a^2} = |a|$

Eventuali errori:

- Un errore molto comune è il seguente: $\sqrt{a^2} = \pm a$ risposta E. Errata in quanto il risultato di una radice quadrata non può mai essere negativo oppure $\sqrt{a^2} = a$ risposta C (soluzione incompleta). Tali errori derivano dalla non effettiva comprensione del significato di radice quadrata e del valore assoluto.
- Errori evidenziati nell'esercizio precedente portano alla risposta D

LE EQUAZIONI

SETTEMBRE 2010

2. Una sola delle seguenti equazioni ha soluzioni reali. Quale?

- A. $x^2 - 3x + 3 = 0$
- ☒ B. $x^2 - 5x + 5 = 0$
- C. $x^2 - 5x + 7 = 0$
- D. $x^2 - 4x + 5 = 0$
- E. $x^2 - 4x + 6 = 0$

N.B. Quesito semplice. Basta calcolarsi il Δ delle equazioni e trovare quella per cui $\Delta \geq 0$. Si può procedere anche con il calcolo delle soluzioni, si arriva comunque alla soluzione ma si impiega più tempo.

SETTEMBRE 2012

8. E' data l'equazione

$$\frac{x^2}{2} + 3x + 2 = 0.$$

La più grande delle sue soluzioni è

- A. $\frac{-3 + \sqrt{5}}{4}$
- B. $\frac{3 + \sqrt{13}}{4}$
- ~~C.~~ $\sqrt{5} - 3$
- D. $-3 + 2\sqrt{5}$
- E. $3 + \sqrt{13}$

N.B. Bisogna calcolarsi le soluzioni dell'equazione. Facciamo m.c.m. per togliere il denominatore, otteniamo $x^2 + 6x + 4 = 0$, poi applicando la formula risolutiva ridotta calcoliamo prima il discriminante $\Delta = 9 - 4$ e poi le soluzioni $x_1 = -3 + \sqrt{5}$ e $x_2 = -3 - \sqrt{5}$

Eventuali errori:

- Errore nel calcolo del discriminante $\Delta = 9 + 4 = 13$, e nella formula risolutiva si scrive 3 al posto di -3 $\Rightarrow x_1 = 3 + \sqrt{13}$ risposta E.
- Se non si applica la formula risolutiva ridotta si hanno più conti,
 $\Delta = 36 - 16 = 20 \quad x_1 = \frac{-6 + \sqrt{20}}{2}$ bisogna così lavorare con i radicali per poter semplificare la frazione e trovare la soluzione come data dal quesito. Questo può indurre ad errori, per esempio $\sqrt{20} = 4\sqrt{5}$ con risposta finale D
- Inoltre se non si elimina all'inizio il denominatore e si lavora con l'equazione come è data dall'esercizio, siccome un coefficiente è razionale, si può facilmente commettere errori, per esempio il denominatore nella formula risolutiva diventa 4 invece che 1 con risposta finale A oppure la B se si commette l'ulteriore errore del segno di b (3 invece di -3)

SETTEMBRE 2013

2. Tutti i valori di k per i quali l'equazione

$$x^2 + kx + (k + 1)^2 = 0$$

ammette $x = 1$ come radice verificano una delle seguenti **condizioni**. Quale?

- ~~A.~~ $-3 < k < 0$
- B. $k > 2$
- C. $1 < k < 3$
- D. $-1 < k < 2$
- E. $k < -1$

N.B. Innanzitutto bisogna riflettere sul significato di soluzione di una equazione (un valore è soluzione di una equazione se sostituito alla variabile rende vera l'identità) e bisogna anche aver ben chiaro il giusto significato delle due lettere che sono nell'equazione (x è la variabile, k il parametro). Applicando ciò otteniamo

$1 + k + (k + 1)^2 = 0 \Rightarrow k^2 + 3k + 2 = 0$ e risolta otteniamo $k = -1$ e $k = -2$ che soddisfano alla condizione A.

Si può pensare di dover imporre alla equazione del quesito la condizione $\Delta \geq 0$ per accertarsi che le soluzioni che si sono ottenute siano accettabili. E' in più in quanto le soluzioni ottenute sono sicuramente accettabili avendo imposto che in corrispondenza ad esse la soluzione sia reale ($x=1$); il rischio come al solito è che si perde tempo e che nel risolvere la disequazione si commettono errori che portano ad una soluzione errata.

LE DISEQUAZIONI

SETTEMBRE 2009

10. Si indichi l'insieme delle soluzioni della disequazione

$$|x| < 2x + 3.$$

A $x > -1$ [*]

B $x > 0$

C $x < -1$

D $-1 < x < 0$

N.B. Dallo studio della funzione valore assoluto di x si ottengono i due sistemi da cui otteniamo le soluzioni della disequazione. $|x| = x$ se $x \geq 0$ $|x| = -x$ se $x < 0 \Rightarrow$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x < 2x + 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x > -3 \end{cases} \Rightarrow x \geq 0$$

$$\begin{cases} x < 0 \\ -x < 2x + 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 0 \\ x > -1 \end{cases} \Rightarrow -1 < x < 0$$

Dall'unione delle due soluzioni otteniamo $x > -1$

Eventuali errori:

- Non si rappresenta correttamente la funzione $|x|$ come per esempio $|x| = x$ sia per $x \geq 0$ sia per $x < 0$ arrivando alla soluzione B, avendo anche omesso lo zero.
Ci sono difficoltà cognitive di vario tipo: pensando che il modulo di un numero è un numero privato del segno, non si capisce quale sia il segno di x . Si deve rimuovere questa idea. Le definizioni che presentano due casi in parallelo sono più difficili per il cervello da dominare, la sola via d'uscita è analizzarle una alla volta.
- Si può dimenticare uno dei due sistemi per cui si ottengono soluzioni parziali che portano alla risposta D oppure B.

- Errore che si commette spesso nelle disequazioni di primo grado, quando si moltiplica per un numero negativo ci si dimentica di cambiare verso alla disequazione; seconda disequazione nel secondo sistema avrà soluzione $x < -1$, con soluzione finale C.

Anche in questi casi analogie visive possono essere molto utili per aiutare la memoria: i numeri sono punti di una retta orizzontale nella quale è stata fissata una origine ed un orientamento (dire per esempio $A < B$ significa dire che A è più a sinistra di B, ecc.).

SETTEMBRE 2010

20. Se $a > 0$ è un numero fissato, dire quale tra i seguenti è l'insieme delle soluzioni della disequazione

$$a^2 - ax^2 > 0.$$

- ☒ A. L'insieme dei numeri reali x tali che: $-\sqrt{a} < x < \sqrt{a}$
 B. L'insieme dei numeri reali x tali che: $x < -\sqrt{a}$ oppure $x > \sqrt{a}$
 C. L'insieme vuoto
 D. L'insieme dei numeri reali x tali che: $0 < x < \sqrt{a}$
 E. L'insieme dei numeri reali

N.B. Disequazione letterale semplificata in quanto lo studio è richiesto soltanto per alcuni valori del parametro ($a > 0$) per cui si risolve normalmente come se al posto di a ci fosse un numero positivo. $a(a - x^2) > 0 \Rightarrow a - x^2 > 0 \Rightarrow$ studio del segno di un trinomio di secondo grado soluzioni interne all'intervallo, risposta A.

Eventuali errori:

- Spesso si tende a risolvere la disequazione di secondo grado come un'equazione e cioè $a - x^2 > 0 \Rightarrow x^2 < a \Rightarrow x < \pm\sqrt{a}$, che non ha senso ma si può associare alla risposta B oppure alla risposta C
- Si fa spesso confusione nello studio del segno di un trinomio di secondo grado tra intervallo interno ed esterno, risposta B

SETTEMBRE 2011

9. Se $c < 0$, l'insieme S delle soluzioni della disequazione

$$cx^2 - x > 0$$

è

- A. $S = (0, -\frac{1}{c})$
☒ B. $S = (\frac{1}{c}, 0)$
 C. $S = (-\infty, 0) \cup (\frac{1}{c}, +\infty)$
 D. $S = (-\infty, \frac{1}{c}) \cup (0, +\infty)$
 E. $S = (-\frac{1}{c}, +\infty)$

N.B. Disequazione letterale semplificata come la precedente solo in questo caso il parametro è negativo.

Si può risolvere in due modi:

- 1) Studio del segno di un trinomio di secondo grado. Essendo il termine noto nullo le soluzioni dell'equazione associata sono $x = 0$ e $x = \frac{1}{c}$ per cui essendo il coefficiente della x^2 negativo le soluzioni sono interne all'intervallo
- 2) Si scompone la disequazione di secondo grado nel prodotto di due disequazioni di primo grado e poi si fa lo studio del segno del prodotto.

Eventuali errori:

- Nella soluzione 1) si dimentica che $\frac{1}{c}$ è negativo e quindi si rappresenta a destra dello zero ed inoltre nel considerare gli intervalli si sbaglia e si prende l'intervallo esterno ottenendo così la risposta C; oppure rappresentando correttamente le soluzioni si considera l'intervallo sbagliato ottenendo la risposta D
- Nella soluzione 1) si ottiene come soluzione, oltre allo zero, $-\frac{1}{c}$ ottenendo così la risposta A
- Nella soluzione 2) tipico errore si ha quando nel risolvere la disequazione $cx > 1$ ci si dimentica che c è negativo e si ottiene $x > \frac{1}{c}$ con soluzione finale D, e se si sbaglia anche la rappresentazione sulla retta e cioè $\frac{1}{c}$ si colloca dopo lo zero si ottiene la risposta C.

SETTEMBRE 2011

10. Quale delle seguenti disuguaglianze è vera per ogni numero d maggiore di -2 e diverso da zero?

- ☒ A. $d^3 > -2d^2$
B. $-1 + d < -3$
C. $2d < -4$
D. $-d > 2$
E. $d^2 < -2d$

N.B. Basta risolvere velocemente le disequazioni a partire da quelle più semplici per arrivare alla soluzione. $d^3 > -2d^2 \Rightarrow d^2(d+2) > 0 \Rightarrow d > -2$ con $d \neq 0$

Eventuali errori:

- Si può rispondere erroneamente la D poiché nel moltiplicare per -1 non si cambia il verso della disuguaglianza ($-d > 2 \Rightarrow d > -2$), ma non si è letto attentamente il testo che esclude la soluzione $d=0$ compresa invece nella risposta D.

SETTEMBRE 2012

2. L'insieme delle soluzioni della disequazione

$$\frac{x}{1-x^2} \geq 0$$

è

- A. $[0,1) \cup (1, +\infty)$
- B. $(-1,1)$
- C. $[0, +\infty)$
- D. $[0,1)$
- ☒ E. $(-\infty, -1) \cup [0,1)$

N.B. Esercizio che richiede lo studio di una disequazione fratta con soluzioni finali date come intervalli (spesso tale rappresentazione non è del tutto chiara ai ragazzi)

L'esercizio si risolve facendo lo studio del segno del numeratore (è positivo per $x > 0$, si annulla per $x = 0$ e negativo per $x < 0$), lo studio del segno del denominatore (è positivo per $-1 < x < 1$ e negativo per $x < -1 \vee x > 1$) da cui si deriva il segno della frazione che sarà positiva o nulla per $x < -1 \cup 0 \leq x < 1$.

Eventuali errori:

- In genere nel fare lo studio del segno gli errori che si commettono sono molteplici soprattutto se paragonati all'inventiva dei ragazzi, con soluzioni che possono essere anche non comprese tra quelle date. Spesso l'errore tipico si riscontra nel disegnare il grafico che aiuta nello studio del segno (dove sono messi in evidenza per tutti i valori della variabile il segno del termine che si sta studiando) poiché lo confondono con il grafico che si usa per lo studio dei sistemi di disequazioni (ove sono messi in evidenza i soli valori della variabile nei quali le relative disequazioni sono verificate).
- Errore gravissimo e tipico si ha quando si elimina il denominatore della disequazione, si pensa di risolvere la disequazione come si risolvono le equazioni. Si arriva così ad ottenere $x \geq 0$ con risposta C. Se poi ci si ricorda di mettere la condizione di esistenza si indica la risposta A

SETTEMBRE 2012

85. Qual è l'insieme dei valori di p per i quali la disequazione

$$px^2 - 4p^2 \geq 0$$

NON ammette soluzioni?

- A. $\{p \geq 0\}$
- B. $\{p \neq 0\}$
- C. $\{p \leq 0\}$
- ☒ D. $\{p < 0\}$
- E. $\{p > 0\}$

N.B. Non è richiesto di calcolare le soluzioni quindi è gravoso procedere nella risoluzione della disequazione letterale con lo scopo di calcolare le soluzioni poiché anche se si può arrivare alla soluzione corretta si impiega più tempo.

Essendo $4p^2$ sempre positivo $-4p^2$ sarà sempre negativo, px^2 è negativo se $p < 0$
 $\Rightarrow px^2 - 4p^2$ è negativo se $p < 0$.

E' anche molto utile creare immagini; $4p^2$ è a destra dello zero, px^2 a sinistra se p è negativo impossibile che venga dopo. Poi si ragiona sullo zero.

Eventuali errori:

- Ragionamento esatto ma alla fine ci si dimentica che anche zero è soluzione e si indica la risposta C
- Tipico è la non lettura attenta del testo. Siccome si è abituati a trovare sempre le soluzioni, non si nota che il quesito chiede i valori per i quali la soluzione non esiste (non a caso il non nel testo è in maiuscolo) per cui si danno le soluzioni opposte e cioè la A, oppure la E se si dimentica anche che zero è soluzione.

I SISTEMI

SETTEMBRE 2009

5. Si risolva il sistema

$$\begin{cases} x - 2y = 0 \\ 2x + z = 4 \\ y + z = 1 \end{cases}$$

Se $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ è la soluzione del sistema, allora $\bar{x} + \bar{y} + \bar{z}$ è uguale a:

- A 4
- B 3 [*]
- C 1
- D 2

N.B. Si risolve il sistema utilizzando per esempio il metodo per sostituzione

$$\begin{cases} x - 2y = 0 \\ x = \frac{4 - z}{2} \\ y = 1 - z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 - \frac{z}{2} - 2 + 2z = 0 \\ x = \frac{4 - z}{2} \\ y = 1 - z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = 0 \\ x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$$

Trovate le soluzioni si sommano.

SETTEMBRE 2010

17. Si consideri il sistema di equazioni

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 3, \\ x^2 - 2y^2 = 0. \end{cases}$$

Quante coppie (x, y) di numeri reali sono soluzioni del sistema?

- A. 1
- B. 0
- C. 8
- ~~D.~~ 4
- E. 2

N.B. Risolviamo il sistema con il metodo per sostituzione

$$\begin{cases} 2y^2 + y^2 = 3 \\ x^2 = 2y^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^2 = 1 \\ x^2 = 2y^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \pm 1 \\ x^2 = 2y^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = \pm\sqrt{2} \end{cases} \text{ e } \begin{cases} y = -1 \\ x = \pm\sqrt{2} \end{cases}$$

Eventuali errori:

- Nella risoluzione delle due equazioni $y^2 = 1$ e $x^2 = 2$ si individuano le sole soluzioni positive rispondendo A

SETTEMBRE 2010

83. Sia c un numero positivo assegnato. Qual è l'insieme delle soluzioni del seguente sistema di disequazioni?

$$\begin{cases} x^2 - 4c^2 \leq 0, \\ |x| - c \geq 0. \end{cases}$$

- A. $(-\infty, -2c] \cup [2c, +\infty)$
- B. $[-c, c]$
- C. L'insieme vuoto
- D. $[c, 2c]$
- ~~E.~~ $[-2c, -c] \cup [c, 2c]$

N.B. Esercizio complesso in quanto richiede più abilità.

Ho un sistema di disequazioni quindi devo risolvere le disequazioni e poi prendere le soluzioni comuni.

$$x^2 - 4c^2 \leq 0 \Rightarrow -2c \leq x \leq 2c$$

$$|x| - c \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x - c \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x \geq c \text{ e } \begin{cases} x < 0 \\ -x - c \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x \leq -c$$

Le soluzioni comuni sono $-2c \leq x \leq -c \cup c \leq x \leq 2c$

Eventuali errori:

- Nello studio della disequazione con il valore assoluto si imposta un solo sistema, per esempio quello con valore positivo con unica soluzione $x \geq c$, risposta D

- Sempre nella seconda disequazione, si fanno entrambi i sistemi ma nel secondo si dimentica il segno meno alla x $\begin{cases} x < 0 \\ x - c \geq 0 \end{cases} \Rightarrow$ impossibile, risposta D
- Nel rappresentare il grafico che aiuta a trovare le soluzioni comuni, invece di rappresentare i valori della x in cui le disequazioni sono verificate si fa una sorta di studio del segno rappresentando valori negativi e positivi e alla fine si fa il prodotto dei segni, risposta D.
- Nel risolvere la prima disequazione si prende l'intervallo sbagliato (quello esterno), risposta A

SETTEMBRE 2013

11. L'insieme delle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} 7x^2 - 5x \geq 0 \\ \frac{2x-1}{2-x} > 0 \end{cases}$$

~~X~~

A. $\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{7}\right)$

~~X~~

~~B. $\left[\frac{5}{7}, 2\right)$~~

C. $(-\infty, 0] \cup (2, +\infty)$

D. $\left[0, \frac{1}{2}\right) \cup \left[\frac{5}{7}, 2\right)$

E. $(-\infty, 0] \cup \left(\frac{1}{2}, \frac{5}{7}\right) \cup (2, +\infty)$

N.B. Esercizio non semplice in quanto si richiedono più abilità.

$$7x^2 - 5x \geq 0 \Rightarrow x \leq 0 \vee x \geq \frac{5}{7} \quad (\text{segno del trinomio di secondo grado})$$

$$\frac{2x-1}{2-x} > 0 \Rightarrow \frac{1}{2} \leq x < 2 \quad (\text{studio del segno della frazione})$$

La cui soluzione comune è $\frac{5}{7} \leq x < 2$

Eventuali errori:

- Nella risoluzione della disequazione di secondo grado si prende come soluzione l'intervallo interno escludendo anche gli estremi, risposta A
- Nella risoluzione della disequazione fratta facendo lo studio del denominatore ($2 - x > 0$) non si cambia il verso della disequazione moltiplicando per un valore negativo ottenendo $x > 2$, oppure si confonde la rappresentazione del segno con la disequazione finale ottenuta ($x < 2$) arrivando a definire il denominatore positivo per $x > 2$ e negativo per $x < 2$, per entrambi con soluzione finale C

- Se invece si utilizza, per individuare la soluzione finale del sistema lo stesso schema che si utilizza per lo studio del segno, facendo linee continue e linee tratteggiate e poi il prodotto dei segni, si arriva alla soluzione D oppure alla E se si sbaglia anche lo studio di una delle due disequazioni

Geometria : Prof.ssa Claudia Nisi

SYLLABUS

Principali figure piane e loro proprietà elementari. Teorema di Pitagora. Proprietà dei triangoli simili. Seno coseno e tangente di un angolo ottenuti come rapporti fra i lati di un triangolo rettangolo. Perimetro e area delle principali figure piane. Incidenza, parallelismo e perpendicolarità tra rette nel piano. Principali figure nello spazio (rette, piani, parallelepipedo, prismi, piramidi, cilindri, coni e sfere). Volumi dei solidi elementari. Coordinate cartesiane nel piano. Equazione della retta per due punti. Equazione di una retta per un punto e parallela o perpendicolare ad una retta data. Pendenza e intersezioni con gli assi di una retta data. Condizione di perpendicolarità tra due rette. Distanza tra due punti.

I quesiti sono suddivisi in tre gruppi: Piano cartesiano, geometria euclidea e trigonometria.

Alcuni quesiti sono stati svolti da studenti di una classe seconda di liceo scientifico.

Piano cartesiano

Pr. n°2 - 2009

In un piano cartesiano si consideri il triangolo di vertici $O(0;0)$, $A(0;2)$, $B(2;0)$. Ricordiamo che il baricentro di un triangolo è il punto in cui si incontrano le mediane del triangolo. Qual è la distanza tra il baricentro del triangolo OAB e l'origine O ?

A. $\frac{2}{3}\sqrt{2}$

B. $\frac{2}{3}\sqrt{3}$

C. $\frac{\sqrt{6}}{3}$

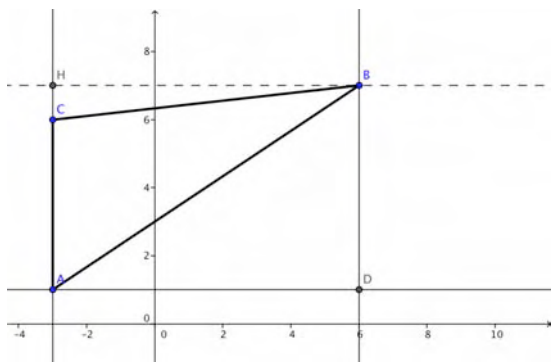
D. $\frac{\sqrt{6}}{2}$

È stato proposto in classe. Dopo aver rappresentato il triangolo nel piano cartesiano, gli studenti hanno determinato le coordinate del baricentro utilizzando la nota formula $G(2/3;2/3)$ e poi la distanza $OG=$

$\sqrt{\frac{4}{9} + \frac{4}{9}} = \frac{2}{3}\sqrt{2}$ In alternativa si poteva applicare il teorema del baricentro: "G divide ogni mediana in due parti di cui quella contenente il vertice è doppia dell'altra", quindi la distanza OG sarà $2/3$ della mediana OM relativa al lato AB , essendo $OM = \sqrt{2}$ si ottiene: $OG = \frac{2}{3}\sqrt{2}$

n°7 - 2010

I punti $A(-3, 1)$, $B(6, 7)$ e $C(-3, 6)$ sono i vertici del triangolo in figura. Qual è l'area di tale triangolo?



A. 22,5

B. 23,5

C. 24

D. 23

E. 22

È stato svolto da due gruppi di studenti :

un gruppo ha calcolato l'area sottraendo dall'area del rettangolo circoscritto ADBH le aree dei due triangoli ADB e CBH; l'altro sempre per differenza di aree come: ABH – CHB. Ho preso spunto da queste procedure per far notare che si poteva considerare AC come base , quindi.... Non servivano tanti calcoli superflui .

Come base si sceglie AC=5, l'altezza ad essa relativa sarà BH=9 $\Rightarrow \text{Area} = \frac{9 \cdot 5}{2} = 22,5$

n°1- 2013

Qual è l'area del triangolo avente i vertici nei punti di coordinate A(0,2), B(4,0) e C(7,6)?

- A. 10 B. 30 C. $6\sqrt{5}$ **D. 15** E. 60

Chi ha svolto il quesito ha rappresentato il triangolo nel piano cartesiano e osservato, dalle misure dei lati $AB = \sqrt{20}$, $AC = \sqrt{65}$ e $BC = \sqrt{45}$, che il triangolo è rettangolo in B, quindi si calcola l'area come $(AB \times BC) : 2 = 15$. Si poteva verificare anche la pendenza di $AB = -1/2$ e quella di BC è 2, quindi l'angolo B è retto

n°14 - 2010

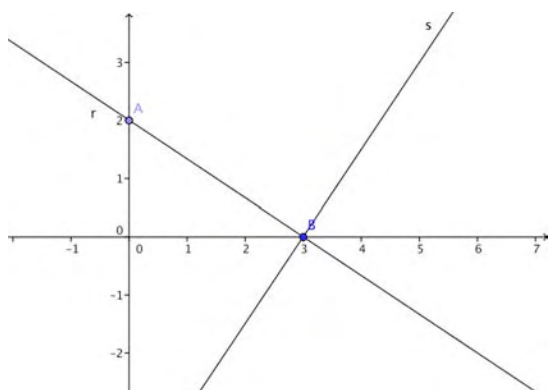
Sia r la retta di equazione $x + 2y - 1 = 0$. Quale tra le seguenti è l'equazione di una retta perpendicolare a r ?

- A. $y = -x/2$ B. $y = -x$ **C. $y = 2x$** D. $y = x/2$ E. $y = -2x$

Dal coeff. angolare di r $m = -1/2$, si risale al coeff. angolare della perpendicolare $m = 2$, l'unica possibile risposta è la C. Si potrebbe confondere con la condizione di parallelismo e trovare segnata la risposta A, oppure la E in cui si calcola il reciproco del coeff. angolare senza fare l'opposto...

n° 7- 2011

Le rette r e s in figura sono perpendicolari. L'equazione della retta s



- A. $3x - 2y - 6 = 0$
B. $2x - 3y - 6 = 0$
C. $2x + 3y - 6 = 0$
D. $3x + 2y - 9 = 0$

E. $3x - 2y - 9 = 0$

Come nell'esercizio precedente , solo che è necessario determinare $m_r = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = -\frac{2}{3}$, da cui $m_s = 3/2$, a

questo punto la scelta può essere la A. o la E. , è necessario usare l'equazione del fascio passante per B(3,0)...oppure scegliere quale equazione è soddisfatta sostituendo le coordinate di B . Da notare che l'equazione della risposta C è la retta r, quindi potrebbe essere confusa con la risposta se non si legge attentamente la richiesta!

Quello che fanno abitualmente gli studenti davanti ad un esercizio del genere è di determinare l'equazione della retta r , da cui ricavare m_r e poi usare l'equazione del fascio per scrivere l'equazione della perpendicolare... l'equazione di r non serve !...basta il suo coeff. Angolare !! Dunque concentrarsi sull'obiettivo risparmiando calcoli e procedimenti inutili....

n°9-2012

La retta passante per A (2, 0) con pendenza 1/3 interseca l'asse y nel punto

- A. (0,-2) B. (0,-3/4) **C.(0,-2/3)** D.(0,2) E.(0,-1)

In questo esercizio la maggior parte degli studenti andrebbe a scrivere l'equazione della retta passante per A di coeff. Angolare $m=1/3$, utilizzando l'equazione del fascio proprio, e poi va a sostituire $x=0$ per determinare

l'ordinata del punto richiesto: $\frac{y}{x-2} = \frac{1}{3} \Rightarrow y = \frac{1}{3}(x-2)$, con $x=0 \Rightarrow y = -2/3$. La via più breve è quella di

individuare come parola chiave nel quesito la "pendenza" e la sua definizione $m = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B}$, dunque sostituendo

le coordinate di A (2,0) e $x_B=0$, si ottiene $\frac{1}{3} = \frac{-y}{2}$, da cui $y=-2/3$. Più veloce la seconda via!

n°8- 2013

L'equazione dell'asse del segmento di estremi $P = (0,6)$ e $Q = (8,0)$ è

- A. $4x-3y-7=0$** B. $4x-3y+7=0$ C. $3x+4y-25=0$ D. $3x-4y+25=0$ E. $4x+3y-25=0$

La via più breve per determinare l'equazione dell'asse del segmento PQ è quella di usare la sua proprietà di luogo geometrico, dunque $PA=QA \Rightarrow (PA)^2=(QA)^2$, $\forall A(x,y) \in \text{asse}$, ovvero:

$$x^2+(y-6)^2=(x-8)^2+y^2 \Rightarrow x^2+y^2-12y+36=x^2-16x+64+y^2 \Rightarrow 16x-12y-28=0 \Rightarrow \mathbf{4x-3y-7=0}$$

In alternativa si individua il punto medio M(4,3) del segmento PQ e la retta passante per esso di coeff. Angolare $m'=-1/m$, con $m=-3/4$, quindi $m'=4/3$, con l'equazione del fascio si trova l'equazione dell'asse

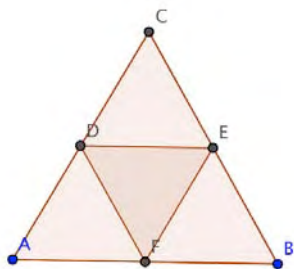
$$\frac{y-3}{x-4} = \frac{4}{3} \Rightarrow 4x-3y-7=0$$

Geometria Euclidea**n°6 -2009**

In un triangolo prendo i punti medi dei lati e considero un secondo triangolo che ha questi punti come vertici.

Il rapporto fra l'area del secondo triangolo e l'area del triangolo iniziale

- A) 1/3 **B) 1/4** C) 1/2 D) dipende dal triangolo che si considera



Gli studenti risolvono considerando un caso particolare: disegnano un triangolo equilatero, fissano i punti medi di ciascun lato e osservano che esso contiene 4 triangoli tutti uguali, da cui il triangolo CDE è 1/4 di ABC. Se ne discute in classe e si chiede se ciò è vero qualunque sia il triangolo... Al momento non conoscono bene le similitudini e non ricordano dalla scuola media la regola del rapporto delle aree come il quadrato del rapporto dei lati...

possiamo dire che senza usare regole hanno usato "l'immagine" per rispondere, anche se nella maggior parte dei casi si tende a disegnare il triangolo "perfetto"

n° 3-2010

Un foglio di carta quadrato viene piegato a metà; si ottiene così un rettangolo che ha perimetro 18 cm. Qual è l'area del quadrato iniziale, espressa in cm^2 ?

- A. 48 B. 64 C. 36 D. 32 E. 16

I: “il rapporto dei perimetri del rettangolo e del quadrato è $\frac{3}{4}$, perché il perimetro del quadrato è 4l e quello del rettangolo è 3l, quindi il perimetro del quadrato è $\frac{4}{3} \cdot 18 = 24$ cm, da cui il lato $l=6$ cm e l'area $=36 \text{ cm}^2$ ”

II : dalle informazioni del problema si capisce che le dimensioni del rettangolo sono : 6 cm e 3 cm, quindi il lato del quadrato è 6 cm e la sua area 36 cm^2 .

Pr. n°84-2010

Dato un cono di altezza h , volume V e vertice P , si consideri un secondo cono con vertice P' , che si ottiene sezionando il primo cono con un piano parallelo alla base a distanza $h/3$ dal punto P . Il secondo cono ha volume

- A. $V/9$ B. $V/12$ C. $V/24$ D. $V/27$ E. $V/18$

Basta ricordare che il rapporto dei volumi di due coni simili è : $V/V' = (h/h')^3$

n°20-2011

Un foglio rettangolare viene piegato lungo la congiungente i punti medi del lato più lungo, ottenendo così un rettangolo più piccolo. Si osserva che il rapporto fra lato maggiore e lato minore del foglio iniziale è lo stesso che si ha per il foglio piegato. Quanto vale questo rapporto?

- A. $\sqrt{2}$ B. $2\sqrt{2}$ C. $\frac{3}{2}$ D. 2 E. $\sqrt{3}$

Un mio studente risolve così: indica con x il lato minore e con $2y$ il lato maggiore del primo rettangolo, dunque traduce il problema : $\frac{2y}{x} = \frac{x}{y} \rightarrow 2y^2 = x^2 \rightarrow \frac{x^2}{y^2} = 2 \rightarrow \frac{x}{y} = \sqrt{2}$

n°16-2013

Su un foglio catastale un appartamento è rappresentato in scala 1 : 150 (cioè ogni centimetro sulla pianta corrisponde a 150 cm reali). La superficie del pavimento di una stanza trapezoidale misura 27 m^2 ; allora l'area del trapezio che lo rappresenta in pianta

- A. non può essere calcolata senza maggiori dettagli sul trapezio
B. è $85,75 \text{ cm}^2$ C. è 18 cm^2 D. è 12 cm^2 E. è 40,5 cm

È un problema di proporzioni, se 1 cm in pianta corrisponde a 1.5 m, passando alla superficie 1 cm^2 in pianta corrisponde a $(1,5 \text{ m})^2$ reali, dunque 27 m^2 corrispondono in pianta a $27 : (1,5)^2 = 12 \text{ cm}^2$, il calcolo viene semplice se si passa dal decimale alla frazione $1,5 = 3/2$, dunque $(1,5)^2 = 9/4$

n°9-2013

Dobbiamo costruire una vasca cilindrica (scoperta) seguendo queste istruzioni: prendendo le misure all'esterno, la sua altezza deve essere uguale al raggio r del cerchio che costituisce la sua base; inoltre lo spessore sia della parete laterale sia della base deve essere x . Il volume V della resina da usare per costruire la vasca è espresso da

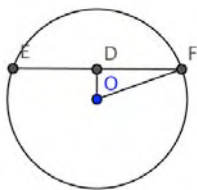
A. $V = \pi(r^3 - x^3)$ B. $V = \pi(r-x)(r^2 - x^2)$ C. $V = \pi(2(r-x)^2 + r^2)x$ D. $V = \pi(2r-x)rx$ E. $V = \pi(r^3 - (r-x)^3)$

“Cos'è lo spessore di un cilindro?” ... spiegato meglio il significato di spessore abbiamo raffigurato la vasca con le misure indicate, le formule del cilindro le ricordavano, hanno capito che andava fatta la differenza dei volumi di due cilindri, quello visto esternamente e la cavità e sono arrivati alla soluzione... il raccoglimento del fattore π è suggerito da tutte le risposte....

n° 12-2012

In un cerchio di raggio r , quanto è lunga una corda che dista dal centro un terzo di r ?

A. $\frac{5\sqrt{2}}{3}r$ B. $\frac{4\sqrt{2}}{3}r$ C. $\frac{2\sqrt{2}}{3}r$ D. $\frac{8\sqrt{2}}{3}r$ E. $\frac{\sqrt{2}}{3}r$



Prima di ogni cosa rappresentare la circonferenza e un opportuno raggio, gli studenti non sono riusciti perché hanno disegnato un raggio parallelo alla corda, non hanno “visto” il triangolo!

Da ricordare il teorema delle corde e il teorema di Pitagora
 $OF=r$, $EF=2DF$, $OD=r/3$, una semplice applicazione del teorema

di Pitagora, dunque $DF = \sqrt{1 - \frac{1}{9}} = \sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{2}{3}\sqrt{2} \rightarrow EF = \frac{4\sqrt{2}}{3}r$

n °9-2009

Un solido S è costituito da due cubi sovrapposti, in modo che due facce dei cubi coincidano.

Se lo spigolo di ciascun cubo misura 1, qual è la massima lunghezza possibile di un segmento che unisce due punti di S ?

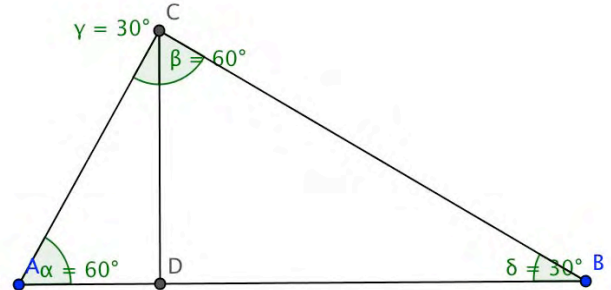
A. $2\sqrt{2}$ B. $2\sqrt{3}$ C. $\sqrt{5}$ D. $\sqrt{6}$

Si disegnano i due cubi su carta (o si disegnano nella mente, ma bisogna saper guardare nello spazio, nel profondo, immaginiamo due cubi di vetro per vedere l'interno...) e si capisce che la distanza richiesta (l) è la diagonale del parallelepipedo... si applica due volte il teorema di Pitagora. La diagonale di base è $\sqrt{2}$, dunque il segmento l è l'ipotenusa del triangolo rettangolo di cateti la diagonale di base e l'altezza del solido (2), quindi $l = \sqrt{4+2} = \sqrt{6}$

Pr. n°76 -2010

Due triangoli rettangoli T1 e T2 hanno un cateto in comune. L'angolo di T1 adiacente a tale cateto misura 60° , mentre l'angolo di T2 adiacente al cateto misura 30° . Allora :

- A. l'area di T2 è circa il 33% di quella di T1
- B. l'area di T2 è circa il 50% di quella di T1
- C. l'area di T2 è circa il 36% di quella di T1
- D. l'area di T2 è circa il 25% di quella di T1
- E. l'area di T2 è circa il 43% di quella di T1



Si disegnano I due triangoli T1: CDB, T2 : ADC. , che sono simili...

1) Si applica il II teorema d Euclide : $AD:CD=CD:DB$

2) si ricorda pure che il rapporto dei cateti $AD/CD = \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$

3) dunque il rapporto delle aree $T2/T1 = 1/3 \Rightarrow T2=33\% T1$ (circa)

n°11-2011

Sono dati i cinque punti in figura. Quale dei seguenti triangoli ha la stessa area del poligono ombreggiato

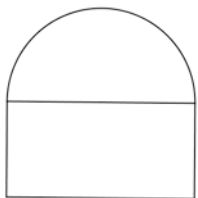


- A. NPL
- B. LQP
- C. MNQ
- D. NQP
- E. QPM

Si tratta di individuare il triangolo equivalente: sarà quello che ha stessa altezza del trapezio e base pari alla somma delle basi. È un noto teorema delle superfici equivalenti, che ci ricorda la nota formula dell'area del trapezio... Ci vuole occhio per guardare la figura!

Pr. n°77-2011

In figura è rappresentata una piccola finestra, costituita da un rettangolo sormontato da un semicerchio; il perimetro della finestra è 2 metri. Posto r il raggio del semicerchio, quale delle seguenti espressioni descrive l'area della finestra, in metri quadrati, in funzione di r ?



- A. $\frac{\pi r^2}{2} + r(2 - \pi r + 2r)$
B. $\frac{\pi r^2}{2} + r(2 - \pi r - r)$
C. $\frac{\pi r^2}{2} + 2r(2 + \pi r - 2r)$
D. $\frac{\pi r^2}{2} + r(2 - \pi r - 2r)$
E. $\frac{\pi r^2}{2} + 2r(2 - \pi r - 2r)$

Il quesito dal punto di vista geometrico non presenta difficoltà, si tratta di ricavare l'altezza del rettangolo dal perimetro, i possibili errori potrebbero essere di calcolo se nel perimetro calcolano entrambe le basi del rettangolo!

$$p = \pi r + 2r + 2h \rightarrow 2 = \pi r + 2r + 2h$$

$$h = \frac{2 - \pi r - 2r}{2}$$

$$A_{\text{rett}} = 2rh = 2r \left(\frac{2 - \pi r - 2r}{2} \right) = r(2 - \pi r - 2r)$$

$$A_{\text{scerc}} = \frac{\pi r^2}{2}$$

Sommando si ottiene la risposta D.

n° 6 -2012

Una piramide ha per base un triangolo rettangolo isoscele. L'ipotenusa del triangolo e l'altezza della piramide misurano a . Qual è il volume della piramide?

- A. $\frac{a^3}{6}$ **B. $\frac{a^3}{12}$** C. $\frac{a^3}{6\sqrt{2}}$ D. $\frac{a^3}{8}$ E. $\frac{a^3}{4\sqrt{3}}$

Poche formule: $V = (A_{\text{base}} \cdot h) / 3$, con $h = a$

Il triangolo di base si immagina come la metà di un quadrato di diagonale $a = l\sqrt{2}$, dunque $l = \frac{a\sqrt{2}}{2}$,

$$\text{si calcola l'area } A_{\text{base}} = \frac{l^2}{2} = \frac{a^2}{4} \Rightarrow V = \frac{a^3}{12}$$

....Possibili errori? il calcolo del lato di base come formula inversa e anche la razionalizzazione del denominatore

Trigonometria

n°10-2009

Due angoli di un triangolo hanno ampiezza α e il terzo angolo ha ampiezza β . Si sa che $\sin \alpha = 0,8$. Allora $\sin \beta$ è uguale a:

A 0,48

B 0,64

C 0,72

D 0,96

Una figura aiuta...il triangolo è isoscele, l'angolo $\beta = 180^\circ - 2\alpha$, poche formule servono...la relazione fondamentale e le relazioni degli archi associati. Oss. personale: I decimali creano disagio ...meglio usare la frazione che il decimale ($0,8 = 4/5$)

$\sin \beta = \sin(180^\circ - 2\alpha) = \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$, si deve calcolare $\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{16}{25}} = \frac{3}{5}$, tornando a

$$\sin \beta = 2 \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{5} = \frac{24}{25} = 0.96$$

Pr.n°14-2009

In un triangolo di vertici ABC l'angolo in B è di 74° . Sappiamo inoltre che la lunghezza del lato AB è u, la lunghezza del lato BC è v, la lunghezza del lato CA è w. Quale delle seguenti relazioni si può dedurre da ciò che sappiamo?

A $u^2 + v^2 < w^2$

B. $u^2 + v^2 > w^2$

C. $u + v > w^2$

D. $u + v < w$

La presenza dei quadrati dei lati suggerisce il noto *teorema di Carnot o del coseno per chi lo ricorda*:

$w^2 = u^2 + v^2 - 2uv \cos \beta < u^2 + v^2$, l'informazione della misura dell'angolo in B(β) sta ad indicare che il $\cos \beta > 0$, quindi permette la maggiorazione. Oppure si ragiona pensando al noto teorema di Pitagora, visto che il triangolo è acutangolo, il quadrato costruito sul lato w è minore della somma dei quadrati costruiti sugli altri due lati.

n°6-2010

Considera gli angoli α, β in figura; quale tra le seguenti relazioni è corretta?

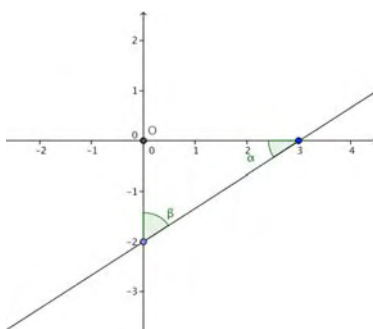
A. $\tan \beta < \cos \alpha$

B. $\sin \beta < \cos \alpha$

C. $\cos \beta > \cos \alpha$

D. $\tan \beta > \tan \alpha$

E. $\sin \beta < \sin \alpha$



Basta conoscere la definizione di tangente come rapporto dei cateti del triangolo, dunque $\tan \beta = 3/2$ e $\tan \alpha = 2/3$

n° 13-2011

Di un triangolo ABC rettangolo in B, sappiamo che l'ampiezza dell'angolo in A è α e che $BC = \tan \alpha$. Allora AC è uguale a:

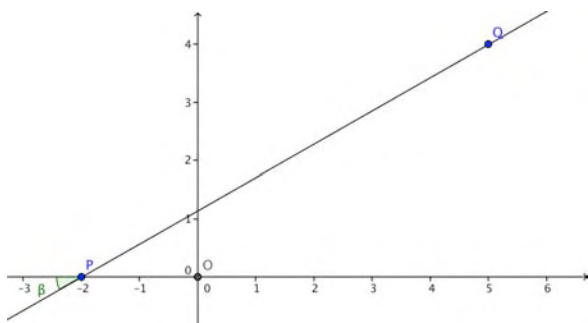
- A. $\sqrt{1 + \cos^2 \alpha}$ **B. $\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}$** C. $\sqrt{\sin^2 \alpha + \tan^2 \alpha}$ D. $\sqrt{1 + \sin^2 \alpha}$ E. $\sqrt{\cos^2 \alpha + \tan^2 \alpha}$

Si rappresenta il triangolo e si capisce che se $BC = AB \cdot \tan \alpha$, il cateto $AB = 1$ quindi $BC = \sqrt{1 + \tan^2 \alpha}$

n°7-2012

La retta in figura passa per i punti P (-2, 0) e Q (5, 4) e forma un angolo β con l'asse delle x. Quanto vale $\tan \beta$?

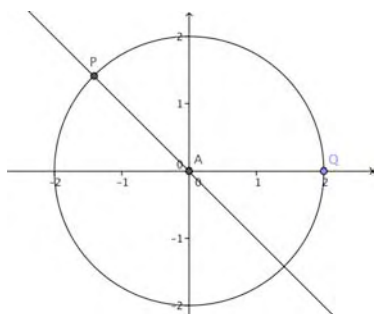
- A. 7/4 B. 5/4 C. 4/5 **D. 4/7** E. 4/3



Si richiede la conoscenza della relazione $\tan \beta = m_{PQ}$ dunque $\tan \beta = \frac{4}{5+2} = \frac{4}{7}$. Oppure calcolare come rapporto dei cateti del triangolo rettangolo di ipotenusa PQ.

Pr.n°81-2012

Si consideri il segmento PQ in figura. La lunghezza di tale segmento è



- A. $\sqrt{2(2 - \sqrt{2}) + 1}$
 B. $2\sqrt{2(\sqrt{2} - 1)}$
 C. $2\sqrt{2 - \sqrt{2}}$
 D. $\sqrt{2\sqrt{2} + 1}$
E. $2\sqrt{2 + \sqrt{2}}$

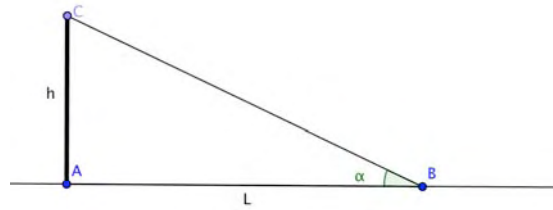
La presenza di tante $\sqrt{2}$ fornisce l'ispirazione.... Il punto P è sulla bisettrice del II e IV quadrante e sulla circonferenza di raggio 2, ha ordinata $y_P = 2\sin 45^\circ = \sqrt{2}$, e ascissa $x_P = -\sqrt{2}$. Ora si deve immaginare il triangolo rettangolo PHQ, dove H è la proiezione di P su x. I cateti di tale triangolo sono $PH = \sqrt{2}$ e $HQ = 2 + \sqrt{2}$, applicando il teorema di Pitagora:

$PQ = \sqrt{2 + (2 + \sqrt{2})^2} = \sqrt{8 + 4\sqrt{2}} = 2\sqrt{2 + \sqrt{2}}$ errori possibili ? ...i calcoli sotto la radice nello sviluppo del quadrato, i segni, il trasporto fuori radice....

Pr. n°83-2012

Su un terreno orizzontale è posta un'asta verticale. Se la sua ombra ha lunghezza L quando i raggi del sole formano un angolo α con il suolo, la sua altezza è

- A. $L/\sin \alpha$ B. $L/\tan \alpha$ C. $\sin \alpha/L$ **D. $L \tan \alpha$** E. $L \sin \alpha$

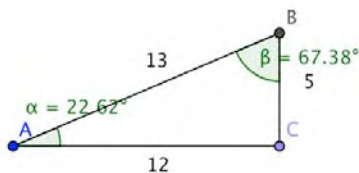


L'immagine associata alla situazione è semplice, basta mettere le informazioni al posto giusto..
 $h=L \tan \alpha$, è la relazione importante tra i cateti nel triangolo rettangolo, non si può sbagliare!

n°6 - 2013

Nel triangolo ABC , rettangolo in C , il cateto AC misura 12 cm e il cateto BC misura 5 cm . Se l'angolo in A misura α e l'angolo in B misura β , quale delle seguenti relazioni è corretta?

- A. $\sin \alpha > \cos \beta$ **B. $\tan \beta > \sin \alpha$** C. $\cos \beta > \cos \alpha$ D. $\sin \alpha > \sin \beta$ E. $\cos \beta > \tan \beta$



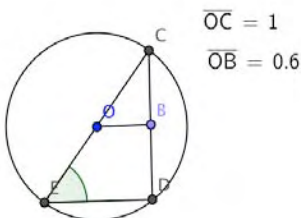
Si calcola $\tan \beta = 12/5 > 2 > \sin \alpha = \cos \beta = 5/13$, $\Rightarrow 12/5 > 5/13$
 È la B !

Pr. n°79-2013

Una corda di una circonferenza di raggio 1 dista dal centro $\frac{3}{5}$. Qual è la tangente dell'angolo (acuto) con vertice sulla circonferenza che insiste sull'arco sotteso dalla corda?

- A. $4/5$ B. $1/2$ **C. $4/3$** D. $2/3$ E. $3/4$

È necessario rappresentare la circonferenza e la corda di cui si parla:



$OB = 3/5$, $OC = 1$, dalla terna Pitagorica si ricava $CB \dots$
 $CB = CD/2 = 4/5$, l'angolo alla circonferenza $\widehat{CED}$
 che insiste sull'arco CD è uguale all'angolo $\widehat{COB}$,
 dunque $\tan(\widehat{COB}) = CB/OB = (4/5)/(3/5) = 4/3$

FUNZIONI

(a cura della prof.ssa Stefania Di Giacomo)

SYLLABUS

Determinare l'insieme di definizione di una funzione reale di variabile reale data mediante un'espressione analitica. Definizioni di: funzione limitata; funzione crescente in un intervallo; massimo e minimo relativo (o locale); massimo e minimo assoluto (o globale); funzione periodica. Disegnare e/o riconoscere il grafico qualitativo di funzioni elementari (quali $ax + b, x^2, x^3, \sqrt{x}, \frac{1}{x}, |x|$). Partendo dal grafico di una funzione $f(x)$, costruire i grafici delle funzioni

$|f(x)|, \frac{1}{f(x)}, f(x-k), f(kx), k + f(x)$, con k numero reale. Disegnare il grafico di una funzione ottenuta sommando funzioni di cui sia noto il grafico. Principali proprietà, comportamento (monotonia, andamento all'infinito) e grafico della funzione esponenziale a^x in dipendenza dalla base a ; definizione, principali proprietà e grafico della funzione logaritmo $\log_a x$, come inversa dell'esponenziale a^x ; in particolare, esponenziale e logaritmo aventi per base il numero "e" di Nepero. Definizione delle funzioni trigonometriche (seno, coseno e tangente); tracciarne il grafico interpretando le formule sugli angoli associati per individuarne le simmetrie (e viceversa); loro funzioni inverse. Risolvere e, se serve, interpretare graficamente equazioni, disequazioni, sistemi (incluse semplici equazioni e disequazioni non algebriche, in cui compaiano ad esempio le funzioni radice, modulo, esponenziale, logaritmo, trigonometriche).

I quesiti selezionati riguardano essenzialmente:

- **Rette e coefficiente angolare**
- **Proprietà delle funzioni, caratteristiche del grafico, trasformazioni del piano.**
- **Successioni, progressioni, funzioni ricorsive**
- **Funzioni goniometriche, periodo, caratteristiche del grafico.**
- **Relazioni, espressioni parametriche, problemi di fisica.**

Rette e coefficiente angolare

2009

8. La retta di equazione $y = 2 - 3x$ incontra gli assi cartesiani in due punti A e B . Quanto misura il segmento AB ?

A $\frac{2}{3}\sqrt{10}$ [*]

B $2\sqrt{\frac{2}{3}}$

C $\frac{1}{2}\sqrt{5}$

D $\frac{1}{3}\sqrt{17}$

Suggerimento: la via più breve e “meno faticosa” è quella che usa l’equazione segmentaria della retta, che ha il vantaggio di “far vedere” subito le coordinate di a e b.

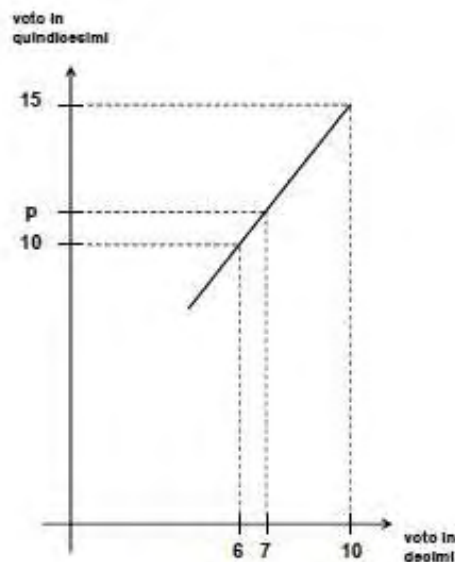
$$3x + y = 2; \quad \frac{3}{2}x + \frac{y}{2} = 1; \quad \frac{x}{\frac{2}{3}} + \frac{y}{2} = 1.$$

Si determinano quindi le coordinate dei punti di intersezione con gli assi cartesiani $A\left(\frac{2}{3}; 0\right)$ e

$B(0; 2)$. Si calcola quindi $\overline{AB} = \frac{2}{3}\sqrt{10}$

2009

5. In una prova uno studente ha ottenuto il voto 7 decimi. Si vuole esprimere questa valutazione in quindicesimi, utilizzando il criterio suggerito dalla figura.



Se p è il voto in quindicesimi che corrisponde a 7 decimi, allora:

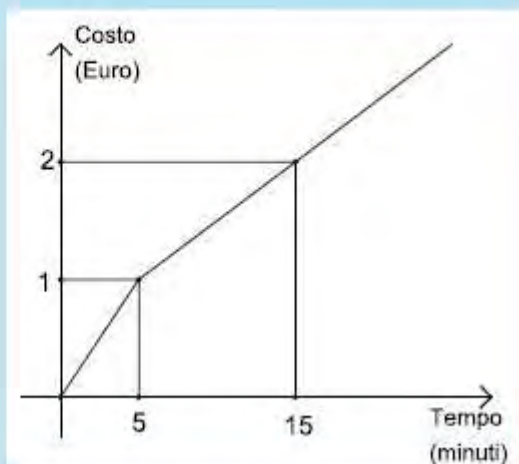
- A $11 < p < 11,1$
- B $11,1 < p < 11,2$
- C $11,2 < p < 11,3$ [*]
- D $11,3 < p < 11,4$

Suggerimento: Il quesito si risolve rapidamente individuando le coordinate dei punti $A(6;10)$, $B(7;p)$ e $C(10;15)$, e uguagliando poi i coefficienti angolari delle rette AB e AC , giungendo così alla risposta C. Il valore di p trovato va inserito nel giusto intervallo.

2010

12. Nel seguente grafico è indicato il costo, al variare del tempo, di una telefonata. Qual è il costo in euro di una telefonata di 20 minuti?

- A. 2,25
- B. 2,20
- C. 2,50
- D. 2,75
- E. 2,40



Suggerimento: si scrive l'equazione della retta passante per i due punti $A(5;1)$ e $B(15;2)$ e si sostituisce $x=20$ minuti per ottenere il valore di y che corrisponde al costo in euro. Allo stesso risultato si può giungere imponendo che il punto C cercato di ascissa $x=20$ minuti sia allineato con gli altri due punti, uguagliando cioè i coefficienti angolari delle rette AB e BC . Risposta C.

2010

14. Sia r la retta di equazione $x + 2y - 1 = 0$. Quale tra le seguenti è l'equazione di una retta perpendicolare a r ?

- A. $y = -\frac{1}{2}x$
- B. $y = -x$
- C. $y = 2x$
- D. $y = \frac{1}{2}x$
- E. $y = -2x$

Suggerimento: Basta imporre la condizione di perpendicolarità, che può anche essere visualizzata direttamente sul grafico.. Risposta C

2011

78. L'insieme dei punti (x,y) del piano che soddisfano l'equazione

$$(x^2 - 4)(y - 1) = 0$$

è formato da

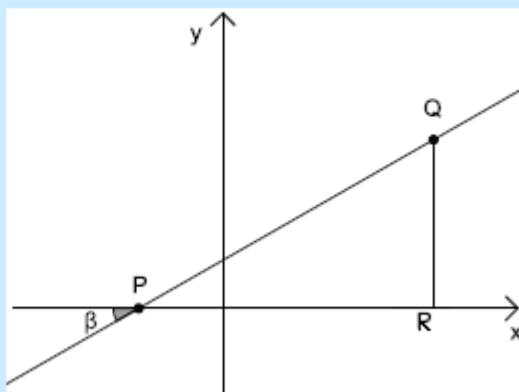
- A. una parabola e un punto
- B. tre rette
- C. due punti
- D. una retta e una parabola
- E. tre punti

Suggerimento: per la legge di annullamento del prodotto, si tratta dell'unione di tre rette. Si ha infatti $(x+2)(x-2)(y-1)=0$ e quindi le tre rette di equazione $x+2=0$; $x-2=0$; $y-1=0$. Risposta B.

2012

7. La retta in figura passa per i punti $P(-2,0)$ e $Q(5,4)$ e forma un angolo β con l'asse delle x . Quanto vale $\tan \beta$?

- A. $\frac{7}{4}$
- B. $\frac{5}{4}$
- C. $\frac{4}{5}$
- D. $\frac{4}{7}$
- E. $\frac{4}{3}$



Suggerimento: Ricordare che il coefficiente angolare della retta PQ , positivo è la tangente dell'angolo $\widehat{QPR}$, congruente all'angolo β . Quindi $\overline{PR} = 7$; $\overline{RQ} = 4$; $\tan \beta = \frac{4}{7}$. Risposta D

Proprietà delle funzioni, caratteristiche del grafico, trasformazioni del piano.

2009

13. Una sola delle funzioni indicate sotto soddisfa per ogni x reale la condizione $f(x) < 3$. Quale?

- A $f(x) = 2^x - 3$
- B $f(x) = 3 \cdot 2^{-x}$
- C $f(x) = 3 - 2^x$ [*]
- D $f(x) = 2^{x-3}$

Suggerimento: l'esercizio è utile per ricordare le più importanti trasformazioni del piano (simmetrie, traslazioni, ecc.), ma si può arrivare con meno fatica alla soluzione trasformando l'equazione $f(x) < 3$ con semplici passaggi algebrici e ricordando soltanto i grafici noti delle funzioni $y = 2^x$ e $y = 2^{-x}$ e soprattutto il loro codominio, che ovviamente è lo stesso anche per la funzione $y = 2^{x-3}$. Si può capire facilmente quindi che l'unica risposta corretta è la C. Infatti: A: $2^x < 6$, non soddisfatta per ogni x , B: $2^{-x} < 1$ non soddisfatta per ogni x , C: $2^x > 0$ vera per ogni x , D: $2^{x-3} < 3$ non soddisfatta per ogni x .

2009

9. Nel piano cartesiano è data la semicirconferenza di raggio 1, centrata nel punto $(1, -2)$ e che sta sopra alla retta di equazione $y = -2$. La semicirconferenza è il grafico di una delle seguenti funzioni. Quale?

- A $f(x) = 2 - \sqrt{2x - x^2}$
B $f(x) = \sqrt{4x - x^2 - 3} - 1$
C $f(x) = 1 - \sqrt{4x - x^2 - 3}$
D $f(x) = \sqrt{2x - x^2} - 2$ [*]

Suggerimento: si scrive l'equazione della circonferenza di centro $(1; -2)$ e raggio 1; si trovano le equazioni esplicite delle due semicirconferenze ($y = -2 \pm \sqrt{-x^2 + 2x}$) e si sceglie quella che appartiene al semipiano $y \geq -2$.

2009

12. Della funzione $f(t) = ca^{-(t-t_0)}$ sappiamo che:

$$f(t_0) = 1 \quad f(t_0 + 2) = 16.$$

Possiamo quindi calcolare il valore di a e c . Quanto vale il rapporto $\frac{a}{c}$?

- A $\frac{1}{2}$
B 2
C $\frac{1}{4}$ [*]
D 4

Suggerimento: basta sostituire t_0 per trovare il valore di c , poi sostituire $t_0 + 2$ per trovare il valore di a e poi calcolare il rapporto a/c . Risposta C.

2009

13. È data la funzione $f(x) = 3^{2x-1}$. Tra le funzioni indicate sotto ce n'è una e una sola tale che $f(g(t)) = t$ per tutti i numeri reali t positivi. Quale?

- A $g(t) = \sqrt{\log_3 t - 3}$
B $g(t) = \log_3 \sqrt{3t}$ [*]
C $g(t) = \log_3 \sqrt{t+1}$
D $g(t) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\log_3 t}{3}}$

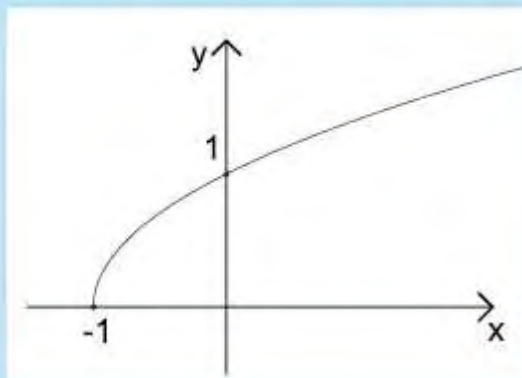
Suggerimento: la condizione richiesta implica che $g(x)$ sia la funzione inversa di $f(x)$. È sufficiente quindi invertire la funzione $f(x)$ per determinare la risposta corretta B. L'esercizio richiede quindi la conoscenza dei concetti di funzione composta, funzione inversa e delle proprietà dei logaritmi per riconoscere l'espressione corretta. Infatti:

$$t = 3^{2x-1}; \quad t = \frac{3^{2x}}{3}; \quad 3t = 3^{2x}; \quad 2x = \log_3 3t; \quad x = \frac{1}{2} \log_3 3t; \quad x = \log_3 \sqrt{3t}.$$

2010

8. In figura è rappresentato il grafico di una delle seguenti funzioni. Quale?

- A. $f(x) = \sqrt{x-1}$
- B. $f(x) = \sqrt{1-x}$
- C. $f(x) = 1 + \sqrt{x}$
- D. $f(x) = \sqrt{x+1}$
- E. $f(x) = \sqrt{x} - 1$



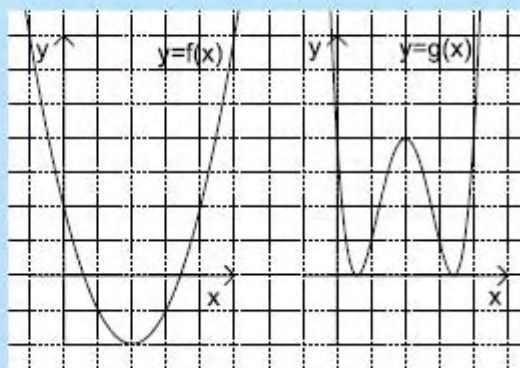
Suggerimento1(più veloce, richiede solo il concetto di funzione!): la curva cercata deve passare per i due punti indicati e, sostituendo le coordinate dei punti nell'equazione, si può vedere facilmente che "funziona" solo la risposta D.

Suggerimento2: le funzioni rappresentano tutte semiparabole; dal grafico si legge l'equazione della semiparabola $\begin{cases} x = y^2 - 1 \\ y \geq 0 \end{cases}$; invertendo si ottiene la funzione della risposta D.

2010

15. In figura sono rappresentati, usando la stessa scala, i grafici di due funzioni $f(x)$ e $g(x)$, che sono legate da una delle seguenti relazioni. Quale?

- A. $g(x) = -f(x)$
- B. $g(x) = (f(x))^2$
- C. $g(x) = \sqrt{f(x)}$
- D. $g(x) = |f(x)|$
- E. $g(x) = \frac{1}{f(x)}$



Suggerimento : possiamo osservare che mentre la prima curva ricorda il grafico di una parabola e allora $f(x)$ sarebbe un polinomio di secondo grado (dal grafico si ricava l'equazione $y = x^2 - 2$); la seconda incontra alcune rette parallele all'asse x in quattro punti: dunque è probabile che il $g(x)$ sia un polinomio di quarto grado. Si può giungere facilmente alla soluzione controllando le ordinate dei punti delle curve aventi la stessa ascissa: per esempio (2;-2) e (2;4), o anche (0;2) e (0;4) per dare la risposta B. Si può ragionare anche per esclusione: si ha $g(x) \geq 0$ e ciò esclude le risposte A ed E; da scartare anche la risposta C poiché $g(x)$ non sarebbe definita là dove $f(x) < 0$. Scartiamo infine anche la D perché il grafico di $g(x)$ coinciderebbe con quello di $f(x)$ laddove $f(x) \geq 0$.

2010

78. Quale delle seguenti affermazioni sulla funzione $f(x) = \log_2(x^2 + 1)$ è corretta?

- A. È una funzione crescente per ogni x reale
- B. Il grafico di f è simmetrico rispetto all'origine
- C. Il grafico di f è simmetrico rispetto all'asse delle y
- D. È una funzione positiva
- E. È una funzione limitata

Suggerimento: si vede chiaramente che si tratta di una funzione pari, quindi risposta C.

2011

14. Si considerino i grafici delle funzioni $f(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = 2 - x$. L'insieme degli x tali che il grafico di f è sotto il grafico di g è

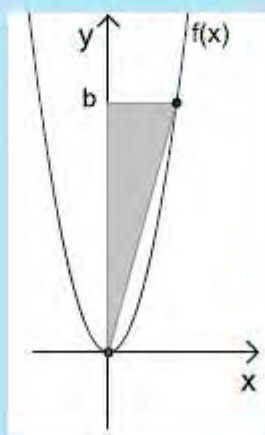
- A. $[0,4)$
- B. $[0,1)$
- C. $[0,1) \cup (4, +\infty)$
- D. $(1,4)$
- E. $(1, +\infty)$

Suggerimento: si tracciano i grafici delle due funzioni, si osservano poi i due grafici e il punto di intersezione e si arriva quindi alla risposta B. Utile ricordare che $f(x)$ corrisponde alla semiparabola $x = y^2$, con $y \geq 0$.

2011

17. In figura è rappresentato il grafico della funzione $f(x) = 4x^2$. Si sa che il triangolo ombreggiato ha area 3. Quanto vale b ?

- A. $3\sqrt{12}$
- B. $\sqrt[3]{12^2}$
- C. $2\sqrt[3]{12}$
- D. $\sqrt[3]{12}$
- E. $\sqrt{12}$



Suggerimento: si trova l'ascissa (positiva) del punto di ordinata b segnato in figura (intersezione tra la retta di equazione $y = b$ e la parabola di equazione $y = 4x^2$). Se esprime in funzione di b l'area del triangolo, si impone a tale area di valere 3 e si ottiene la risposta B

2012

11. In quanti punti si incontrano i grafici delle funzioni

$$f(x) = x^2 - 5, \quad g(x) = |x|?$$

- A. Quattro
- B. Nessuno
- C. Tre
- D. Due
- E. Uno

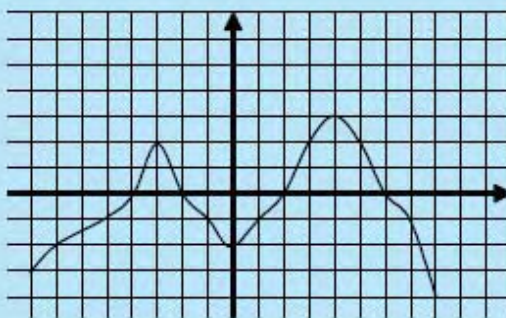
Suggerimento: l'osservazione dei due grafici permette di scegliere la risposta D, ed è più elegante rispetto alla risoluzione dell'equazione. Tracciare i grafici delle due funzioni è abbastanza semplice. Per gli allievi è utile esercitarsi sui grafici e, noto il grafico di $f(x)$, tracciare ad esempio, come è utile per questo esercizio, il grafico di $f(x) \pm k$ e $|f(x)|$.

2012

13. In figura è rappresentato il grafico di una funzione $f : [-8,8] \rightarrow \mathbb{R}$ (ogni quadretto corrisponde ad una unità).

L'insieme di tutti i numeri a tali che $f(3) = f(a)$ è costituito da:

- A. $-3, 3$
- B. $3, 4$
- C. $-3, 3, 5$
- D. 3
- E. 2

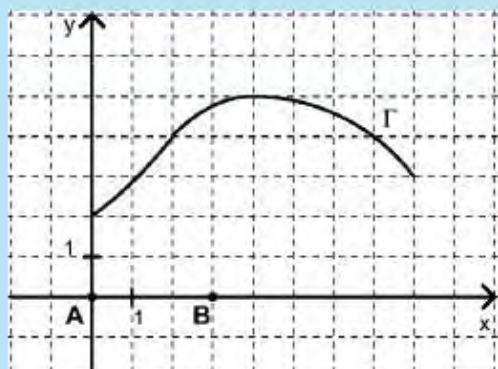


Suggerimento: poiché $f(3) = 2$, occorre prendere in considerazione tutti i punti che hanno "quota" (ordinata) $= 2$, cioè intersecare il grafico con la retta di equazione $y = 2$. Risposta C.

2012

20. Nel piano cartesiano sono dati i punti $A(0,0)$ e $B(3,0)$. Tra tutti i triangoli APB , con il vertice P sulla curva Γ indicata in figura, ve n'è uno di area massima. Tale area è uno dei valori seguenti. Quale?

- A. $8,5$
- B. 9
- C. 7
- D. 8
- E. $7,5$



Suggerimento: occorre collegare l'area massima alla massima altezza, quindi alla massima ordinata sulla curva. Risposta E.

2012

79. Quali delle seguenti affermazioni, relative alla funzione $f(x) = -x^3$, è vera?

- A. Per ogni $M > 0$ e per ogni $c > 0$, se $x < c$, vale $f(x) > M$
- B. Per ogni $M < 0$ esiste $c > 0$ tale che, per ogni $x > c$, vale $f(x) < M$
- C. Per ogni $M > 0$ esiste $c > 0$ tale che, per ogni $x < c$, vale $f(x) > M$
- D. Esiste $M < 0$ tale che per ogni $c > 0$, se $x > c$, vale $f(x) < M$
- E. Esiste $M < 0$ tale che per ogni $c > 0$, esiste $x < c$ per cui vale $f(x) < M$

Suggerimento: occorre tracciare il grafico della $f(x)$ (è un'occasione per ripassare le simmetrie). È necessaria molta attenzione per capire quale risposta scegliere, osservando il grafico e stando attenti alla differenza tra “esiste” e “per ogni”. Risposta B.

2013

13. Quanti punti hanno in comune i grafici delle funzioni

$$f(x) = |2x| \quad \text{e} \quad g(x) = -(x-1)^2 ?$$

- A. Tre
- B. Due
- C. Quattro
- D. Uno
- E. Nessuno

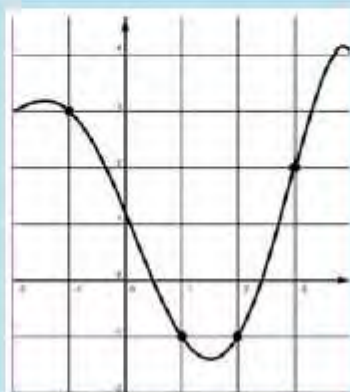
Suggerimento: gli eventuali punti di intersezione corrispondono alla condizione $f(x) = g(x)$. Quindi $f(x)$ e $g(x)$ devono essere concordi o entrambe nulle. Per ogni $x \in \mathbb{R}$ risulta $f(x) \geq 0$ e $g(x) \leq 0$. Quindi l'unica possibilità è che le due funzioni siano entrambe nulle. Poiché $f(x) = 0$ soltanto per $x=0$, ma $g(0) \neq 0$, i grafici delle due funzioni non hanno punti in comune. Risposta E. È apprezzabile anche la soluzione grafica.

2013

14. Il disegno rappresenta il grafico di una funzione $f : [-2,4) \rightarrow \mathbb{R}$ (ogni quadretto ha lato di misura 1). Quanto vale

$$\frac{f(f(f(2)))}{f(2)} ?$$

- A. 3
- B. $-\frac{3}{2}$
- C. -2
- D. 1
- E. -1



Suggerimento: il valore richiesto risulta difficile da leggere, difficile dividere i vari passaggi ragionando poi sul disegno, passando ogni volta dall'ordinata del punto trovato all'ascissa del successivo. Basta però fare un passo alla volta, in modo ordinato per iscritto, per giungere senza confondersi alla soluzione. Si ha: $f(2)=-1$; $f(f(2))=f(-1)=3$; $f(f(f(2)))=f(3)=2$; dunque $\frac{2}{-1} = -2$.

Risposta C.

2013

80. Una funzione $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, definita su un sottoinsieme A di numeri reali simmetrico rispetto a 0, è detta

pari se, per ogni $x \in A$, si ha $f(-x) = f(x)$;

dispari se, per ogni $x \in A$, si ha $f(-x) = -f(x)$.

Inoltre, per ogni intero positivo n , sia f^n la funzione che a ogni $x \in A$ associa $(f(x))^n$; se $f(x) \neq 0$ per ogni $x \in A$, sia $\frac{1}{f}$ la funzione che a ogni $x \in A$ associa $\frac{1}{f(x)}$.

Quale delle seguenti affermazioni è falsa?

- A. Se f è dispari anche f^3 è dispari
- B. Non esiste alcuna funzione f tale che la funzione f^3 sia pari
- C. Esiste almeno una funzione f che non è pari ma è tale che sia pari la funzione f^2
- D. Se $f(x) \neq 0$ per ogni $x \in A$ e $\frac{1}{f}$ è pari anche f è pari
- E. Se f è dispari e $f(x) \neq 0$ per ogni $x \in A$, allora $\frac{1}{f}$ è dispari

Suggerimento: bisogna innanzitutto prestare attenzione al testo che chiede di trovare l'affermazione "falsa". Risulta in generale difficile la lettura del quesito. Ricordando la definizione di funzione pari o dispari, si riconosce immediatamente che l'affermazione B è falsa. Infatti basta trovare una funzione $f(x)$ per cui f^3 sia pari; ad esempio $f(x) = x^2$. Come ulteriore verifica, sempre usando la definizione di funzione pari o dispari, si riconosce che sono vere le affermazioni A, D ed E. Anche la C è vera; basta trovare infatti una funzione $f(x)$ non pari tale che f^2 sia pari, come ad esempio $f(x) = x$.

Successioni, progressioni, funzioni ricorsive

2009

16. Si dice che dei numeri a_1, a_2, a_3 sono in progressione geometrica se c'è un numero k tale che $a_3 = ka_2$ e $a_2 = ka_1$. Fra le seguenti terne di numeri ce n'è una ed una sola formata da numeri in progressione geometrica.

$$\clubsuit: \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{4}{15}$$

$$\heartsuit: \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{3}{25}$$

$$\diamondsuit: \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{9}{16}$$

$$\spadesuit: \frac{1}{5}, \frac{2}{15}, \frac{3}{20}$$

Quale?

- A La terna $\clubsuit$
- B La terna $\diamondsuit$
- C La terna $\heartsuit$ [*]
- D La terna $\spadesuit$

Suggerimento: basta calcolare per ogni terna il rapporto $k = \frac{a_2}{a_1}$ e controllare se $ka_2 = a_3$.

Risposta C.

2011

23. Poniamo $1 + 2 + 3 + \dots + 1000 = a$; si esprima $3 + 5 + 7 + \dots + 2001$ in funzione di a .

- A. $2a + 1000$
- B. $a + 1000$
- C. $2a + 1$
- D. $a + 2000$
- E. $2a + 2000$

Suggerimento: basta ricordare quanto vale la somma di n termini in progressione aritmetica

$S_n = (a_1 + a_n) \cdot \frac{n}{2}$ e procedere con ordine. Per a il numero degli addendi è 1000. Posto

$b = 2 + 4 + 6 + \dots + 2000$, si riconosce che anche b ha 1000 addendi (doppi di quelli di a). Posto

$c = 3 + 5 + 7 + \dots + 2001$, gli addendi sono i successivi di quelli di b e quindi sono ancora 1000.

Usando la formula citata, con semplici passaggi ricaviamo: $a = \frac{1001 \cdot 1000}{2} = 1001 \cdot 500$ e

$$c = \frac{2004 \cdot 1000}{2} = 2004 \cdot 500 = (2002 + 2) \cdot 500 = 2002 \cdot 500 + 1000 = 2a + 1000$$

Quindi risposta A.

2011

80. Una funzione f , definita sull'insieme dei numeri naturali, ha la seguente proprietà:

$$f(n+1) = 3f(n) \quad \text{per ogni } n.$$

Allora, sapendo che per un certo numero naturale m si ha $f(m) = 5$, si può dedurre che $f(2m)$ vale

- A. $2 \cdot 5^m$
- B. $5 \cdot 3^m$
- C. 15
- D. 10
- E. $3 \cdot 5^m$

Suggerimento: si scrive $f(n+2) = 3f(n+1) = 3^2 f(n)$; poi $f(n+3) = 3f(n+2) = 3^3 f(n)$; quindi $f(n+k) = 3^k f(n)$. Allora $f(2m) = f(m+m) = 3^m \cdot f(m) = 3^m \cdot 5$. Risposta B.

2012

78. Sia f la funzione definita per ogni numero naturale n maggiore di 2 dalla formula

$$f(n) = 3(n-2).$$

Quale delle seguenti espressioni è costante?

- A. $\frac{f(n)}{n}$
- B. $f(n) - n$
- C. $f(n+1) - f(n)$
- D. $\frac{f(n+1)}{f(n)}$
- E. $\frac{f(n+1)}{3n}$

Suggerimento: basta calcolare mediante la formula data le espressioni delle risposte A, B, C e si riconosce che la C è l'espressione costante.

Infatti $f(n+1) - f(n) = 3 \cdot (n+1-2) - 3 \cdot (n-2) = 3 \cdot (n-1-n+2) = 3$.

2013

82. Considera la successione $\{x_n\}$ di numeri interi così costruita:

$$x_1 = -1, \quad x_2 = 1$$

e, per ogni numero intero $n > 2$, $x_n = 3x_{n-2} + 2x_{n-1}$.

Quanto vale x_{15} ?

- A. -1
- B. 15
- C. Un numero diverso da tutti quelli delle altre risposte
- D. 1
- E. 0

Suggerimento: ancora una volta si può arrivare alla soluzione procedendo in modo ordinato. Scriviamo: $x_3 = 3x_1 + 2x_2 = -3 + 2 = -1$; $x_4 = 3x_2 + 2x_3 = 3 - 2 = 1$; $x_5 = 3x_3 + 2x_4 = -3 + 2 = -1$; $x_6 = 3x_4 + 2x_5 = 3 - 2 = 1$ e così via. Si osserva che per x_n si alternano i valori -1 e 1, il primo quando n è dispari, il secondo quando n è pari. Si ha quindi $x_{15} = -1$. Risposta A

Funzioni goniometriche, periodo, caratteristiche del grafico.

2009

1. Si consideri la funzione $f(x) = \sin(\omega x)$, dove ω è una costante positiva. Se $f(a) = 0$ e $f(b) = 1$, qual è la minima distanza possibile tra a e b ?

- A $\frac{\pi}{2\omega}$ [*]
- B $\frac{\pi}{\omega}$
- C $\frac{2\pi}{\omega}$
- D $\frac{\pi}{4\omega}$

Suggerimento: la funzione $f(x)$ ha periodo $T = \frac{2\pi}{\omega}$. Basta tracciare il grafico per $0 \leq x \leq T$ per

riconoscere che $|b - a|_{\min} = \frac{2\pi}{\omega} \cdot \frac{1}{4} = \frac{\pi}{2\omega}$.

2010

77. Una sola delle seguenti funzioni ha periodo π . Quale?

- A. $\sin(x^2)$
- B. $(\sin x)^2$
- C. $\sin x + (\sin x)^2$
- D. $\sin x + \cos x$
- E. $x + \sin x$

Suggerimento: Ricordiamo innanzitutto che una funzione è periodica con periodo π se per ogni $x \in \mathbb{R}$ risulta $f(x + \pi) = f(x)$. Allora le funzioni A ed E non sono periodiche. La D, periodica, non ha periodo π , infatti $\sin 0 + \cos 0 = 1$ mentre $\sin \pi + \cos \pi = -1$. Anche la C, periodica, non ha periodo π , infatti $\sin \frac{\pi}{2} + \left(\sin \frac{\pi}{2}\right)^2 = 1 + 1 = 2$ mentre $\sin \frac{3\pi}{2} + \left(\sin \frac{3\pi}{2}\right)^2 = -1 + 1 = 0$. Quindi per esclusione si arriva alla risposta B. In realtà si può intuire più facilmente che la funzione $(\sin x)^2$ ha periodo π se la si ripensa come $|\sin x|^2$ per sfruttare visivamente il grafico della funzione in cui viene “ribaltata” la parte al di sotto dell’asse x .

2011

84. Si consideri la famiglia di funzioni del tipo

$$a \sin x + b$$

tali che

$$a > 0, b > 0;$$

il valore massimo della funzione è uguale a 3;

il grafico della funzione incontra l’asse x .

Qual è il valore minimo del parametro a per una funzione di questa famiglia?

- A. $\frac{1}{3}$
- B. $\frac{3}{4}$
- C. $\frac{4}{3}$
- D. $\frac{2}{3}$
- E. $\frac{3}{2}$

Suggerimento: partire dal grafico di $\sin(x)$, amplificare di un fattore a , traslare di b ; la condizione affinché il grafico intersechi l’asse x diventa $a \geq b$, minimo per $a=b$; il valore massimo della funzione è $a+b$ con $a+b=3$ e per $a=b$ si ottiene quindi $a=3/2$. Risposta E.

2012

80. Qual è, tra i seguenti, l'intervallo di lunghezza maggiore sul quale la funzione

$$f(x) = \sin x$$

è invertibile?

- A. $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$
- B. $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
- C. $[0, 2\pi]$
- D. $[0, \pi]$
- E. $[-\pi, \pi]$

Suggerimento: una funzione è invertibile in un intervallo se in esso è monotona crescente o decrescente. Basta esaminare il grafico di $f(x)$ e si riconosce che la risposta esatta è B.

2013

85. Quale delle seguenti affermazioni è vera per la funzione $f(x) = \sin(4x + 1)$?

- A. Non si annulla in $x = \frac{\pi - 1}{4}$
- B. Si annulla in $x = \pi - 1$
- C. Ha valore minimo -4
- D. Ha periodo $\frac{\pi}{2}$
- E. Ha valore massimo 2

Suggerimento: anche in questo caso occorre porre attenzione alla lettura del testo, ad esempio al "non" della prima risposta. Importante riconoscere che la funzione è periodica con periodo

$$T = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}. \text{ Risposta D.}$$

Relazioni, espressioni parametriche, problemi di fisica.

2010

4. Un treno viaggia alla velocità costante di 240 km/h. In quanti millesimi di secondo percorre un metro?
- A. 15
 - B. 36
 - C. 12
 - D. 24
 - E. 18

Suggerimento: dalla definizione di velocità si può ricavare la relazione tra spazio percorso e intervallo di tempo necessario per percorrerlo e giungere alla soluzione invertendo la formula ($\Delta t = \frac{\Delta s}{v}$).

È necessario però esprimere in m/s la velocità: $v = 240 \frac{\text{km}}{\text{h}} = \frac{200}{3} \frac{\text{m}}{\text{s}}$;

$\Delta t = \frac{\Delta s}{v} = \frac{1\text{m}}{\frac{200}{3} \frac{\text{m}}{\text{s}}} = \frac{3}{200} \text{s} = \frac{15}{1000} \text{s}$. La risposta giusta è la A.

2011

21. Un'automobile viaggia su un rettilineo alla velocità costante di 72 km orari dietro a un camion, che improvvisamente frena. Il guidatore dell'auto, un po' distratto, impiega 1,5 secondi prima di agire a sua volta sul pedale del freno. Quanti metri ha percorso l'automobile in quel breve intervallo di tempo?
- A. 18
 - B. 25
 - C. 36
 - D. 30
 - E. 27

Suggerimento: basta scrivere la legge $\Delta s = v \cdot \Delta t$ e porre attenzione alle equivalenze. La risposta giusta è D.

2011

76. L'allungamento x di una corda soddisfa la condizione

$$\frac{1}{2}kx^2 - gx - 2g = 0 \quad \text{con } g, k > 0.$$

Posto $c = \frac{k}{g}$, si ha che x vale

- A. $\frac{1}{2cg}(1 + \sqrt{1 + 4cg})$
- B. $\frac{1}{c}(1 + \sqrt{1 + 4c})$
- C. $\frac{1}{cg}(1 + \sqrt{1 + 4cg})$
- D. $\frac{1}{2c}(1 + \sqrt{1 + 4c})$
- E. $\frac{1}{2}c(1 + \sqrt{1 + 4c})$

Suggerimento: si risolve in x applicando la formula risolutiva dell'equazione di secondo grado e si divide numeratore e denominatore per g per ottenere il rapporto k/g da sostituire con c . In alternativa, algebricamente più gradevole, si pone $k=cg$ nella soluzione. Allora:

$$x = \frac{g \pm \sqrt{g^2 + 4kg}}{k} = \frac{g \pm \sqrt{g^2 + 4cg^2}}{cg} = \frac{g \pm g\sqrt{1 + 4c}}{cg} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4c}}{c}$$

Risposta B

2012

76. Tre variabili s, t, v diverse da zero verificano le relazioni

$$s = t^2 + t \quad \text{e} \quad \frac{v-1}{t} = 2.$$

Si esprima v^2 in funzione della sola variabile s .

- A. $v^2 = s^2 + 1$
- B. $v^2 = 2s + 1$
- C. $v^2 = (s + 1)^2$
- D. $v^2 = 4s + 1$
- E. $v^2 = s + 1$

Suggerimento: sono richiesti passaggi piuttosto semplici per ricavare v^2 . Occorre però metodo nella manipolazione delle formule. Ad esempio: $v = 2t + 1$; quindi $v^2 = 4t^2 + 4t + 1 = 4(t^2 + t) + 1 = 4s + 1$. Risposta D.

2013

12. I numeri reali positivi a , b e c sono legati dalla legge $a = \frac{2b}{c^2}$. Se vuoi che a rimanga costante,
- A. quando raddoppi il valore di b devi quadruplicare quello di c
 - B. quando dimezzi il valore di c devi quadruplicare quello di b
 - C. quando raddoppi il valore di c devi raddoppiare quello di b
 - D. quando raddoppi il valore di c devi quadruplicare quello di b
 - E. quando dimezzi il valore di b devi quadruplicare quello di c

Suggerimento: non si può pretendere che a rimanga costante se b diminuisce e c aumenta o viceversa. Sono perciò escluse le risposte B ed E. Si intuisce poi che, poiché nella frazione figura b al numeratore e c^2 al denominatore, se c raddoppia b deve quadruplicare. Risposta D.

Modellizzazione

Prof.ssa Eugenia Mattei

Modellizzazione, comprensione, rappresentazione, soluzione di problemi.

Formulare in termini matematici una situazione o un problema. Comprendere testi che usano linguaggi e rappresentazioni diverse. Rappresentare dati, relazioni e funzioni con formule, tabelle, diagrammi a barre e altre modalità grafiche. Risolvere un problema, adottando semplici strategie, combinando diverse conoscenze e abilità, facendo deduzioni logiche e semplici calcoli.

Problemi di fisica

2013

81. Due ciclisti, A e B , percorrono una pista circolare nello stesso verso partendo da punti diametralmente opposti, ciascuno a velocità costante. Se la velocità di A è $\frac{16}{15}$ della velocità di B , quanti giri (o frazioni di giro) avrà percorso A quando raggiungerà B per la prima volta?
- A. Non si può rispondere senza conoscere il raggio della pista.
 - B. Sette e mezzo
 - C. Sette e tre quarti
 - D. Otto
 - E. Otto e un quarto

Risposta D

Prima soluzione

Per risolvere il problema occorre determinare l'equazione oraria del punto A e del punto B.

$$s_A = v_A \cdot t = \frac{16}{15} v_B \cdot t \quad s_B = \pi r + v_B \cdot t$$

$$A \text{ raggiunge } B \text{ nell'istante in cui } s_A = s_B \Rightarrow \frac{16}{15} v_B \cdot t = \pi r + v_B \cdot t \Rightarrow t = \frac{15\pi r}{v_B} \Rightarrow s_A = 16\pi r = 8(2\pi r)$$

Seconda soluzione

Considerando le velocità di A e di B, si potrebbe scegliere il sistema di riferimento in cui B è fermo e A si muove con

velocità $v = v_A - v_B = \frac{1}{15} v_B$. In questo caso A raggiunge B quando percorre metà pista, ovvero $s_A = \pi r \Rightarrow$

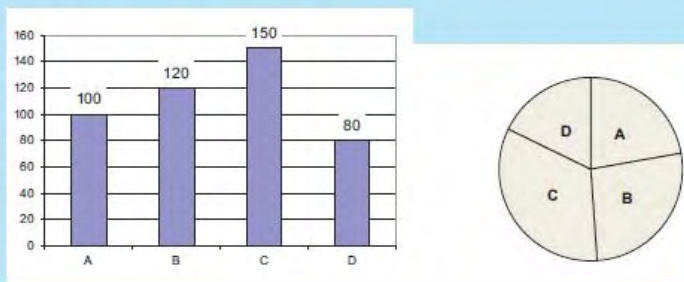
$\pi r = \frac{1}{15} v_B \cdot t$. Da questo punto in poi si procede come sopra.

Problemi con comprensione di grafici

2011

24. Il fatturato di quattro ditte è descritto per mezzo dell'istogramma in figura. In un diagramma a torta, qual è l'ampiezza dell'angolo relativo alla ditta B?

- A. 96°
- B. 98°
- C. 92°
- D. 95°
- E. 100°



Risposta A

Per risolvere il problema basta impostare una semplice proporzione: $450:120=360^\circ:x \Rightarrow x = \frac{120 \cdot 360^\circ}{450} = 96^\circ$

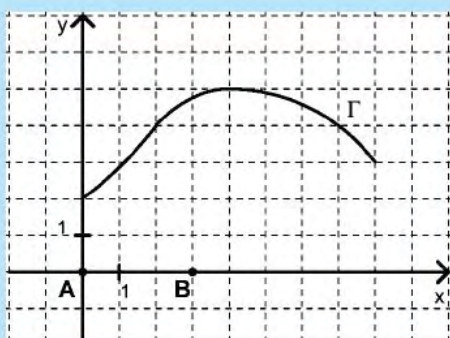
Negli esercizi di percentuali conviene sempre usare le proporzioni richiamando ogni volta il significato etimologico della proporzione (analogos in greco cioè analogia, stesso rapporto). $A:B=a:b$ vuol dire A si rapporta a B (rispetto alla grandezza) nello stesso modo con cui a si rapporta a b : se A è il doppio di B anche a è il doppio di b o ancora se a fosse la metà di b allora anche A sarebbe la metà di B, o ancora se a fosse “analogo” ad A come sarebbe b? L'uguaglianza di due rapporti è una inferenza logica del tipo: se P allora Q.

Ad esempio cosa vuol dire il 7% di una grandezza A? Vuol dire che se X è ciò che cerco, il rapporto tra A e X è analogo a quello che c'è tra 100 e 7 cioè che $100:7=A:X$ cosa vuol dire analogo? Vuol dire che se A è fatto da 100 pezzetti tutti uguali tra loro, allora X è fatto da 7 di quei pezzetti, cioè $X=7x(A/100)$. La formula si può imparare a memoria ma conviene sempre ricordare da dove viene.

2012

20. Nel piano cartesiano sono dati i punti A(0,0) e B(3,0). Tra tutti i triangoli APB, con il vertice P sulla curva Γ indicata in figura, ve n'è uno di area massima. Tale area è uno dei valori seguenti. Quale?

- A. 8,5
- B. 9
- C. 7
- D. 8
- E. 7,5



Risposta E

Il triangolo di area massima è quello con altezza massima $h=5$.

L'esercizio è pensato per far notare che l'altezza è esterna al triangolo, cosa che a volte crea qualche difficoltà agli studenti.

2009

14. L'indice di massa corporea BMI (Body Mass Index) di un individuo è il rapporto fra il peso, espresso in kg, e il quadrato dell'altezza, espressa in metri. Io peso 80 kg e ho un BMI uguale a 30. Inoltre so che se dimagrisco di N kg, allora il mio BMI si ridurrebbe a 24. Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

- A $13 < N \leq 15$
- B $15 < N \leq 17$ [*]
- C $17 < N \leq 19$
- D $19 < N \leq 21$

Risposta B

Osservazione

Problema facilmente risolvibile mediante un semplice sistema; in alternativa si calcola l'altezza e successivamente N . In ogni caso si trova $N=16$. La particolarità dell'esercizio sta nella soluzione fornita tramite un intervallo di valori all'interno del quale si trova il valore richiesto perché tale approccio è infrequente.

Possiamo osservare che l'altezza non cambia e quindi, indicando con I il BMI e P il peso, abbiamo che il rapporto $P:I$, essendo l'altezza al quadrato, è costante. Quindi $P:I=(80-N):24$ da cui $N=16$.

2009

18. La dose consigliata di un certo medicinale è di 30 gocce al giorno, che corrispondono a 3 milligrammi di principio attivo. Sapendo che la concentrazione del principio attivo è di 2,5 milligrammi per millilitro, qual è il volume di una goccia?

- A 0,04 millilitri [*]
- B 0,06 millilitri
- C 0,12 millilitri
- D 0,25 millilitri

Risposta A

$$\text{Massa di principio attivo in una goccia: } m = \frac{3mg}{30} = 0,1mg \quad C = \frac{m}{V} \Rightarrow V = \frac{m}{C} = \frac{0,1mg}{2,5 \frac{mg}{ml}} = \frac{1}{25} ml = 0,04ml$$

Per risolvere il problema occorre conoscere la relazione tra volume e concentrazione che in realtà è implicita nelle unità di misura.

Ragionando in termini di proporzioni: se V è il volume di una goccia abbiamo l' "analogia"

$$2,5mg : 1ml = 3mg : 30V$$

2009 seconda parte

8. In un grande acquario vivono tre specie di pesci: A, B e C. Nell'ultimo anno il rapporto fra il numero di pesci di specie A e il numero di pesci di specie B è aumentato del 50%. Inoltre il rapporto fra il numero di pesci di specie B e il numero di pesci di specie C è aumentato del 20%. Di quanto è aumentato il rapporto fra il numero di pesci di specie A e il numero di pesci di specie C?

- A 35%
 B 70%
 C 80% [*]
 D 100%

Risposta :C

$$\frac{A_i}{B_i} = 150\% \frac{A_f}{B_f} \quad \frac{B_i}{C_i} = 120\% \frac{B_f}{C_f} \quad \frac{A_i}{C_i} = \frac{A_i}{B_i} \cdot \frac{B_i}{C_i} = 150\% \frac{A_f}{B_f} 120\% \frac{B_i}{C_i} = 180\% \frac{A_f}{C_f}$$

Osservazione

Per risolvere rapidamente l'esercizio occorre saper determinare il prodotto di percentuali, facilmente calcolabile trasformando la percentuale in frazione.

In modo analogo si risolve il problema utilizzando le frazioni: $(A_f/B_f) = (A_i/B_i)(1+0,5)$ ecc . In questo modo si riduce al minimo l'uso della memoria.

Problemi vari

2009

15. Un club esclusivo di appassionati di automobili d'epoca può avere per statuto al più 11 membri. Inoltre ogni membro deve avere un numero dispari di tali automobili, non superiore a 31, e due membri non possono avere lo stesso numero di auto. Qual è il massimo numero di automobili che possono avere complessivamente i membri del club?

- A 211
 B 231 [*]
 C 201
 D 251

Risposta B

Soluzione

Il massimo numero di automobili si ha se si considerano 11 membri del club, ciascuno dei quali con 31, 29, 27, ..., 11 automobili rispettivamente. Il numero totale è quindi:

$$11+13+15+\dots+31 = (1+3+5+\dots+31) - (1+3+5+\dots+10) = \sum_{i=0}^{16} (2i+1) - \sum_{i=0}^{11} (2i+1) = 16^2 - 5^2 = (16+5)(16-5) = 21 \cdot 11 = 231$$

Osservazione

L'esercizio richiede una attenta lettura e una corretta interpretazione. Fatto questo, la risoluzione risulta di semplice impostazione. Per quanto riguarda la risoluzione numerica la conoscenza della somma dei primi n numeri dispari velocizza i calcoli.

In alternativo si può anche nel modo seguente:

$$11+(11+2)+(11+4)+\dots+(11+20) = 11 \times 11 + 2+4+\dots+20 = 11 \times 11 + 2(1+2+3+\dots+10) = 11 \times 11 + 10 \times 11.$$

Nei problemi compare spesso la somma dei primi n numeri consecutivi. Questa formula conviene saperla con sicurezza.

La situazione reale proposta nell'esercizio sembra del tutto artificiale e un po' ridicola.

2010

81. In un'azienda il macchinario A produce 10 pezzi al minuto, mentre il macchinario B ne produce 12 al minuto. I pezzi vengono poi imballati in scatole da 15 pezzi ciascuna. Un giorno viene acceso prima il macchinario A e dopo mezz'ora viene utilizzato anche B. Quando A e B hanno prodotto lo stesso numero di pezzi, quante scatole sono state riempite in tutto?
- A. 300
B. 270
C. 180
D. 250
E. 240

Risposta: E

Soluzione

Per A si ha: 10 pezzi/minuto e per B si ha: 12 pezzi/minuto. Considerando che nella prima mezz'ora è in funzione solo A che produce 300 pezzi, l'equazione risolvibile risulta: $300 + 10t = 12t$ con soluzione $t = 150$ minuti. I pezzi prodotti da A risultano 1800 come quelli prodotti da B; in tutto 3600 pezzi e 240 scatole.

2011

16. Un noto gioco consiste nell'inserire nove numeri nelle caselle di un quadrato 3×3 , in modo che la somma dei tre numeri che si trovano su ciascuna riga, ciascuna colonna e lungo le due diagonali sia la stessa. Si dica quanto deve essere questa somma se i numeri da inserire sono

3,6,9,12,15,18,21,24,27.

- A. 54
B. 40
C. 45
D. 30
E. 36

Risposta C

Soluzione

Basta osservare che la somma cercata è $1/3$ della somma di tutti i numeri presenti sul quadrato. Pertanto tale somma si ottiene con un semplice calcolo:

$$\frac{1}{3}(3 + 6 + 9 + \dots + 27) = \frac{1}{3}3 \cdot (1 + 2 + 3 + \dots + 9) = \frac{9(9+1)}{2} = 45$$

Osservazione

Conoscere la somma dei primi n interi può velocizzare i calcoli anche se in questo caso un calcolo diretto non sarebbe eccessivamente lungo. Come detto prima è bene ricordare tale formula che è di uso frequente in questo tipo di esercizi.

2013

18. All'apertura della mia casella di posta elettronica ho ricevuto un certo numero di e-mail. Dopo aver risposto a $\frac{1}{4}$ di queste, ne ho ricevute tante quante quelle che erano ancora in attesa di risposta. Dopo aver risposto a $\frac{1}{4}$ di tutte le e-mail alle quali non avevo ancora risposto, ne ho ricevute tante quante quelle che erano ancora in attesa di risposta: così ora sono 18 le e-mail ancora in attesa di risposta. Quante e-mail ho ricevuto **in totale** dall'apertura della mia casella di posta elettronica?
- A. 46
B. 27
C. 23
D. 20
E. 36

Risposta C

Esercizio di difficile impostazione. Si può risolvere il problema mediante un grafico ad albero.

Indicate con X le mail iniziali e tra parentesi le nuove mail, si ha:

$$X \left\{ \begin{array}{l} \frac{3}{4}X \left\{ \begin{array}{l} \frac{3}{4}X + \left(\frac{3}{4}X \right) = \frac{3}{2}X \\ \frac{9}{8}X + \left(\frac{9}{8}X \right) \Rightarrow \frac{18}{8}X = 18 \end{array} \right. \\ \frac{1}{4}X \end{array} \right. \quad X=8 \text{ e quindi : } 8 + \frac{3}{4}8 + \frac{9}{8}8 = 8 + 6 + 9 = 23$$

Si potrebbe impostare il problema anche in questo modo: X_n è il numero di lettere cui devo rispondere al passo n -esimo. Rispondo a $\frac{1}{4}$ di queste e ne restano $\frac{3}{4}$. Ne ricevo altre $\frac{3}{4}$ quindi ho in totale $\frac{3}{2}X_n$ lettere da rispondere al passo successivo. La relazione ricorsiva è dunque $X_{n+1} = (\frac{3}{2})X_n$. Se X è il numero di lettere che ricevo al primo invio $(\frac{3}{2})X$ è il numero di lettere cui devo rispondere al secondo passo e $(\frac{9}{4})X$ è il numero di lettere che restano in attesa al secondo passo. Quindi $(\frac{9}{4})X = 18$, $X = 8$ e le lettere ricevute in totale sono $8 + (\frac{3}{4})8 + (\frac{9}{8})8 = 23$. In generale la relazione ricorsiva fornisce $X_n = (\frac{3}{2})^n X_0$.

2013

19. Un programma genera casualmente dieci numeri compresi tra 1 e 90. Si sa che sono stati generati i numeri

13, 21, 25, 33, 42, 61, 61, 85

e che la media dei dieci numeri generati è 44.

Quale dei seguenti non può essere uno dei due numeri mancanti nell'elenco?

- A. 8
B. 13
C. 90
D. 44
E. 72

Risposta A

Soluzione

La somma dei numeri indicati è 341 e due numeri mancanti sono x e y . Si ha pertanto $341 + x + y = 440$ e quindi $x + y = 99$. Pertanto né x né y possono valere 8.

Logica

Prof.ssa Eugenia Mattei

Logica e linguaggio

In una certa situazione e date certe premesse, stabilire se un'affermazione è vera o falsa (deduzione). Negare un'affermazione data. Interpretare le locuzioni "condizione necessaria", "condizione sufficiente" e "condizione necessaria e sufficiente". Usare connettivi logici tra proposizioni. Negare semplici proposizioni logicamente equivalenti. Usare i quantificatori "per ogni" e "esiste". Negare una proposizione contenente quantificatori. Riconoscere ipotesi e tesi di un teorema. Riconoscere (oppure: impostare) una dimostrazione per assurdo.

2009

20. Se non è vero che tutti i cittadini italiani nati il 1° gennaio 1950 hanno almeno un capello bianco, allora quale tra le seguenti affermazioni è vera?
- A Tutti i cittadini italiani nati il 1° gennaio 1950 hanno almeno un capello nero
 - B Tutti i cittadini italiani nati il 1° gennaio 1950 che non hanno i capelli neri sono calvi
 - C Almeno un cittadino italiano nato il 1° gennaio 1950 non ha capelli bianchi [*]
 - D Almeno un cittadino italiano nato il 1° gennaio 1950 ha almeno un capello nero

Risposta C

Per risolvere il quesito è importante sapere che la negazione di TUTTI non è NESSUNO ma è ESISTE ALMENO UNO CHE NON. Nel corso degli anni si dovrebbe riflettere spesso su questo perché vi sono numerosi casi su cui poter lavorare.

La proposizione è del tipo: Tutti gli elementi dell'insieme A appartengono all'insieme B la negazione è esiste un elemento dell'insieme A che non appartiene a B. Più sinteticamente la proposizione L'insieme A non è contenuto in B si nega dicendo che esiste un elemento di A non appartenente a B. Questo ragionamento è molto frequente.

6. Sono date tre proposizioni P , Q , R e si sa che se Q è vera e R è falsa allora P è vera. Se P è falsa che cosa possiamo dedurre?
- A Q è falsa oppure R è vera [*]
 - B R è vera
 - C Q è falsa e R è vera
 - D Q e R sono entrambe false

Risposta A

L'unica altra risposta che potrebbe sembrare corretta è la C. Per rispondere correttamente al quesito è sufficiente conoscere la tavola di verità della congiunzione logica e quella della implicazione. In ogni caso un semplice ragionamento permette di comprendere qual sia la risposta corretta. L'unico rischio è che si proceda per intuito o secondo il senso comune, spesso errato.

Si tratta del sillogismo A implica B, non B da queste premesse si può dedurre non A. In questo caso A è :

Q è vera e R è falsa. Non A significa che o Q è falsa oppure R è vera. La tavola dei sillogismi ipotetici è molto importante e va continuamente ricordata.

Se A allora B, non B; allora non A

Se A allora B, non A; nulla si può dedurre (Si sbaglia con facilità)

Se A allora B, B; allora nulla si può dedurre

Se A allora B, A; allora B

15. Aldo, Bruno, Carlo e Dario fanno una gara di corsa fra loro, al termine della quale rilasciano le seguenti dichiarazioni.

Aldo: "Non sono arrivato né primo, né ultimo."

Bruno: "Non sono arrivato ultimo."

Carlo: "Sono arrivato primo."

Dario: "Sono arrivato ultimo."

Sapendo che uno e uno soltanto dei quattro ha mentito, chi ha vinto la gara?

- A Aldo
- B Bruno [*]
- C Carlo
- D Dario

Risposta B

L'unica indicazione possibile per risolvere quesiti del genere è quella di procedere esaminando tutti i casi possibili, cercando di individuare quelli contraddittori. Per arrivare alla soluzione occorre fare dunque delle ipotesi.

Aldo mente. Allora Aldo è arrivato primo o ultimo; ma allora mentono anche Carlo o Dario, il che è impossibile.

Bruno mente. Allora Bruno è arrivato ultimo e quindi anche Dario mente, cosa impossibile.

Carlo mente. Allora Carlo non è primo, Dario è ultimo, Bruno non è ultimo e Aldo è secondo o terzo. In questo caso l'unico che può essere primo è Bruno.

Dario mente. Allora Dario non è ultimo e Carlo è primo; queste due affermazioni portano a concludere che allora Dario è secondo o terzo. Si sa poi che Aldo è secondo o terzo, quindi Bruno deve essere necessariamente ultimo, cosa impossibile.

Tutti i casi esaminati portano a una contraddizione ad eccezione del terzo; se ne conclude che Bruno ha vinto.

Il ragionamento fatto può essere sintetizzato con semplici tabelle che indicano l'iniziale del nome e la posizione nella gara. In questo modo si riesce a individuare rapidamente la risposta esatta.

2011

25. In un gioco, cinque amiche fanno un'affermazione, che è vera o falsa. Quattro affermazioni sono riportate sotto, una è mancante.

Anna: 11 è un numero primo

Celeste: ...

Francesca: un rombo ha quattro lati uguali

Morgana: l'affermazione di Celeste è falsa

Tiziana: una sola tra le affermazioni precedenti è vera

Si può dedurre, anche se non si conosce l'affermazione di Celeste, quante delle cinque affermazioni sono vere?

- A. No
- B. Sì, sono vere solo tre affermazioni
- C. Sì, sono vere solo quattro affermazioni
- D. Sì, sono vere solo due affermazioni
- E. Sì, è vera solo una affermazione

Risposta B

Ci sono due possibilità per l'affermazione di Celeste: vera o falsa. Costruiamo due tabelle, una per ciascun caso:

L'affermazione di Celeste è vera	
A	V
C	V
F	V
M	F
G	F

L'affermazione di Celeste è falsa	
A	V
C	F
F	V
M	V
G	F

In ciascuno dei due casi le affermazioni vere sono tre e quindi la risposta corretta è la B.

Anche per questo caso valgono le considerazioni fatte per l'esercizio precedente.

2012

82. In un'azienda *se un certo evento B accade ed è causato da un dato evento A , allora si segue la procedura C .*

Da ciò si può dedurre che, in tale azienda,

- A. se B accade e si segue la procedura C , allora la causa di B è A
- B. se B accade, ma non è causato da A , allora non si segue la procedura C
- C. se B accade e non si segue la procedura C , allora la causa di B non è A
- D. se non accade B , allora non si segue la procedura C
- E. se non si segue la procedura C , allora non è accaduto B

Risposta C

La risposta A può trarre in inganno gli studenti perché l'interpretazione che viene fatta della affermazione del testo è che la procedura C si effettua ESCLUSIVAMENTE al verificarsi della condizione posta. In realtà l'affermazione dell'esempio dice che la condizione posta è SUFFICIENTE per il verificarsi della procedura C e non che tale condizione sia anche NECESSARIA. Pur lavorando molto su questi temi nel corso degli anni, non sempre gli studenti sono pienamente consapevoli delle differenze tra condizione necessaria, condizione sufficiente e condizione necessaria e sufficiente. E' opportuno, quindi, lavorare molto su questo.

2013

15. Un posto di polizia utilizza per gli interrogatori un dispositivo con due luci: la luce V si accende sicuramente quando l'interrogato dice la verità (ma potrebbe accendersi anche se mente), la luce F si accende sicuramente quando l'interrogato mente (ma potrebbe accendersi anche se dice il vero).

Sapendo che l'interrogato o mente o dice la verità, quando è possibile escludere che l'interrogato dica la verità?

- A. Mai.
- B. Quando si accendono sia V che F .
- C. Quando non si accendono né V né F .
- D. Quando si accende solo F .
- E. Quando si accende solo V .

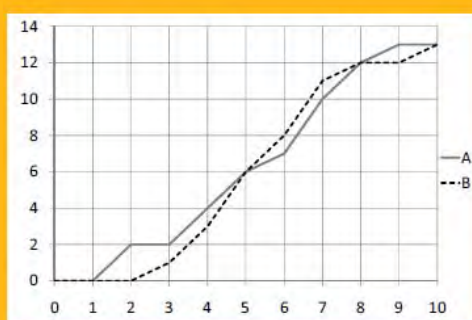
Risposta D

La risposta appare di immediata individuazione.

C'è da dire, però, che il quesito è forse poco chiaro; può trarre in inganno la risposta C perché tale risposta sembra implicare che l'interrogato possa non dire nulla, caso non vero ma non espressamente escluso nel testo. Anche se c'è scritto che l'interrogato mente o dice la verità, forse un esplicito riferimento al fatto che l'interrogato risponde sempre alle domande sarebbe di aiuto alla comprensione del quesito. Nel caso in cui l'interrogato non dica nulla, infatti, sicuramente non sta dicendo la verità e quindi potrebbe sembrare giusta anche la risposta C.

2013

83. Tredici concorrenti hanno svolto due prove, ciascuna composta di 10 quesiti, su due temi A e B. Nel grafico è riportato l'esito cumulato relativo a ciascuna delle due prove cioè (sia per il tema A, sia per il tema B), in corrispondenza a ogni valore n sull'asse orizzontale, sull'asse verticale è indicato quanti concorrenti hanno risposto correttamente a un numero di quesiti non superiore a n .



Dal grafico si può dedurre con certezza che

- A. il numero di concorrenti che ha risposto correttamente ad almeno 8 quesiti è lo stesso nei due temi
- B. il numero di concorrenti che ha risposto correttamente a esattamente 8 quesiti è lo stesso nei due temi
- C. c'è un concorrente che ha risposto correttamente ad un solo quesito del tema A
- D. le risposte corrette sul tema A sono state quante le risposte corrette sul tema B
- E. il numero di concorrenti che ha risposto correttamente ad al più 5 quesiti è uguale nei due temi

Risposta E

Osservazione la difficoltà di questo quesito è unicamente nel testo e precisamente al senso di “non più di n quesiti”. Una errata lettura del testo porta facilmente a dare la risposta errata A.

Da un punto di vista cognitivo la difficoltà dell'esercizio è legata alla difficoltà del pensiero di dominare logicamente la negazione: le affermazioni in positivo sono capite più facilmente. Conviene quando possibile tradurre il negativo in positivo. Nel caso dell'esercizio “non superiore a n ” in positivo diventa “inferiore o uguale a n ”

Probabilità :prof.ssa Maria Antonietta Sallustio

SYLLABUS

Usare le tecniche del calcolo combinatorio (permutazioni, disposizioni, combinazioni) per contare gli elementi di un insieme . Rappresentare i possibili risultati di un esperimento come sottoinsiemi di un opportuno spazio e interpretare le operazioni insiemistiche in termini di eventi. Calcolare la probabilità di eventi in situazioni semplici. Calcolare la probabilità di eventi, a partire dalla probabilità di altri eventi.

CALCOLO COMBINATORIO

2009

2. Si considerino tutti gli anagrammi della parola 'FUNGHI', ovvero tutte le parole che si ottengono permutando le sei lettere. Tra esse, quante sono le parole che non cominciano per 'F'?

- A 360
- B 600 [*]
- C 720
- D 120

Ho 6 possibili scelte per la prima lettera,

5 per la seconda,

4 per la terza,

3 per la quarta,

2 per la quinta,

1 per la sesta

$P(6) = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$.

Da tale numero bisogna però togliere le parole che iniziano con F

$720 : 6 = 120$.

quindi $720 - 120 = 600$.

2012

14. Quanti sono i numeri di quattro cifre che hanno come cifre un solo 1 e un solo 2 e due volte la cifra 3?
- A. 12
 - B. 9
 - C. 60
 - D. 24
 - E. 18

Risposta A

La traccia chiede quanti numeri di 4 cifre si possono formare con un 1, un 2 e due 3: praticamente è come se la domanda ci chiedesse quanti anagrammi di 4 lettere si possono formare con A, B, C e C. Questi quiz sono assimilabili a permutazioni con ripetizione e si risolvono con la formula $n!/r!$, dove n indica le cifre che ci sono a disposizione (in questo caso sono quattro cifre) e r indica quante volte è ripetuta una delle cifre (il 3), ovvero 2.

Quindi $4!/2! = (4 \times 3 \times 2 \times 1)/(2 \times 1) = 12$.

E' preferibile quando gli elementi sono pochi calcolarli direttamente:

1233 ,1332,1323

2133,2133,2133

3132,3231,3312,3123,3321,3213

3 sono i numeri che iniziano con 1,
3 sono i numeri che iniziano con 2,
6 sono i numeri che iniziano con 3.
 $6+3+3=12$

2009

4. Durante una vacanza, sette amici prendono in affitto due automobili. Una di esse ha due posti, l'altra ne ha cinque. In quanti modi differenti possono distribuirsi i sette amici sulle due automobili?
- A 21 [*]
 - B 14
 - C 28
 - D 35

Basta calcolare il numero di sottoinsiemi di 7 elementi che si possono formare a partire da un

insieme che contiene 2 elementi.

A= {1,2,3,4,5,6,7,}	
(1,2); (1,3);(1,4);(1,5);(1,6);(1,7)	6
(2,3);(2,4);(2,5);(2,6);(2,7)	5
(3,4);(3,5);(3,6);(3,7)	4
(4,5);(4,6);(4,7)	3
(5,6);(5,7)	2
(6,7)	1

$$6+5+4+3+2+1=21$$

N.B : *il coefficiente binomiale lo si può calcolare sia con il triangolo di Tartaglia che con la formula*

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! (n - k)!}$$

Osservazione: più che applicare una formula è preferibile ricordare la strategia con cui possiamo contare un certo numero di elementi.

2013

20. Ho 8 vaschette di gelato, con gusti tutti diversi tra loro: tra essi, fragola e liquirizia. In quanti modi diversi posso servire gelati con tre gusti differenti, se escludo di mettere insieme fragola e liquirizia?
- A. 50
 - B. 56
 - C. 21
 - D. 44
 - E. 42

Risposta A

Escludendo la liquirizia si considerano 7 gusti diversi.

Applico la formula del calcolo combinatorio delle combinazioni senza ripetizione di 7 elementi a gruppi di 3

$$C(7,3) = 7! / (3! \times (7 - 3)!) = 5040 / (6 \times 24) = 5040 / 144 = 35$$

Con il triangolo di Tartaglia si ha

0																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																												
---	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

si ottengono 35 risultati diversi e ciascun gusto viene utilizzato 15 volte
sostituendo il gusto fragola col gusto liquirizia
si ottengono 15 nuove combinazioni allora

$$35 + 15 = 50$$

si possono servire 50 gelati con 3 gusti differenti.

Se non si fa l'esclusione:

$$C(8, 3) = 56$$

escludendo fragola e liquirizia, questi 2 gusti si possono abbinare ad ognuno dei 6 rimasti quindi
bisogna togliere queste possibilità:

$$56 - 6 = 50$$

PROBABILITA'

2009

7. Mario lancia quattro volte una moneta non truccata. Qual è la probabilità che esca testa in almeno tre lanci?

- A $\frac{5}{16}$ [*]
B $\frac{1}{8}$
C $\frac{1}{4}$
D $\frac{9}{16}$

La probabilità di ottenere almeno 3 teste è la somma delle probabilità di ottenere 3 teste o 4 teste.

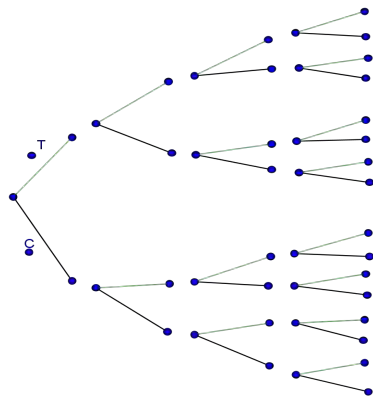
Per 3 teste $P(3T, 1C) = C(4,3) p(T)^3 p(C) = 4 (1/2)^3 1/2 = 1/4$ (formula di Bernoulli)

Per 4 teste $P(4T, 0C) = C(4,4) p(T)^4 p(C)^0 = 1/16$

$$1/4 + 1/16 = 5/16$$

Si può usare anche l'albero delle prove ripetute

TTTT;TTTC;TTCT;TTCC;TCTT;TCTC;TCCT;TCCC;CTTT;CTTC;CTCT;CTCC;CCTT;CCTC;
CCCT;CCCC.



$$P(T)=5/16.$$

2011

22. Un sacchetto contiene palline: il 25% sono gialle, il 50% sono rosse e la parte restante sono verdi. Il 10% delle palline di ogni colore è difettoso. Le palline, anche quelle difettose, sono tra loro indistinguibili al tatto. Si estrae a caso una pallina. La si vorrebbe gialla (non importa se difettosa), oppure rossa, purché non difettosa. Qual è la probabilità che la pallina estratta sia del tipo desiderato?

- A. 60%
- B. 70%
- C. 55%
- D. 65%
- E. 75%

Risposta B.

La probabilità di estrarre una pallina gialla, anche se difettosa è 25/100.

Rossa non difettosa $50/100 - 10/100 \times 50/100 = 45/100$. (Bisogna quindi sottrarre le difettose rosse che sono il 10% del 50%).

Quindi la probabilità che la pallina estratta sia del tipo desiderato è:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 25/100 + 45/100 = 70/100 = 70\%.$$

2011

79. Ho 7 nipoti, 2 maschi e 5 femmine. Ho comperato 5 regali di uno stesso tipo per le femmine e 2 regali di un altro tipo per i maschi. Se distribuisco a caso i regali, qual è la probabilità che entrambi i maschi ricevano il regalo per loro pensato?

- A. $\frac{2}{21}$
B. $\frac{1}{21}$
C. $\frac{4}{49}$
D. $\frac{1}{42}$
E. $\frac{1}{49}$

Risposta B.

2/7 è la probabilità che un maschio riceva il regalo giusto, 1/6 è la probabilità dell'altro maschio. Quindi la probabilità che entrambi ricevano il regalo giusto è

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = 2/7 \times 1/6 = 1/21.$$

2013

84. Un mazzo di carte è formato da 4 re, 4 donne e 4 fanti. Qual è la probabilità che, dopo averle mescolate, le prime quattro carte del mazzo siano quattro donne?

- A. $\frac{1}{864}$
B. $\frac{1}{495}$
C. $\frac{1}{64}$
D. $\frac{1}{3}$
E. $\frac{1}{81}$

Risposta B.

A: la prima carta del mazzo è una donna $P(A)=4/12$

B: la seconda carta del mazzo è una donna $P(B)=3/11$

C: la terza carta del mazzo è una donna $P(C)=2/10$

D: la quarta carta del mazzo è una donna $P(D)=1/9$

Gli eventi A,B,C e D sono indipendenti quindi

$$P(A \cap B \cap C \cap D) = 4/12 \times 3/11 \times 2/10 \times 1/9 = 1/495.$$

2010

13. Sulle sei facce di un dado compaiono le cifre da 1 a 6. Si lancia il dado due volte; qual è la probabilità che il 3 non esca al primo lancio ed esca al secondo?

- A. $\frac{18}{36}$
- B. $\frac{6}{36}$
- C. $\frac{25}{36}$
- D. $\frac{5}{36}$
- E. $\frac{1}{36}$

Risposta D.

A: il 3 non esce al primo lancio

B: il 3 esce al secondo lancio

$$P(A) = 5/6$$

$$P(B) = 1/6$$

gli eventi sono indipendenti quindi

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) = 5/6 \times 1/6 = 5/36.$$