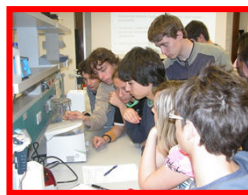


La Storia della matematica nell'insegnamento

«Far interagire la matematica con la cultura» (F. G.)



Livia Giacardi
Roma, 19 giugno 2013

Struttura

- La storia della matematica e della scienza nei programmi ministeriali
- Che cosa pensavano i matematici del passato
- Come e perché la storia nell'insegnamento
- Le iniziative internazionali
- Le iniziative italiane
- Che cosa pensano gli insegnanti
- Che cosa fare

Le Indicazioni nazionali, marzo-maggio 2010

«Si evidenzia l'importanza di **connettere le varie teorie matematiche studiate con le problematiche storiche** che le hanno originate e di approfondirne il significato.

Lo studente saprà inquadrare le varie teorie matematiche studiate nel contesto storico entro cui si sono sviluppate e ne comprenderà il significato concettuale attraverso una visione storico critica anche in relazione al **contesto filosofico, scientifico e tecnologico**.

lo studente dovrà acquisire il senso e la portata dei principali momenti che caratterizzano la formazione del pensiero matematico: la **matematica nel pensiero greco**, la **matematica infinitesimale** che nasce con la rivoluzione scientifica del Seicento e che porta alla matematizzazione del mondo fisico, la svolta che prende le mosse dal **razionalismo illuministico** e che conduce alla formazione della matematica moderna e a un **nuovo processo di matematizzazione che investe nuovi campi** (tecnologia, scienze sociali, economiche e biologiche) e che ha cambiato il volto della conoscenza scientifica».

<http://seieditrice.com/orizzonti/2010/05/27/indicazioni-nazionali-per-i-licei-stesura-definitiva/>

1923 - Riforma Gentile

Si introduce la Storia della scienza nel programma di Storia degli istituti tecnici e in quello di Filosofia dei Licei scientifici (BUMPI, II 51, 1923, p. 4458, 4495)

1979 - I programmi della Scuola Media

ITALIANO

Indicazioni programmatiche

«Le letture saranno riferibili al mondo ... della scienza e della tecnica (**storia di scoperte e di invenzioni, relazioni di viaggiatori, semplici testi scientifici e di tecnica**), ...»

SCIENZE MATEMATICHE, CHIMICHE, FISICHE E NATURALI

Avviamento alla collocazione storica della scienza

«L'insegnante di scienze avvierà l'alunno ad una **prima riflessione sulla dimensione storica della scienza**, presentando, con esempi significativi, sia le linee di sviluppo della scienza dal suo interno, sia la stretta correlazione esistente fra l'evoluzione scientifica e quella della condizione umana.

(D. M. 9 febbraio 1979:

<http://www.edscuola.it/archivio/norme/programmi/media.html#STORIA>)



Piano Nazionale Informatica PNI (1987-1988)

<http://www.edscuola.it/archivio/norme/programmi/index.html>

OBIETTIVI DI APPRENDIMENTO

«... - **inquadrare storicamente qualche momento significativo dell'evoluzione del pensiero matematico.**»

INDICAZIONI METODOLOGICHE

«... potrà essere utile **sviluppare l'argomento seguendone l'evoluzione storica: ... far loro [agli allievi] percepire il gusto della ricerca storica, anche in ambito matematico.** In questa prospettiva potranno essere trattate, ad esempio, la scoperta dell'incommensurabilità e dell'esigenza di una costruzione razionale del sapere matematico, l'evoluzione storica dei concetti di numerazione e di numero, la nascita dell'algebra.

Il docente, ... cercherà ogni occasione per illustrare, ed eventualmente **approfondire, con il concorso del collega di filosofia ed attraverso la lettura di pagine a carattere storico, alcune questioni di epistemologia della disciplina.** Avrà così modo di presentare anche il contributo dato ai greci al costituirsi della scienza matematica.»

Programmi Brocca (1991-1992)

<http://www.edscuola.it/archivio/norme/programmi/index.html>

OBIETTIVI dell'insegnamento

Alla fine del triennio l'allievo dovrà dimostrare di:

...

«- **comprendere il rapporto tra pensiero filosofico e pensiero matematico;**

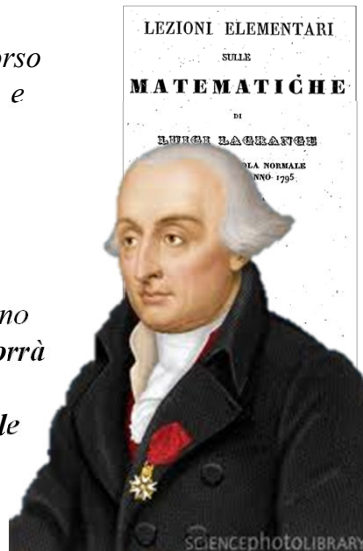
- **essere in grado di inquadrare storicamente l'evoluzione delle idee matematiche fondamentali.**»

Nei vari programmi passati in rassegna si fa riferimento a particolari conoscenze storiche che lo studente dovrebbe possedere e dunque la storia della matematica appare un poco come una **materia a se stante.**

***Le Lezioni elementari sulle matematiche
di Joseph Louis Lagrange (1736-1813)
all'École Normale
5 lezioni nella primavera del 1795***



“Cittadini, poiché il tempo destinato al corso intero di matematiche è abbastanza breve, e poiché del resto sono appena state date conferenze particolari sulle matematiche [Laplace], si è deciso che quelle che si dovevano tenere qui sulla stessa scienza fossero sostituite da lezioni dove si presenteranno gli sviluppi che non potevano entrare nel corso principale e dove si esporrà il percorso analitico degli inventori e gli artifici che hanno impiegato per vincere le difficoltà che potevano fermarli”



Le lezioni di Lagrange (aritmetica e algebra) sono poco strutturate, ricche di riferimenti storici, di accenni a risultati della ricerca, riflessioni critiche e epistemologiche sui metodi e sui diversi settori delle matematiche.

La dimensione storica

L'uso costante della storia delle matematiche nelle lezioni serve a Lagrange per **rendere gli sviluppi della teoria meno astratti, esplicitare le problematiche in gioco, illustrare il cammino percorso dai matematici nella risoluzione dei problemi**

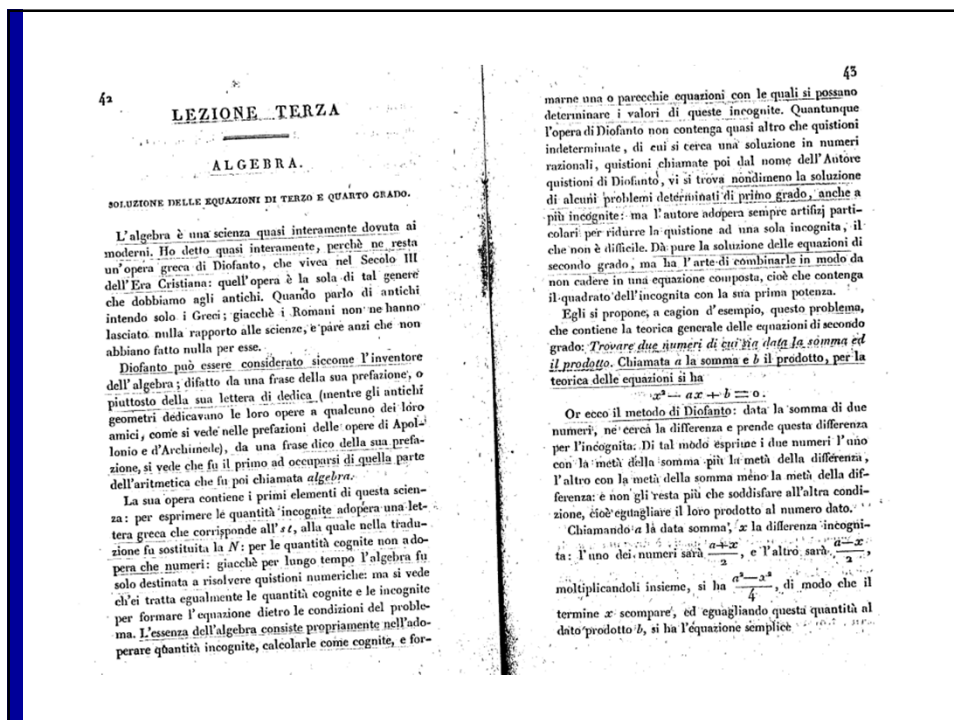
Spesso antepone ai suoi articoli introduzioni storiche (storia dell'analisi diofantea, della risoluzione equazioni algebriche, dei fondamentali analisi, del calcolo delle variazioni, della meccanica, ...)

Ha preparato un'edizione delle *Aritmetiche* di Diofanto mai pubblicata.

Atteggiamento: del **ricercatore** che si confronta con problemi aperti che trova nel passato una fonte d'ispirazione e di idee

dello studioso completo che intende presentare ampie sintesi e che dunque non può ignorare il passato

Note storiche sui sistemi di numerazione, sui logaritmi, sulla risoluzione di equazioni algebriche.



Felix Klein (1849-1925)

A partire dagli anni novanta Klein cominciò a elaborare il celebre programma di riforma dell'insegnamento della matematica che ridefiniva i rapporti fra insegnamento secondario e superiore e che confluì nel **Meraner Lehrplan (1905)**

- accennare al punto di vista storico e filosofico (Meraner Lehrplan p. 550).

Fra gli assunti metodologici di Klein infatti vi è quello di considerare nell'insegnamento il percorso storico della matematica adottando il **metodo genetico** : presentare una teoria seguendo il modo con cui si è sviluppata nella storia e non nella sua formulazione finale



Ambiguità della locuzione «metodo genetico» (Freudenthal 1994, pp. 72-75)

Giovanni Vailati

Crema 1863 - Roma 1909

matematico, filosofo, educatore, membro della Scuola di Peano.



Si laurea a Torino nel 1884 in Ingegneria e nel 1888 in Matematica.

1892-1895: è assistente di Giuseppe Peano (esigenza del rigore, analisi del linguaggio, democratizzazione del sapere, interesse per la didattica).

1896-1898: è assistente di Vito Volterra. Tiene corsi liberi di storia della meccanica (riflessioni storiche profonde sulla dimensione storica della ricerca scientifica).

1899: inizia l'attività di insegnante negli istituti medi superiori (Pinerolo, Siracusa, Bari, Como, Firenze).

1905-1909: è membro della **Commissione Reale** per la riforma della scuola secondaria

Importanza della storia della scienza

- ▶ dialogo fra cultura umanistica e scientifica
- ▶ funzione didattica

- «*spedantizzare l'esposizione*» [Vailati a Vacca, 25.5.1901, EV, 187].
- «*rendere l'insegnamento più proficuo e nello stesso tempo più gradevole, più efficace e insieme più attraente*». [Vailati 1897, S II, 10]

«A nessuno che abbia avuto occasione di trattare in iscuola, davanti a dei giovani, qualunque soggetto che si riferisca alle parti astratte e teoriche della matematica, può essere sfuggito il rapido cambiamento di tono che subisce l'attenzione e l'interessamento degli studenti ogni qualvolta l'esposizione ... lascia luogo a delle considerazioni d'indole storica... Di questo appetito sano e caratteristico delle menti giovani ... è certamente desiderabile trarre il maggior partito possibile.

Utilizzarlo intelligentemente vuol dire rendere l'insegnamento più proficuo e nello stesso tempo più gradevole, più efficace e insieme più attraente. [Vailati 1897]

- ▶ ruolo educativo e formativo:
antidoto contro ogni forma di dogmatismo

«La storia delle scienzemostrandoci come quelli che noi chiamiamo preconcezioni non sono che ... le teorie scientifiche corrispondenti ad uno stadio anteriore di sviluppo delle conoscenze umane, ci pone in guardia contro il pericolo inerente al credere che, perché un'ipotesi o una teoria è stata utile e feconda in passato deve per ciò solo continuare a rimaner tale anche per l'avvenire». [Vailati 1896, S I, p. 147]

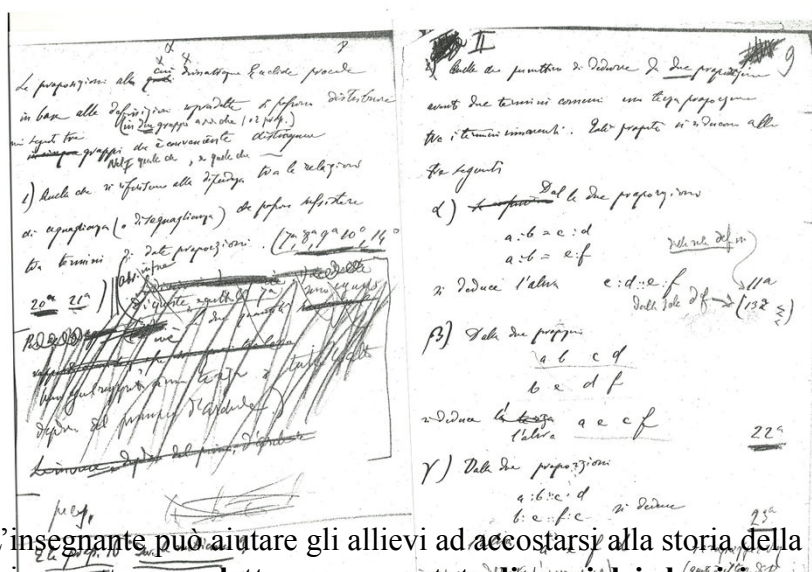
Commissione reale 1909, Programmi V Liceo Classico

<http://www.mathesistorino.it/wordpress/wp-content/uploads/2012/09/vailati.pdf>

Cenni storici sullo sviluppo della geometria greca. Piano dei primi quattro libri degli Elementi di Euclide. Esame riassuntivo del loro contenuto. Caratteri della trattazione delle proporzioni contenuta nel Quinto libro degli Elementi. Qualche saggio del procedimento di dimostrazione ivi seguito. Suoi vantaggi e sua semplificazione mediante le notazioni moderne. Il concetto di numero irrazionale.

Nozioni complementari sui numeri primi. Qualche cenno di analisi indeterminata di primo grado, con qualche richiamo alle trattazioni di Diofanto.

Poliedri regolari e loro costruzione. Equivalenza di piramidi. Qualche esempio dei procedimenti seguiti da Archimede per la determinazione del rapporto tra i volumi, o le superficie della sfera e quelli del cilindro, o cono retto ad essa circoscritti. Confronto coi metodi moderni corrispondenti. Nozioni elementari di cosmografia. Qualche accenno allo sviluppo delle idee cosmografiche e astronomiche dei Greci



L'insegnante può aiutare gli allievi ad accostarsi alla storia della scienza attraverso **letture commentate di passi dei classici**. Vailati stesso leggeva ai suoi studenti passi tratti dagli *Elementi di Euclide* [Fondo Vailati].



Gino Loria

Mantova 1862 - Genova 1954
Storico della matematica

Si laureò a Torino nel 1883 in matematica

1886 - cattedra di Geometria superiore all'Università di Genova,

Fu presidente per molti anni della sezione ligure dell'Associazione Mathesis

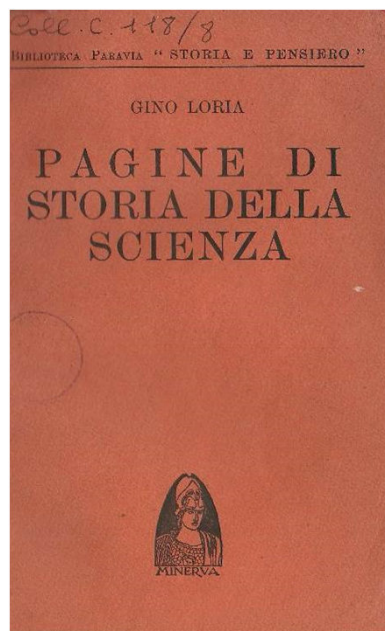
1906 - promosse l'istituzione della Scuola di magistero per la formazione degli insegnanti e ne assunse la direzione.

Loria attribuisce importanza alla storia della matematiche elementari soprattutto nella **formazione degli insegnanti** per stabilire un collegamento tra l'insegnamento secondario e quello superiore.

G. Loria, *La storia della matematica come anello di congiunzione fra l'insegnamento secondario e l'insegnamento universitario*, Atti I Congresso, Periodico di matematica, 1899, pp. 19-33.

Congressi Mathesis, Firenze 1908 e Padova 1909 - propone di creare **cattedre universitarie** pensate appositamente per la formazione degli insegnanti dove, accanto a temi tradizionali, sia presente **la storia della matematica**, si affrontino l'esame dei metodi didattici e l'analisi dei libri di testo.

«Il nuovo corso universitario da noi suggerito servirebbe, a parer nostro, a colmare il deplorabile abisso che oggi separa l'insegnamento universitario dall'insegnamento secondario, ... che F. Klein ha recentemente designato come 'sistema del duplice oblio': oblio da parte dello studente universitario di quanto studiò nelle scuole secondarie, oblio dell'insegnante secondario di tutto quello che lo occupò mentre trovavasi all'università»
[Loria, Padova 1909, A, pp. 3-4].



Dopo la Riforma Gentile,
pubblica il volumetto

Pagine di storia della scienza
(Torino, Paravia, 1925)

rivolto agli studenti di scuola
secondaria.

Storia narrata con spazio alle biografie e attenzione agli argomenti previsti dai programmi delle scuole secondarie (p. XIV).

Aspetti tecnici assenti.

La storia della matematica è inserita insieme alla storia della fisica, chimica, astronomia, biologia, e delle scienze naturali.



Federigo Enriques

Livorno 1871 – Roma 1946

- **Presidente della Mathesis** (1919-1932),
- dirige e rinnova il *Periodico di matematiche* (1921-1938, 1946), rivista esplicitamente rivolta agli insegnanti,
- scrive **manuali scolastici** per le scuole secondariee (geometria, algebra, trigonometria,...)
- fonda l'Istituto nazionale per la storia delle scienze (1923) e la **Scuola universitaria per la Storia delle scienze** (1923) (anche formazione insegnanti)
- dà vita a importanti imprese editoriali : *Questioni riguardanti le matematiche elementari* (II ed. 1912-1914, III ed. 1924-1927). la collana *Per la storia e la filosofia delle matematiche* (1925)

Gli sviluppi scientifici acquistano pieno significato solo nella loro concatenazione storica: « *Una visione dinamica della scienza porta naturalmente sul terreno della storia, ... dunque la storia diviene parte integrante della scienza* » [Enriques & Chisini 1915, XI]

Un bravo insegnante dovrebbe presentare ai suoi allievi « le origini, le connessioni, il divenire, non un qualsiasi assetto statico » di ogni teoria studiata [Enriques 1921, p. 16], prestando attenzione a :

- errori che hanno fatto progredire la scienza
- questioni aperte
- diversi metodi

*“La scuola non è un campo in cui la fantasia individuale abbia a sbizzarrirsi tentando esperimenti arbitrari, anzi **tanto più è atta ad accogliere gli spiriti e le voci della società circostante, quanto più si alimenti della tradizione in cui anche questa prolunga le sue radici:** non già serbando viete forme e ripetendone la morta parola, ma **riattaccando . . . il passato al presente della cultura, in uno sforzo verso l'avvenire.***

***E come la scuola la scienza.** Anche per questa non vi ha un vero progresso, dove le nuove generazioni non attingano alla continuità del pensiero scientifico la visione dei problemi, facendosi valenti nello studio dei grandi modelli.”* [Enriques 1925, p. 8]

Pubblico :

- insegnanti,
 - studenti delle scuole secondarie superiori,
 - e in generale uomini colti.
- [Enriques, Forti 1925, 7].

*«La formazione di docenti di matematiche, che siano all'altezza dei loro compiti didattici, richiede, in genere, che la scienza sia da loro appresa non soltanto nell'aspetto statico, ma anche nel suo divenire. E quindi che lo studioso **apprenda dalla storia a riflettere sulla genesi delle idee, e d'altro lato partecipi all'interesse per la ricerca** »*
[Enriques 1938, p.190]

**Per la storia e la filosofia delle matematiche
Federigo Enriques**

- n. 1 F. ENRIQUES (a cura di), *Gli Elementi d'Euclide e la critica antica e moderna*, (Libri I-IV) Roma Alberto Stock 1925;
- n. 2 L. HEIBERG, *Matematiche, scienze naturali e medicina nell'antichità classica* Roma Alberto Stock 1924, traduzione di Gino Castelnuovo con note di F. Enriques;
- n. 3 F. ENRIQUES, U. FORTI (cura di), *I. Newton: Principii di Filosofia naturale, teoria della gravitazione*, Roma, Alberto Stock 1925;
- n. 4 E. RUFENI, *Il Metodo di Archimede e le origini dell'analisi infinitesimale nell'antichità*, Roma Alberto Stock 1926;
- n. 5 O. ZARISKI (a cura di), *Riccardo Dedekind: Essenza e significato dei numeri. Continuità e numeri irrazionali*, Roma, Alberto Stock 1926;
- n. 6 M. LOMBARDINI (a cura di), *A. C. Clairaut: La teoria della forma della terra dedotta dai principi dell'idrostatica*, Bologna Zanichelli 1928, con una nota di F. Enriques;
- n. 7 E. BORTOLOTTI (a cura di), *L'Algebra, opera di Rafael Bombelli da Bologna, Libri IV e V comprendenti "La Parte geometrica" inedita tratta dal manoscritto B. 1569, Biblioteca dell'Archiginnasio di Bologna*, Bologna Zanichelli 1929;
- n. 8 F. ENRIQUES (ed), *Gli Elementi d'Euclide e la critica antica e moderna*, (Libri V-IX), Bologna Zanichelli 1930, a cura di Maria Teresa Zapelloni e Guido Rietti;
- n. 9 U. FORTI, *Introduzione storica alla lettura del "Dialogo sui massimi sistemi di Galileo Galilei"* Bologna Zanichelli 1931;
- n. 10 F. ENRIQUES (ed), *Gli Elementi d'Euclide e la critica antica e moderna*, (Libro X) Bologna Zanichelli 1932 a cura di Maria Teresa Zapelloni e Ruth Struik;
- n. 11 F. ENRIQUES (ed), *Gli Elementi d'Euclide e la critica antica e moderna*, (Libri XI-XIII) Bologna Zanichelli 1936 a cura di A. Agostini;
- n. 12 G. CASTELNUOVO, *Le origini del calcolo infinitesimale nell'era moderna*, Bologna Zanichelli 1938.

Nei vari libri di testo scritti da Enriques vi sono varie digressioni e complementi storici, ma E. è anche consapevole che si può fare un uso non marginale della storia della matematica nella pratica di insegnamento.

*«Se l'allievo deve partecipare in modo attivo a questo studio, non si può dargli definizioni e regole senza spiegazione, come doni piovuti dal cielo, di cui poi quegli che riceve il dono non saprebbe servirsi. ... **La storia della scienza viene qui in soccorso, mostrandoci come le verità aritmetiche siano state riconosciute dai Pitagorici mediante modelli geometrici dei numeri, quali sono i numeri figurati: numeri quadrati e rettangolari, numeri triangolari, ecc.**»* [Enriques 1934, "Prefazione" in Enriques, A., *Aritmetica ad uso delle scuole medie inferiori*, pp. IX-XI].

U. Amaldi e F. Enriques, *Nozioni di matematica ad uso dei licei moderni*, vol. I, Bologna Zanichelli 1920 (II ed.), p. V

2) La trattazione dei radicali quadratici e delle equazioni di secondo grado mette in rilievo lo svolgimento parallelo e l'interdipendenza dei concetti algebrici e geometrici, quali risultano dal progresso storico. Questo modo d'esposizione reca il peculiare vantaggio di chiarire i passi successivi alla ricerca, in guisa che l'allievo possa comprendere le verità insegnate rivivendo il processo del loro acquisto.

3) La stessa osservazione si può ripetere in rapporto ai problemi di cubatura dei solidi, dove viene esposto in forma elementare il procedimento d'integrazione classico dei precursori del Calcolo infinitesimale, che risale ad Archimede.



Francesco Severi

Arezzo 1879 – Roma 1961

1909-1910 – Presidente della Mathesis

dal 1926 – Direttore della *Collezione di testi di matematica per le scuole medie per la casa* Editrice Vallecchi di Firenze

► Scrive manuali per ogni ordine di scuola

■ Severi usava la storia delle matematiche nelle sue lezioni sia universitarie, sia di perfezionamento

“... non dimenticare i maestri, perché un'idea geniale vale in potenza creatrice più di tutte le sue conseguenze” [Severi 1955, p. 38]

■ ed era anche convinto che per **facilitare la comprensione di certi concetti matematici, da parte degli studenti di scuola secondaria**, fosse utile prendere le mosse dalla loro origine storica.

*"Occorre ispirarsi al principio che **nell'apprendimento di nozioni nuove l'intelletto tende a seguire un processo analogo a quello con cui si è storicamente sviluppata la scienza**" [Severi 1933, IX]*

F. Severi, *Didattica della matematica*, Enciclopedia delle Enciclopedie: Pedagogia, Formigini, Roma, 1931, pp. 362-370
Sintesi del suo pensiero didattico

“ La teoria dei numeri reali, che, come ho detto, costituisce una delle maggiori difficoltà, si deve costruire dal punto di vista geometrico. Il **numero reale è storicamente nato come rapporto di due grandezze e da siffatto concetto convien prendere le mosse, perché la genesi storica delle idee è quella che, nella maggior parte dei casi, risponde alle necessità pedagogiche**” [Severi 1931, p. 366]

F. Severi, *Elementi di geometria. Per i Licei e pel corso superiore dell'Istituto tecnico*, vol. II, Vallecchi, Firenze 1936, pp. VI

zione. Essa passa senza lasciar nell' intelletto segni durevoli. Ciò dipende dalla soverchia astrattezza della definizione e dell' impostazione iniziale. Eppure, pochi cambiamenti, più formali che sostanziali, danno alla teoria un'intonazione più concreta e un po' di amorosa cura basta per trovar la via che conduce, con tutta naturalezza, e per gradi insensibili, al concetto astratto. Con questo fine la maggior parte del Capitolo concernente le proporzioni, io l' ho dedicata alla graduale conquista e delimitazione di tale concetto.

Lo stesso ho fatto pei numeri reali, movendo dalla nozione storica di numero reale come rapporto di grandezze incommensurabili ed arrivando alla definizione aritmetica, mediante classi. E credo che questa definizione possa così apparire la più naturale; mentre, enunciata senza convenienti spiegazioni preliminari, apparisce al principiante strana, ingombrante, artificiosa.

■ Uso della storia della matematica «narrata»

F. Severi, *Geometria elementare. Con cenni storici. Per il triennio della scuola media*, Firenze, Vallecchi, 1957, p. 35

F. Severi, *Geometria elementare. Per il ginnasio superiore*, Firenze, Vallecchi, 1943, p. 16

CENNI STORICI

64. La nozione di rette parallele è anch'essa antichissima. La Scuola Italica fin dai primordi conobbe le principali loro proprietà; ma un soddisfacente ordinamento di queste per la prima volta negli *Elementi* d'EUCLIDE (circa Le parallele costituirono per secoli, come scrisse (nel 1759), uno scoglio della geometria elementare, euclidea di rette che, indefinitamente tracciate, trano, non è infatti controllabile coll'esperienza, per non posson tracciarsi che segmenti più o meno lunghe rette indefinite. La definizione delle parallele costanti, forse anteriore ad EUCLIDE, si trova espressa in ERONE nel I secolo avanti Cristo. Essa ha il vanto sperimentale accettabile.

Non è possibile spiegare, a chi sta appena iniziando la geometria, la ragione dei secolari dibattiti. Questi dibattiti poterono concludersi soltanto nella creazione della geometria non euclidea, della quale un italiano: Padre GEROLAMO SACCHERI (1733) interessante di sapere fin d'ora che le nuove geometrie parlarono il terreno alla teoria della relatività, di cui spesso parlare e che domina la fisica contemporanea quanto impensate e vaste possono essere le ripercussioni matematiche, anche se le sue teorie non paiono nel sub applicazioni.

CENNI STORICI

11. Riassumeremo le notizie storiche date nella Scuola media, e le completeremo sottolineando il trapasso dallo stadio empirico e intuitivo allo stadio razionale della geometria. Sumeri, Babilonesi ed Egizi, migliaia e migliaia di anni or sono, possedevano alcune conoscenze geometriche derivate da problemi astronomici e pratici. Dall'Egitto queste conoscenze passarono in Grecia, intorno al 600 av. Cr., specialmente, a quanto sembra, per opera di TALETE di Mileto, uno dei sette saggi cui alludono PLATONE e ARISTOTELE e del quale discorre anche PLUTARCO, riferendo che il re egiziano AMASI ammirava TALETE soprattutto perché egli otteneva la misura delle piramidi «senza fatica e senza strumenti», ma con poche misure, sulla scorta di semplici proprietà geometriche. A TALETE si fanno risalire vari teoremi, come quello degli angoli opposti al vertice [ved. § 32]. Secondo PROCLIO, filosofo neoplatonico e tardo commentatore di EUCLIDE del V secolo d. Cr., la geometria di TALETE è a mezza strada fra la geometria concreta, o se si vuole intuitiva, degli Egizi e la geometria astratta e generale, o se si vuole razionale, di PITAGORA. PROCLIO così precisa l'ordine del processo costruttivo della geometria: «dalla sensazione al ragionamento e da questo al-

... in tempi più recenti

Tullio Viola

Roma 1904 - Torino 1985



1953-58, Bari - Lezioni sperimentali nelle scuole medie inferiori durante le quali, fra l'altro, per potenziare l'intuizione visiva degli allievi, illustra i primi rudimenti della geometria descrittiva di Monge.

“esse mi hanno giovato solo a porre dei problemi pedagogici, non a risolverli”
[Viola 1956, 157]

«Laboratori sperimentali di pedagogia»

1960 – diede l'avvio al primo gruppo di ricerca italiano su *Filosofia, pedagogia e storia della matematica*, finanziato dal CNR **1960-1970** - Presidente Mathesis

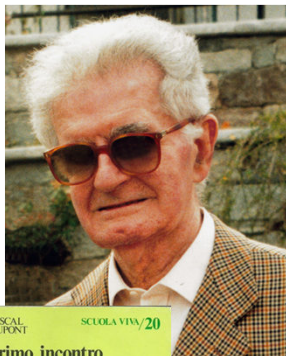
Continuò a fare sperimentazioni nelle scuole per tutti gli anni settanta.

La storia della matematica per la formazione degli insegnanti

T. Viola, *Lezioni sulla storia della matematica* (dispense 1973-1974) «per andare incontro ai docenti delle scuole pre-universitarie, d'ogni ordine e grado».



- “1. il corso avrà un'accentuazione chiaramente **interdisciplinare**,
2. Esso toccherà solo marginalmente questioni di carattere filosofico,
3. Esso e sarà accompagnato da un certo numero di esercitazioni, nelle quali verrà fatta **lettura di testi classici**. In tali esercitazioni, che avranno indirizzo prevalentemente critico, **la parte più tecnica (in senso matematico) verrà maggiormente curata.**
4. Esso non darà un panorama di tutti i fatti salienti della storia della matematica (cosa che, data la brevità del corso, sarebbe impossibile senza ridursi ad una semplice elencazione nozionistica [...], ma soltanto una visione concettuale delle svolte storiche più significative”. (Viola 1973-1974, pp. 3-4).



Pascal Dupont

(1923- 2010)

«La storia al servizio della didattica»
pre-universitaria e universitaria

Scopo: «costruzione di una didattica a sfondo storico, in virtù della quale agli studenti la matematica risulti sempre una gioiosa conquista invece che un odioso sforzo»



P. Dupont, *Primo incontro con la probabilità. Storia e didattica*, Torino, SEI, 1985

P. Dupont, *Appunti di storia dell'analisi infinitesimale*, Torino, Levrotto e Bella, 1979-1980, vol I e , II.1, II.2

Studio delle fonti - Confronto con i metodi attuali - Esercizi -
Suggerimenti di lettura

Storia della Matematica in classe: perché?

- la storia della matematica rende l'insegnamento della matematica **più piacevole e stimolante**
- la storia della matematica conferisce alla disciplina la sua **dimensione culturale e interculturale** [Djebbar 2013]
- la storia della matematica fa comprendere **che la matematica è una disciplina viva**
- la storia della matematica favorisce la **riflessione sia sugli oggetti matematici e sulla loro evoluzione, sia sul modo di introdurli in classe** [Radford 1997; Furinghetti - Radford 2008; ...]

il modo in cui un'antica idea è stata forgiata può aiutarci a ritrovare quegli antichi significati che, con un'opportuna opera di adattamento didattico, possono probabilmente essere ridisegnati e resi compatibili con i moderni programmi scolastici [Radford 1997]

Uffe Thomas Jankvist, 2010

History as a tool

La storia offre un aiuto per insegnare a imparare la matematica.

In questo caso può assolvere vari ruoli: può essere usata per motivare e stimolare gli studenti ad apprendere certi concetti matematici, come strumento cognitivo o strumento pedagogico

Ci si concentra su concetti, algoritmi, teorie e metodi matematici

History as a goal

La storia è considerata come uno scopo.

Ci si concentra sull'insegnamento dello sviluppo storico della matematica (che come ogni manifestazione del pensiero umano è legata al tempo e allo spazio), della sua influenza sulla società e sulla cultura, dell'interazione con altre scienze, ecc.

In questo modo può migliorare la percezione che gli studenti hanno della matematica e il loro atteggiamento verso di essa

Pericolo : storia aneddotica e poco ancorata ai concetti matematici

Storia della Matematica in classe: come?

“Illuminazioni”

l'insegnamento ordinario è talvolta «condito» da qualche informazione storica

Moduli storici

unità didattiche dedicate alla storia su temi specifici

Approccio all'insegnamento basato sulla storia della matematica:

la storia suggerisce il modo (sequenza degli argomenti, metodo, ...) per presentare un certo argomento

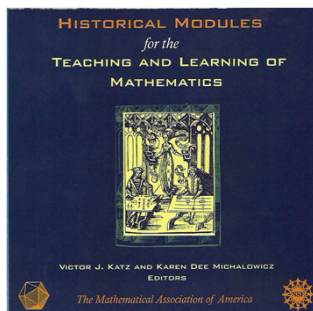
Tutti e tre gli approcci possono essere utili se dosati in modo differente nei vari livelli di scuola, e presuppongono:

- **Formazione preliminare degli insegnanti**
- **Preparazione di materiali *ad hoc***
- **Laboratori in classe preparati dagli insegnanti in collaborazione con gli esperti** (semplice ruolo di consulenza)

Le esperienze internazionali



- Convegni e volumi dell'IREM;
- Nel 1976 è creato *History and pedagogy of Mathematics*, gruppo affiliato all'ICMI creato nel 1976 che organizza:
 - *European Summer University on the History and Epistemology in Mathematics Education* (1993-);
 - *Satellite Meetings of ICMEs* (1984-)
- **V. Katz** (ed) 2000, *Using history to teach mathematics: An international perspective*, The Mathematical Association of America
- **V. Katz** (ed) 2004, *Historical Modules for the Teaching and Learning of Mathematics*, The Mathematical Association of America, CD-ROM, 2004 (realizzato in collaborazione con insegnanti)



Temi: Algebra, Geometria, Trigonometria, Pre-calculus, Statistica

Struttura: Introduzione storica
Note per l'insegnante
Pagine per lo studente
Attività didattiche tratte dalla storia
Altri esercizi

**S
C
O
P
I**

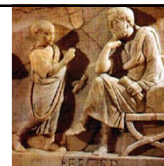
- To enable students to develop a much richer understanding of mathematics and its applications by viewing the same phenomena from multiple mathematical perspectives.
- To enable students to understand the historical background and connections among historical ideas leading to the development of mathematics.
- To enable students to see how mathematical concepts evolved over periods of time.
- To provide students with opportunities to apply their knowledge of mathematics to various concrete situations and problems in a historical context.
- To develop in students an appreciation of the history connected with the development of different mathematical concepts.
- To enable students to recognize and use connections among mathematical ideas.
- To enable students to understand how mathematical ideas interconnect and build on one another to produce a coherent whole;
- To lead students to recognize and apply mathematics in contexts outside of mathematics.

Le esperienze nazionali



Il giardino di Archimede
Un museo per la matematica

http://web.math.unifi.it/archimede/note_storia.html



Materiali per la scuola

- Breve storia della trigonometria
- La storia del calcolo infinitesimale attraverso i libri della biblioteca matematica
- Contare e far di conto: un viaggio alle origini dei nostri numeri
- L'algebra nella matematica islamica
- Misurazioni a distanza nel rifacimento di Cristofano di Gherardo di Dino della *Pratica geometriae* di Leonardo Pisano
- La soluzione per radicali delle equazioni di terzo e quarto grado e la nascita dei numeri complessi: Del Ferro, Tartaglia, Cardano, Ferrari, Bombelli
- Dal metodo delle tangenti al calcolo differenziale: un percorso storico-didattico
- Le sezioni coniche dei Greci

I Laboratori graduati per vari ordini scolastici

All'inizio del conto

APPUNTI

Numeri e conti presso gli antichi sumeri

I geroglifici degli antichi egizi

Bastoncini cinesi per numeri e conti

Le tavole di conto

STORIE

Uri, il piccolo sumero,

Ahmose e i 999.999 lapislazzuli

Percorsi, strategie e geometrie in gioco

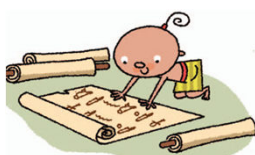
La storia del Regno di Regiomonte,

Osservazioni e complementi per l'Infanzia e la Primaria

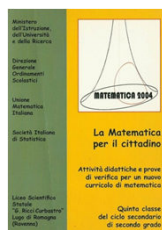
Osservazioni e complementi per la Primaria e la Secondaria Inferiore

La matematica in una bolla di sapone

Il quaderno di Alice, schede di attività per la scuola dell'Infanzia.



I Libri – Le mostre



UMI-CIIM

G. Anichini, F. Arzarello, L. Ciarrapico, O. Robutti, *Matematica per il cittadino*, 2001, 2003, 2004

Vari esempi di introduzione della storia nell'insegnamento

«La storia... permette all'allievo di rendersi conto che la **matematica non è una disciplina statica e che nasce e si sviluppa per risolvere problemi, siano essi pratici o teorici**. D'altro canto, il carattere unificante che le è proprio evidenzia **l'unità profonda** dei vari settori della matematica stessa. Essa favorisce inoltre l'approccio **interdisciplinare** (auspicato soprattutto nell'ultimo anno di liceo) e può stimolare la creatività.»

[Matematica 2004, p. 22]

Ricercatori in didattica con insegnanti

F. Arzarello, M. Bartolini Bussi, F. Furinghetti, ...





Piano lauree scientifiche

Sperimentazioni in classe
collaborazione fra insegnanti e universitari
<http://www.progettolaureescientifiche.eu/>



Altre iniziative

- Raccolte di fonti:

U. Bottazzini, P. Freguglia, L. Toti Rigatelli, *Fonti per la storia della matematica*, Firenze, Sansoni, 1992

C. F. Manara, G. Lucchini, *Momenti del pensiero matematico*, Milano, Mursia, 1976

- Volumi

I libri del Giardino di Archimede

L. Catastini, F. Ghione, *Le geometrie della visione. Scienza, Arte, Didattica*, Springer, Milano 2004 (aspetti matematici, aspetti storici e interdisciplinari, le fonti), ...

G. Israel, A. Millan Gasca, *Pensare in matematica*, Bologna, Zanichelli, 2012

mat@bel - Convegni PRISTEM



Il piacere di insegnare - Il piacere di imparare la matematica

La storia della matematica in classe: dalle materne alle superiori

CONVEGNO NAZIONALE 10 - 11 - 12 Marzo 2011
Montevarchi - San Giovanni Valdarno - Terranuova Bracciolini - Figline Valdarno

<http://php.math.unifi.it/convegnostoria/convegno.php?id=14>

- 13 conferenze storiche

- 1 tavola rotonda

L'insegnamento della storia della matematica: come, quando e perché


- 15 Laboratori per infanzia, primaria, secondaria inferiore

La matematica degli Egizi e dei Sumeri, I ponti di Königsberg, La matematica medievale, Matematica e arte, La geometria dei Greci, Il teorema di Pitagora, Sistemi di numerazione e strumenti di calcolo, I laboratori del Giardino di Archimede

- 20 laboratori per secondaria superiore

Il teorema di Pitagora, La geometria analitica, Il calcolo infinitesimale, La trigonometria, La geometria dei Greci, L'algebra e le equazioni algebriche, Le costruzioni con riga e compasso, Matematica e arte, I laboratori del Giardino di Archimede

171 iscritti



Il piacere di insegnare - Il piacere di imparare la matematica


**La storia della matematica in classe:
dalle materne alle superiori**

SECONDO CONVEGNO NAZIONALE
IVREA 14 - 16 Marzo 2013
Liceo scientifico A. Gramsci - Polo Formativo e di Ricerca Officina H



<http://php.math.unifi.it/convegnostoria/convegnostoria2/>

101
Iscritti

- **10 conferenze di ricercatori in storia e didattica della matematica:** Testi classici: Euclide, Newton, Dedekind, Peano; Storia dell'algebra; Giochi matematici; Bolle di sapone; Macchine matematiche; Storia del laboratorio di matematica; Libri di testo nel ventennio fascista
- **7 Laboratori per infanzia, primaria, secondaria inferiore** nascita dei numeri, teorema di Pitagora, la Pascalina, ...
- **18 laboratori per secondaria superiore** matematica e arte, equazioni di secondo grado, sistemi di numerazione e tecniche di calcolo, calcolo probabilità, storia dell'analisi
- **1 conferenza-concerto** La scala musicale da Pitagora a Rameau



IL GIARDINO DI ARCHIMEDE
laboratorio di matematica

Esempi

Pascal e la sua macchina per contare (II e III elementare) *scheda*

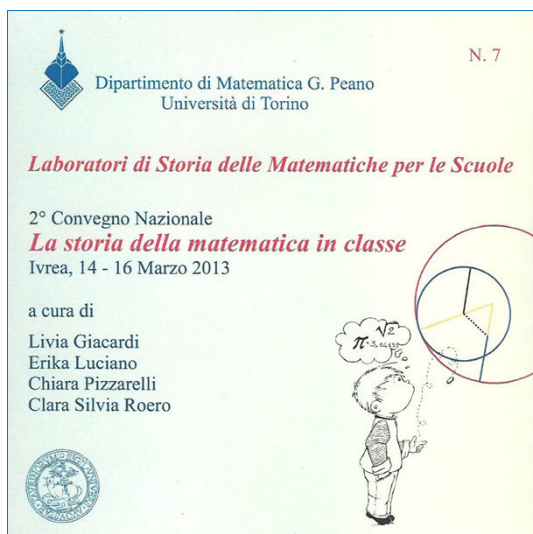


Sistemi di numerazione e tecniche di calcolo presso i popoli antichi (I liceo Scientifico) *scheda*



Le equazioni di II grado (II liceo scientifico) *scheda*





Storia Testi originali Esercizi

- *La terminologia matematica*
- *Calcolo delle probabilità*
- *Le origini dell'algebra*
- *I fondamenti*
- *Libri di testo in epoca fascista*
- *Storia del laboratorio di matematica*

Che cosa fare

- scuole estive per insegnanti,
- Convegno GdA-SISM
- libri su temi opportuni di storia delle matematiche, con fonti tradotte, esperienze scolastiche consolidate,
- antologie commentate di testi su tematiche fondamentali per l'insegnamento ...)

«Modellare la didattica disciplinare per rispecchiare, almeno in parte, quella che è stata la sua evoluzione storica *mi ha permesso di arricchire l'esposizione dei singoli argomenti con narrazioni e problemi classici, rispondere ai dubbi degli studenti paragonandoli a quelli dei matematici che stavano sviluppando la teoria e dare un senso a formule che altrimenti sarebbero state di difficile comprensione*. Ritengo quindi che adottare, dove possibile, un approccio storico all'insegnamento della matematica, invece di limitarsi a presentare "schede di approfondimento" alla fine dei singoli capitoli, possa in molti casi costituire un modo di fare didattica efficace e stimolante per gli studenti e per gli insegnanti» [Marco Bollettino, insegnante allievo TFA]

«Il metodo storico deve avere un impiego assai più raffinato nella didattica: deve permettere di prevedere quelle difficoltà che non sono dovute alla complessità di un problema o alla sottigliezza di un ragionamento, ma semplicemente ad una deformazione di prospettiva indotta da idee correnti, da abitudini mentali, ecc.» [Prodi 1989, p. 170]

Alcune indicazioni bibliografiche

- G. Loria 1899**, *La storia della matematica come anello di congiunzione fra l'insegnamento secondario e l'insegnamento universitario*, Periodico di matematica, 14, 1899, pp. 19-33
- G. Vailati 1897**, *Sull'importanza delle ricerche relative alla Storia delle Scienze*, in Giovanni Vailati, *Scritti*, 1987, vol. II, pp. 3-17.
- F. Enriques 1925** (a cura di), *Gli Elementi d'Euclide e la critica antica e moderna*, (Libri I-IV) Roma, Alberto Stock 1925, [Prefazione]
- F. Enriques 1938** *Le matematiche nella storia e nella cultura*, Bologna, Zanichelli 1938
- H. Freudenthal 1994**, *Should mathematics teacher know something about the history of mathematics?*, For the Learning of mathematics, 2, pp. 30-33
- H. Freudenthal 1994**, *Ripensando l'educazione matematica*, Brescia, La Scuola
- F. Furinghetti, Radford 2002**, *Historical conceptual developments and the teaching of mathematics*, in *Handbook of international research in mathematics education*, pp. 631-654
- U. T. Jankvist 2010**, *An implementation of two historical teaching modules. Outcomes and perspectives*, Proceedings of the 6° European Summer University, Wien, Holzhausen GmbH, pp. 139-15
- G. Prodi 1989**, *Insegnamento secondario e insegnamento universitario della matematica*, Archimede. 41, pp. 163-174

Siti e Raccolte di fonti

Programmi delle scuole secondarie superiori

<http://www.edscuola.it/archivio/norme/programmi/index.html>

Indicazioni UMI-CIIM: Matematica 2001, Matematica 2003 e Matematica 2004

<http://umi.dm.unibo.it>

1° Convegno Nazionale *La storia della matematica in classe*

<http://php.math.unifi.it/convegnostoria/convegnostoria1>

2° Convegno Nazionale *La storia della matematica in classe*

<http://php.math.unifi.it/convegnostoria/convegnostoria2/>

Documenti per la storia dell'insegnamento della matematica in Italia

<http://www.dm.unito.it/mathesis/documents.html>

AA. VV., *Les mathématiques au fil des âges*, Paris, Gauthier-Villars, 1987

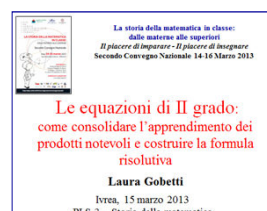
U. Bottazzini, P. Freguglia, L. Toti Rigatelli, *Fonti per la storia della matematica*, Firenze, Sansoni, 1992

J. Fauvel, J. Gray, *The History of Mathematics. A reader*, The Open University, 1987

C. F. Manara, G. Lucchini, *Momenti del pensiero matematico*, Milano, Mursia, 1976

D. J. Struik 1986, *A source book in Mathematics 1200-1800*, Princeton University Press, 1986

Allegati Schede di laboratori Ivrea 2013



Disegni di Massimo Perotti



Pascal e la sua macchina per contare


Esperienze nella scuola primaria

*Marisa Carossio,
Donatella Marro,
Donatella Merlo,
Ketty Savioli*





*Ivrea 2013
Nucleo di Ricerca Didattica Università di Torino*



Obiettivi generali

- Stimolare la curiosità verso gli aspetti storici e culturali della matematica.
- Integrare il pensiero narrativo e pensiero scientifico in un contesto storico-matematico.
- Sviluppare le competenze argomentative attraverso discussioni matematiche, congetture e argomentazioni scritte; potenziare e raffinare il lessico matematico specifico e la decodifica di un testo storico (adattato).

Obiettivi specifici

- Sviluppare le **conoscenze relative al sistema decimale posizionale**, attraverso l'uso dell'abaco e della macchina per contare di Pascal.
- Comprendere e descrivere il **funzionamento della "macchina matematica"** di Pascal (ingranaggi, scatti, cambio...) e fare confronti con l'abaco.
- Potenziare i significati dell'algoritmo nel calcolo (addizioni e sottrazioni) attraverso la rappresentazione dei "cambi-scatti" sulla macchina di Pascal; **scoprire la moltiplicazione come addizione ripetuta e la divisione come svuotamento progressivo.**

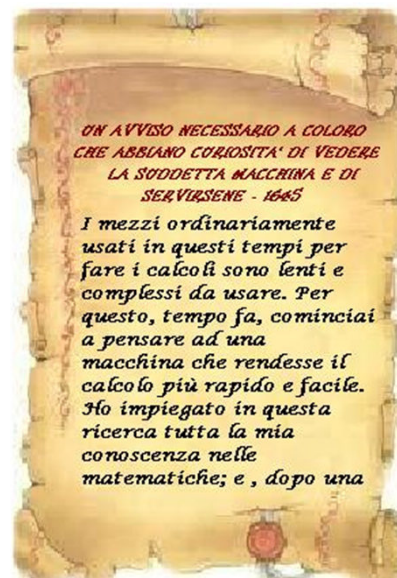
Il contesto fantastico

- In seconda arriva un librone con una storia, nel doppio fondo contiene i pezzi della macchina smontata.
- In terza invece arriva una cassetta misteriosa che contiene delle lettere...



Come entra la storia...

- LETTERA DI DEDICA AL MONSIGNOR CANCELLIERE RELATIVA ALLA MACCHINA RECENTEMENTE INVENTATA DAL SIGNOR B. P. PER ESEGUIRE OGNI TIPO DI OPERAZIONE ARITMETICA CON UN MOVIMENTO SENZA PENNA NÉ GETTONI CON un avviso necessario a coloro che avranno la curiosità di vedere la suddetta macchina e di servirsene (1645)
- tratto da: B. Pascal, *Oeuvres complètes*, Texte établi, présenté et annoté par Jacques Chevalier, Paris Gallimard, 1954, pp. 349-358 e 502-504
- Traduzione di Livia Giacardi



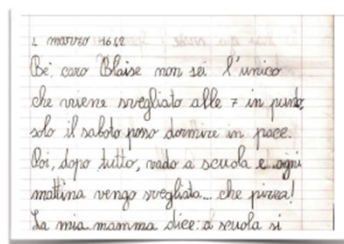
I bambini di seconda leggono le istruzioni e ricostruiscono la macchina.

Girando la prima ruota gialla, dopo il 9, quando arriva la freccia verso quella centrale, fa cambiare il numero sulla seconda rotella gialla

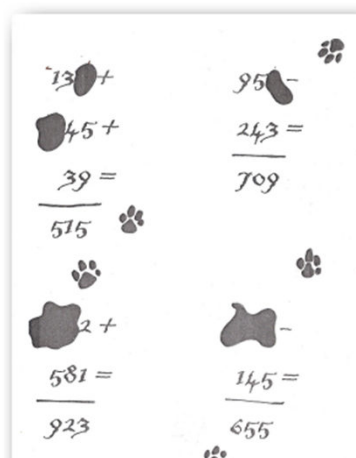


Usano la macchina per contare tappi e discutono sul suo funzionamento.

I bambini di terza leggono le lettere e scrivono a Blaise...

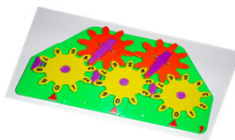


... poi un fatto inaspettato introduce il mondo del calcolo.



...una folata di vento improvvisa ... Boing ha fatto uno dei suoi incredibili salti proprio sulla scrivania... rovesciando il calamaio con l'inchiostro...

I bambini costruiscono strumenti per contare, ragionano su ingranaggi e inventano strategie di calcolo.



La divisione con la pascalina ad esempio
63:9 si fa mettendo il 63 sulla pascalina
poi bisogna togliere 9 fino ad arrivare
zero una persona li
quante volte il numero

**La divisione come
sottrazioni successive**

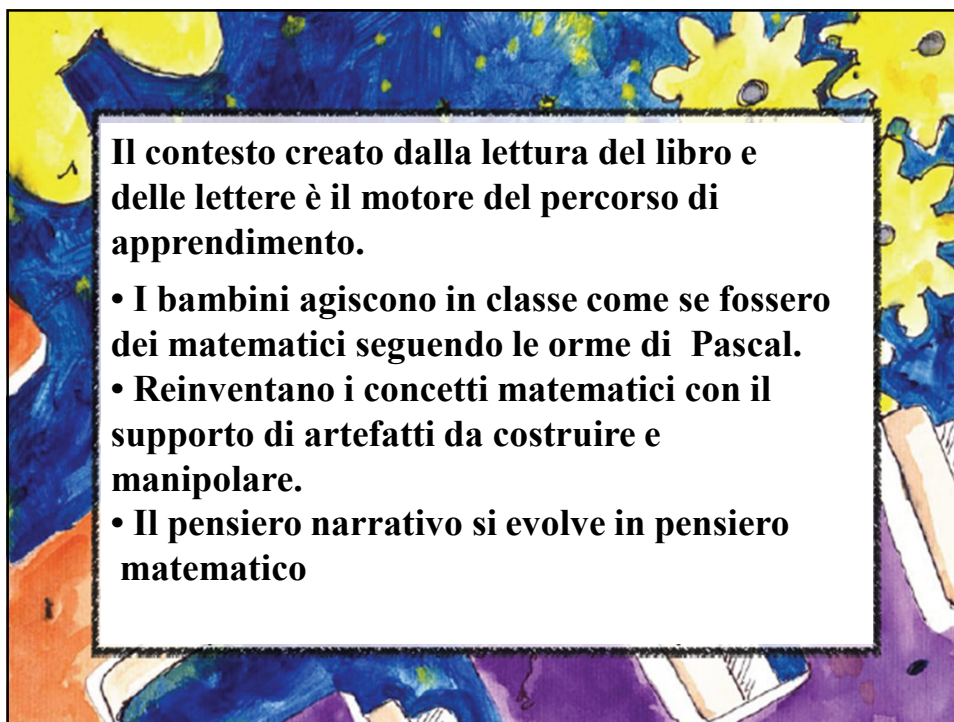
I BAMBINI CONDIVIDONO CON PASCAL UN'IDEA...



*“Tu sai anche che con il metodo della penna si è costantemente obbligati a riportare o prendere in prestito i numeri necessari, e sai quanti **errori si possono insinuare in tutti questi riporti e prestiti** a meno che non si abbia una lunga esperienza, e che non si faccia molta attenzione, cosa che affatica la mente in breve tempo. **La mia macchina libera colui che la utilizza da questo tormento** con un uso attento, essa supplisce alle mancanze della memoria, senza riporti né prestiti ed esegue da sola le operazioni che si desiderano, senza nemmeno doverci pensare”.*




“La macchina ci serve per non fare errori in operazioni che non abbiamo mai provato prima”



Il contesto creato dalla lettura del libro e delle lettere è il motore del percorso di apprendimento.

- **I bambini agiscono in classe come se fossero dei matematici seguendo le orme di Pascal.**
- **Reinventano i concetti matematici con il supporto di artefatti da costruire e manipolare.**
- **Il pensiero narrativo si evolve in pensiero matematico**

Risultati



In generale i risultati, monitorati e calibrati rispetto agli obiettivi generali e specifici, sono positivi in tutte le classi di sperimentazione. Si evince un consolidamento sia degli aspetti strutturali della matematica (scrittura posizionale, algoritmi di calcolo, pluralità di rappresentazioni...) sia di quelli culturali, storici, comunicativi e “umanistici” della disciplina.





**La storia della matematica in classe:
dalle materne alle superiori**
Il piacere di imparare - Il piacere di insegnare
Secondo Convegno Nazionale 14-16 Marzo 2013

Sistemi di numerazione e tecniche di calcolo presso i popoli antichi – Scheda



Prof.ssa Irene Ferrari Trecate
Torino - A.S. 2012-2013

CONTESTO

- Classe prima liceo scientifico opzione scienze applicate
- 22 studenti, di cui 2 DSA

CONTENUTI

Sistemi additivi e sistemi posizionali

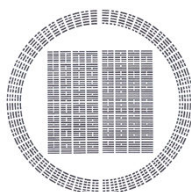
Sistema di numerazione e tecniche di calcolo

- nell'antico Egitto
- in Mesopotamia

I numeri romani

Gli esagrammi di Fo-hi

L'abaco



OBIETTIVI

Presentare i diversi sistemi di numerazione del mondo antico (babilonese, egizio, romano, binario di Fo-hi) e le varie tecniche di calcolo per:

- 1) Evidenziare i caratteri e le differenze fra sistemi additivi e sistemi posizionali**
- 2) Riflettere sul concetto di base di un sistema di numerazione e sul ruolo dello zero**
- 3) stimolare gli studenti a guardare alle civiltà del passato anche sotto l'aspetto del sapere scientifico.**

METODOLOGIA

- 6 lezioni dialogate con gli studenti, sviluppate con l'aiuto di slide
- Esercizi di applicazione da svolgersi in aula durante la lezione

DIFFICOLTÀ INCONTRATE DAL DOCENTE

- **Abituare gli studenti ad una lezione matematica dialogata**
- **Impostare un lavoro in collegamento con le lezioni di storia**
- **Abituare gli studenti a ragionare in maniera differente con sistemi e metodi di calcolo diversi da quelli a loro noti**

DIFFICOLTÀ INCONTRATE DAGLI STUDENTI

- **Slegarsi da schemi di calcolo noti e ormai «abitudinari»**
- **Comprendere e utilizzare la notazione polinomiale dei numeri**
- **Cogliere i concetti essenziali dei vari temi affrontati: spesso si concentrano su aspetti secondari**

RISULTATI OTTENUTI

Valutazioni conseguite:

5 studenti tra il 4 ed il 5

4 studenti tra il 5 ed il 6

8 studenti (di cui uno dei DSA) tra il 6 ed il 7

3 studenti (di cui uno dei DSA) tra il 7 e l'8

2 studenti tra l'8 ed il 9

I ragazzi hanno chiesto di proseguire il lavoro anche il prossimo anno, poiché lo ritengono molto interessante e utile



**La storia della matematica in classe:
dalle materne alle superiori**
Il piacere di imparare - Il piacere di insegnare
Secondo Convegno Nazionale 14-16 Marzo 2013

**Le equazioni di II grado:
come consolidare l'apprendimento dei
prodotti notevoli e costruire la formula
risolutiva**

Laura Gobetti

Ivrea, 15 marzo 2013
PLS 3 - Storia della matematica

- *Classe:* Il liceo scientifico (v. o.)
- *Periodo:* mese di gennaio (prima di iniziare le equazioni di II grado)
- *Metodologia:* lezione frontale, dialogo con gli studenti, esercizi per consolidare i metodi risolutivi presentati
- *Materiali:* libri di storia dell'algebra, fonti (vedi bibliografia), presentazione in PowerPoint
- *Ore di lezione:* 11

Il percorso

- calcolo "algebrico" in *Mesopotamia*,
- alcune proposizioni degli *"Elementi" di Euclide*, (lettura e analisi del testo euclideo)
- risoluzione delle equazioni di II grado nel *mondo islamico*
- traduzione e commento di alcuni brani del *"Liber Abaci"* di Leonardo Pisano.

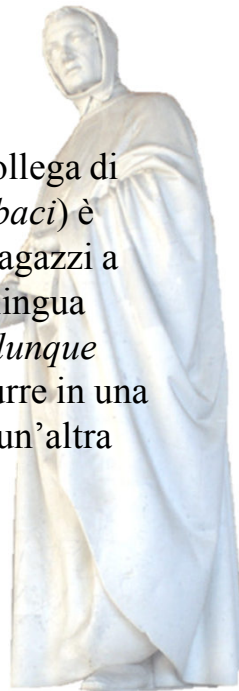
Riflessioni finali

La classe ha dimostrato subito un grande interesse per l'attività, catturata dai *nuovi* approcci ai *soliti* argomenti.

I temi affrontati sono stati occasione per:

- riflettere sulla nostra scrittura posizionale;
- divenire consapevoli della difficoltà dell'ampliamento del campo numerico
- ripassare i prodotti notevoli;
- ripassare parte della geometria euclidea del I anno;
- comprendere il significato della formula risolutiva dell'equazione di II grado e le connessioni con la geometria
- comprendere che il simbolismo attuale, per noi tanto scontato, è frutto di una lunga e faticosa evoluzione del pensiero umano.

Il **lavoro interdisciplinare** con la collega di latino (per la traduzione dal *Liber Abaci*) è stato molto positivo, ha stimolato i ragazzi a riflettere sia sull'importanza di una lingua come veicolo comunicativo *per qualunque contenuto* sia sulla difficoltà di tradurre in una lingua (latina) concetti importati da un'altra civiltà (araba).



Valutazione del test finale

- Voto 10 a 7 alunni
- $8 \leq \text{voto} < 10$ a 8 alunni
- $6 \leq \text{voto} < 8$ a 6 alunni
- $4 \leq \text{voto} < 6$ a 3 alunni (a fine anno non ammessi alla 3^a)

I migliori risultati di tutto l'anno scolastico!

