Algoritmi antichi e moderni

Paolo Zellini
Dipartimento di Matematica, Università di Roma "Tor Vergata"
zellini@mat.uniroma2.it

Roma, 29 Aprile 2013

Steve Smale, 1990: Scisma tra Calcolo scientifico e Informatica.

	Calcolo scientifico	Informatica
Matematica	Continuo	discreto
Problemi	classici	nuovi
Scopi	pratici, immediati	strategici
Fondamenti	nessuno	consolidati
Complessità	ignorata	studio avanzato
Macchina, modello	nessuno	Turing

L. Blum, F. Cucker, M. Shub, S. Smale, *Complexity and Real Computation*, Springer, 1998.

Hilbert, primo '900: Esiste un certo tipo di ragionamento evidente, presupposto in ogni ragionamento scientifico: le operazioni "finitiste" (*finitistic*) dell'aritmetica elementare.

H. H. Goldstine, John von Neumann, 1946: ≪ Our problems are usually given as continuous-variable analytical problems, frequently wholly or partly of an implicit character. For the purposes of digital computing they have to be replaced, or rather approximated, by purely *arithmetical*, (*finitistic*), explicit (usually *step-by-step* or *iterative*) procedures.≫

I metodi per realizzare l'obiettivo sono condizionati da ciò che è più o meno economicamente realizzabile con i mezzi disponibili. L'effettività delle tecniche computazionali è determinata da criteri di ordine pratico.

Analisi ⟶ Procedure aritmetiche

Alan Turing, $\simeq$ 1947: La tattica di ogni programmazione si basa sull'idea di un ciclo iterativo. Ad esempio:

$$u_i = u_{i-1} + u_{i-1}(1 - a u_{i-1}).$$

Il valore u_i approssima il reciproco del numero a. Cioè si simula la divisione con moltiplicazioni. Si esce dal ciclo non appena il residuo $|1 - a u_i|$ è sufficientemente piccolo. "È come un areoplano che gira intorno sopra un aerodromo e chiede il permesso di atterrare dopo ogni giro. Questa è un'idea molto semplice, ma della massima importanza."

Markov 1

Importanza della realizzazione concreta, nello spazio e nel tempo, di un processo computazionale. L'algoritmo è un ente "ibrido". L'indicizzazione di una variabile ($u \to u_i$) è il primo passo di questa realizzazione.

Dummett e altri: è concreto ciò che si può collocare nello spazio e nel tempo con un'operazione di puntamento.

Andrej A. Markov (Jr.), $\simeq$ 1954: $\ll$Le astrazioni sono indispensabili nella matematica; e tuttavia non dovrebbero essere perseguite per se stesse, né condurre a un punto da cui non c'è discesa sulla "terra". Dovremmo sempre pensare alla transizione dal pensiero astratto alla pratica come un momento necessario dell'apprendimento umano della realtà obiettiva$\gg$.

Borel

Paradosso di Richard: Esistono frasi della lingua con un numero finito di parole che denotano numeri reali. Si enumerano tutte le frasi in ordine lessicografico. Il numero corrispondente alla $n-$ma frase si chiama $n-$mo numero di Richard. La frase "il numero reale la cui $n-$ma cifra decimale è 1 se la $n-$ma cifra dell'$n-$mo numero di Richard è diversa da 1, ed è 2 se questa cifra è 1" definisce un numero di Richard r, diciamo il $k-$mo. Ma, per definizione, r differisce dal $k-$mo numero di Richard per la $k-$ma cifra. Contraddizione.

Émile Borel, $\simeq$ 1908: I paradossi della teoria degli insiemi si risolvono chiarendo cosa vuol dire "definire con un numero finito di parole". Il finito deve riassumersi in un processo che, sulla base di dati iniziali, abbia termine in un numero limitato di passi.

Esempio: numeri irrazionali algebrici approssimabili con metodi newtoniani (Newton-Raphson, *metodo delle secanti*, *regula falsi*).

Markov 2- definizione informale e formale

Andrej A. Markov (Jr.), *American Mathematical Society Translations*, 15:1-14 (1960): Occorre distinguere tre caratteristiche principali di un algoritmo

- Presenza di una prescrizione precisa, che non lasci spazio a scelte arbitrarie. L'algoritmo è determinato.
- Il processo ha inizio da un insieme di enti che possono variare entro limiti determinati. Applicabilità dell'algoritmo.
- Tendenza dell'algoritmo a procurare un certo risultato. Effettività dell'algoritmo.

Definizioni formali (equivalenti): Ricorsione, λ-calcolo, Macchina di Turing, simbolismo di Markov (tesi di Church).

Esempio: dato m, la funzione $f_m(n) = m + n$ si calcola per ogni n in base allo schema: $f_m(0) = m$, $f_m(n+1) = g(f_m(n))$, ove $g(n) = n + 1$. Ovvero $m + 0 = m$, $m + (n+1) = (m+n) + 1$.

Gli algoritmi antichi (Mesopotamia, Grecia, India, Cina) hanno spesso un carattere iterativo, anche se il meccanismo iterativo diviene esplicito solo verso la fine del XVII secolo.

- Algebra geometrica: Pitagorici, Euclide, soprattutto *Elementi*, II. Formule algebriche descritte in termini geometrici.
- Computazione geometrica: Pitagorici, Euclide, soprattutto *Elementi*, II, Mesopotamia, trattati indiani sulla costruzione di altari (*Śulvasūtra*, VII-II Sec. a.C.). Algoritmi numerici deducibili da costruzioni geometriche.
- Algoritmi babilonesi (1800-1600 a.C.). Knuth, *Comm. ACM*, 1972: "le procedure di calcolo babilonesi sono veri algoritmi" (metodi generali, non soluzioni di meri problemi specifici).

Occorre distinguere l'algebra dagli algoritmi. Una stessa espressione algebrica si può calcolare con diversi algoritmi, a cui corrispondono diversi risultati

Algoritmi vs. algebra

Esempio. una formula algebrica $z = x^2 - y^2$ e due algoritmi:

- Algoritmo 1: $z_1 = x \cdot x, \quad z_2 = y \cdot y, \quad z_3 = z_1 - z_2$
- Algoritmo 2: $z_1 = x + y, \quad z_2 = x - y, \quad z_3 = z_1 \cdot z_2$

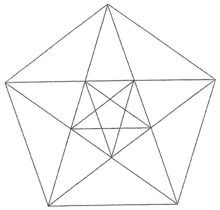
Se $x = .3145, \quad y = .3144$ e si opera in aritmetica di macchina con $t = 4$ cifre significative si trova

- Algoritmo 1:
  $z_1' = .9891 \cdot 10^{-1}, \quad z_2' = .9885 \cdot 10^{-1}, \quad z_3' = .6 \cdot 10^{-3}$
- Algoritmo 2:
  $z_1' = .6289, \quad z_2' = .1 \cdot 10^{-4}, \quad z_3' = .6289 \cdot 10^{-4} =$ valore esatto

Se $\oplus$ è la somma di macchina, a', b' = rappresentazioni in virgola mobile di a, b, si ha

$c = a \oplus b \approx (a' + b')(1 + \epsilon), \quad \epsilon_c \approx \epsilon + \frac{a}{a+b}\epsilon_a + \frac{b}{a+b}\epsilon_b$

$|\epsilon|, |\epsilon_a|, |\epsilon_b| < 10^{-4}/2$



Rapporto tra diagonale d e lato s di un pentagono regolare = antanairesis o anthyphairesis = processo effettivo di ripetute sottrazioni. Algoritmo euclideo. Aristotele (*Topica*, 158 b)

$$\frac{d}{s} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Becker (1933), Fowler, *The mathematics of Plato's Academy*, Oxford, 1987.
Hardy, Wright, *An introduction to the theory of numbers*, Oxford, 1938-1998.

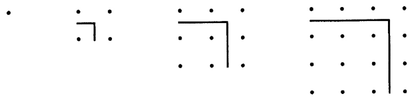
Philolaus

Filolao, V Secolo a.C., Diels-Kranz 44B11:

Il **numero**, $\ll$ mettendo in armonia nell'anima tutte le cose con la **percezione**, le rende conoscibili e le avvicina in un reciproco accordo secondo la natura dello **gnomone**, col dar corpo e col distinguere i **rapporti** delle cose, sia nell'infinito che nel finito.$\gg$

numero $\longleftrightarrow$ gnomon $\longleftrightarrow$ logos

Parole chiave: *numero*, *gnomon*, anima, percezione, *logos*, finito, infinito.



$$1 + 3 + 5 \ldots + (2n - 1) = n^2$$

Aristotele, *Fisica* 203a13-15

Numeri laterali e diagonali 1

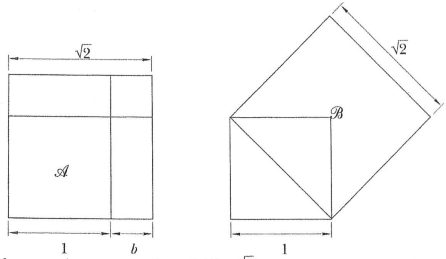
$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{1+\sqrt{2}}$ ove

$1 =$ congettura iniziale e $b = \frac{1}{1+\sqrt{2}} =$ incremento (gnomon)

$x_{i+1} = 1 + \frac{1}{1+x_i}$, $i = 0, 1, 2, \ldots$

$x_0 = 1 =$ spermatikos logos

Euclide,II, 10, Teone di Smirne (II Sec.), Giamblico (IV Sec.), Proclo (VI Sec.), Platone



b = correzione gnomonica = $1/(1+\sqrt{2})$

Numeri laterali e diagonali 2

$$x_i = \frac{d_i}{l_i} = \text{rapporti approssimanti } \sqrt{2}, \qquad d_i^2 = 2l_i^2 \pm 1 \text{ (Fermat)}$$

$$x_i = 1, \frac{3}{2}, \frac{7}{5}, \frac{17}{12}, \frac{41}{29}, \ldots$$

$$x_i^2 = \frac{d_i^2}{l_i^2} = 1, \frac{9}{4}, \frac{49}{25}, \frac{289}{144}, \ldots$$

Approssimazioni per eccesso e difetto: $x_i^2 = 2 \pm \frac{1}{l_i^2}$

Al crescere di l_i l'area della gnomone tende a 1:

$$\textit{gnomone} = \frac{l_i^2 \pm 1}{l_i^2} \longrightarrow 1$$

Idee associate all'algoritmo: gnomone, approssimazione, errore, incremento e diminuzione, medio, equilibrio, uguaglianza, limite

Formule della metafisica, dall'Antichità al Rinascimento. Esempi: Platone, Aristotele, Proclo, Bruno, Cusano.

Terminologia

- Logos, spermatikòs logos. Teologia e algoritmi. Giamblico (III Sec.): per Pitagora il numero è "estensione e attuazione dei princìpi seminali immanenti nell'unità"
- Logistikón, logistiké. Frequente nei *Dialoghi* di Platone. Aristotele attribuisce alla parte imperitura dell'anima una facoltà deliberativa simile al calcolo.
- Antanairesis = algoritmo euclideo. Ricorre nell'etica stoica. Somiglianza con *aufheben* (lat. tollere), termine chiave della dialettica hegeliana (Imre Thot).
- Taxis (ordine). *Taxis de pasa logos* (Aristotele).
- Pros ti, esprime l'idea di "relazione" (Euclide, *Elementi*, V). Idea di creazione in Tommaso d'Aquino.
- Mega kai mikron (grande e piccolo). Etica aristotelica. Termini chiave fino a Cusano.

terminologia 2

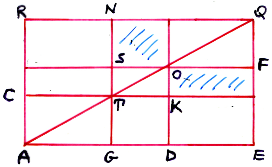
- Idea di reciprocità: pròs állela, mutue sottrazioni del processo iterativo per trovare la misura comune tra due grandezze (algoritmo euclideo)
- Distribuzione delle parti. Esempio: nel rapporto tra 8 e 12 il 2 sta quattro e sei volte, rispettivamente, in 8 e 12. Nemesis come distribuzione regolare delle parti: a ciascuno la parte che gli spetta (contrario della ybris).
- logos: ranghi, ripartizioni di poteri e privilegi. Eschilo (Prometeo)
- Apokatastasis (restituzione universale. Cfr. *At*, 3, 21). Leibniz. Definizione euclidea della sfera. Numeri apocatastatici (Nicomaco).

Moderato (I Sec.), Teone di Smirne (II Sec.), Stobeo, Proclo (V Sec.): numero = collezione di unità, una progressione (di rapporti) che inizia dall'unità e retrocessione che termina nell'unità

Georg Cantor (1845-1918): Per "Per insieme *finito* intendiamo un insieme M generato da un elemento originario assegnato mediante addizioni successive, in modo che all'inverso, con un percorso di *successivo allontanamento nell'ordine opposto*, si possa ritrovare l'elemento inizialmente assegnato".

Richard Dedekind (1831-1916): definizione di numero reale come *sezione* basata sulla definizione euclidea di rapporto (*Elementi*, V).

Equazione lineare $g(x) = ax - b = 0: \; x_* = \frac{b}{a} = x_2^{regula \; falsi}$



$$AG = x_0, \quad AD = x_*, \quad AE = x_1,$$
$$GT = ax_0, \quad DO = b, \quad EQ = ax_1$$

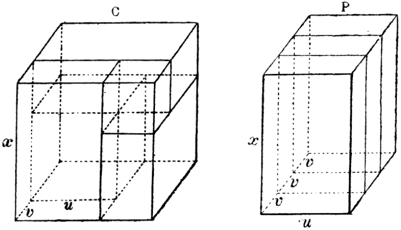
1^o *Errore* =DO - GT $=$ TS $=$ b - ax$_0$ $= -g(x_0)$
2^o *Errore* =EQ - DO $=$ FQ $=$ ax$_1$ $- b = g(x_1)$

Euclide, I, 43 (Teorema dello Gnomone)

$$\Rightarrow \frac{FC + RS}{TS + FQ} = \frac{RK}{TS + FQ} = x_*$$

but: $$\frac{FC + RS}{TS + FQ} = \frac{(b - ax_0)x_1 + (ax_1 - b)x_0}{(b - ax_0) + (ax_1 - b)} = \frac{g(x_1)x_0 - g(x_0)x_1}{g(x_1) - g(x_0)}$$

Equazione non lineare $g(x) = 0$: $x_2^{regula \; falsi} \approx x_* : g(x_*) = 0$

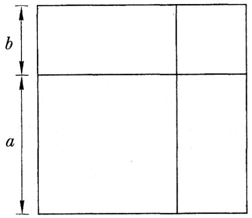


equazione cubica $x^3 = px + q$ Cardano: $p = 15, q = 4$

- px = parallepipedo P diviso in 3 parallepipedi uguali che formano uno gnomonoide attorno al cubo u^3, $3v \cdot u = p$. Sia $u + v = x$.
- si sottrae lo gnomonoide dal cubo $C = x^3$ e si ottiene la somma $u^3 + v^3 = q$.

  $v = p/3u, \qquad (u^3)^2 - qu^3 + p^3/27 = 0$

$$u = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}} \text{ e } v = \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}}, \qquad x = u + v$$



Euclide, II, 4 $\quad (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$b = h$

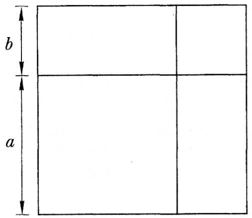
$f(x) := x^2 - n = 0 \qquad x \longrightarrow a + h$

$$(a+h)^2 = a^2 + 2ah + h^2 = n \Longrightarrow h \simeq \frac{n - a^2}{2a}$$

Teone di Alessandria (IV Sec.), Matematica mesopotamica (1800 - 1600 a.C.), *Śulvasūtra*, (VII - II Sec. a.C.), *Nove capitoli sull'arte matematica* (*Jiuzhangang Suanshu*), Viète, Newton, Raphson.

Implicazioni: idea di incremento, approssimazione, metodi iterativi, residuo, errore, linearizzazione. Serie di Taylor.

Incremento gnomonico



$a = x_i, \quad b \approx \frac{n - x_i^2}{2x_i}, \quad (a+b)^2 = n, \quad$ calcolo di $\sqrt{n}$

Problema generale: $f(x) = 0$

Schema iterativo: $x_{i+1} = g(x_i), \quad i = 0, 1, 2, \ldots, \quad x_0$ assegnato

Schema di Newton (Raphson): $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$

Incremento di Newton: $-\frac{f(x_i)}{f'(x_i)} = -\frac{x_i^2 - n}{2x_i}$ se $f(x) = x^2 - n$

Per x_0 abbastanza vicino alla radice α il metodo converge ad α in modo quadratico: $|x_{i+1} - \alpha| < c|x_i - \alpha|^2$

Algoritmi come extensioni algebriche di costruzioni geometriche

- Calcolo di $\sqrt{n}$: $x_{i+1} = x_i - \frac{x_i^2 - n}{2x_i}, i = 0, 1, 2, \ldots$
- Equazione $f(x) = 0$: $x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}, i = 0, 1, 2, \ldots$
- metodo delle secanti: $x_{i+1} = x_i - a_i^{-1} f(x_i), i = 0, 1, 2, \ldots$, ove $a_i = (f(x_i) - f(x_{i-1}))/(x_i - x_{i-1})$ = approssimazione di $f'(x_i)$
- Sistemi of equazioni $F(x) = 0$: $x_{i+1} = x_i - J(x_i)^{-1} F(x_i), i = 0, 1, 2, \ldots$, ove J = Matrice Iacobiana

Algoritmi come extensioni algebriche di costruzioni geometriche
$\mathbf{x} = [x_1, x_2, \ldots, x_n]^T$

- Minimo di $f(\mathbf{x})$: $\mathrm{x}_{i+1} = \mathbf{x}_i - H(\mathbf{x}_i)^{-1} \bigtriangledown (f(\mathbf{x}_i)), i = 0, 1, 2, \ldots,$ ove H = Hessiano

- Metodi Quasi-Newton:
  $\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{x}_i - B_i^{-1} \bigtriangledown (f(\mathbf{x}_i)), i = 0, 1, 2, \ldots,$ ove $B_i =$ approssimazione di $H(\mathbf{x}_i)$.

$H(\mathbf{x}_i)$ e B_i sono matrici di n righe e n colonne

Lo schema di calcolo deriva dalla costruzione dello gnomone quadrato.

Immanuel Kant, *Critica della ragione pura*, Parte I, Libro II, Cap. I: "A fondamento dei nostri concetti sensibili puri stanno non già immagini degli oggetti, bensí schemi. [...] Lo schema del triangolo non può mai esistere altrove se non nel pensiero, e indica una regola della sintesi della capacità di immaginazione, riguardo a figure pure nello spazio. [...] Questo schematismo del nostro intelletto è un'arte nascosta nelle profondità dell'anima umana: difficilmente impareremo mai le vere scaltrezze di quest'arte, in modo da poterle presentare senza veli."

Nell'ultimo secolo: Brouwer, matematica intuizionista. Matematica computazionale e calcolo scientifico dalla metà del '900 a oggi.

Effettività

Alonzo Church (1936-1937): Turing's machines have "the advantage of making the identification with effectiveness in the ordinary (not explicitly defined) sense evident immediatly."
"To define effectiveness as computability by an arbitrary machine, subject to restriction of finiteness, would seem an adequate representation of the ordinary notion."

Stephen Kleene (Tesi di Church) (1943, 1952): "Every effectively calculable function is general recursive."

H. Rogers (1967): Nella teoria classica delle funzioni ricorsive si pongono "questioni di esistenza e di non esistenza di metodi computazionali, piuttosto che questioni di efficienza o di valida progettazione." Tali questioni intervengono "in teorie più complesse basate su concetti più ristretti della ricorsione."

Efficienza. Metodo di Cramer

G. Cramer (1750): per risolvere un sistema di equazioni lineari $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, ove A (la matrice dei coefficienti) ha n righe e n colonne, $\mathbf{x}$ e $\mathbf{b}$ sono vettori di n componenti, si usa la formula

$$x_j = \det(A_j)/\det(A), \quad \det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{1j} \det(A_{1j})$$

A_j si ottiene da A sostituendo la colonna j con $\mathbf{b}$
A_{1j} = matrice $(n-1) \times (n-1)$ ottenuta da A eliminando la prima riga e la colonna j

Forsythe, 1953: l'algoritmo usa almeno $n!$ moltiplicazioni. Se $n = 28$ un calcolatore che esegua 2600 moltiplicazioni al secondo impiegherebbe 10^{17} anni.

Metodo effettivo, basato su formule ricorsive, ma non efficiente

Efficienza. Sistemi lineari

Sistemi di equazioni lineari: Complessità computazionale

- Metodo di Cramer: $O(n!)$ operazioni aritmetiche
- Metodo di Gauss: $O(n^3)$ operazioni aritmetiche
- Metodo di Strassen (Il metodo di Gauss non è ottimo, 1969): $O(n^\alpha)$ operazioni aritmetiche, $\alpha = \log_2 7 < 3$
- Metodo più recente (2011): $\alpha = 2.3727$

Scienza del calcolo

Natura → *modelli* → *problemi aritmetici* → *algoritmi*

- Dimensione elevata dei problemi.
- Calcolo automatico in aritmetica approssimata (numeri rappresentati in virgola mobile) con risorse finite di tempo e di spazio. Il calcolo effettivo rinuncia al sistema dei numeri *reali* e si basa su un insieme finito di numeri finiti.
- Richiesta di efficienza computazionale: controllo della complessità.
- Sensibilità a errori sui dati e sulle operazioni: condizionamento dei problemi e stabilità degli algoritmi
- Calcolo inaccessibile (*hidden computation*): i risultati intermedi del calcolo automatico sono celati nella memoria del calcolatore. Milioni di numeri provengono da sottoprogrammi e da calcoli elementari e sono immediatamente utilizzazti in calcoli successivi.

Problema: n equazioni lineari in n incognite $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, ove $A =$ matrice di n righe e n colonne. Soluzione: $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$, ove $A^{-1} =$ inversa di A: $AA^{-1} = I$

J. von Neumann, H. Goldstine, 1947: Se A è simmetrica e definita positiva, effettivamente invertibile (ha autovalori positivi sufficientemente lontani da 0), l'inversa di A (calcolata con il metodo di Gauss) è $X \neq A^{-1}$ e quindi $XA \neq I$. Ma si ha

errore = "distanza" tra AX e $I \leq 14.24\frac{\lambda}{\mu}n^2B^{-t}$

B = base della numerazione, λ, μ sono l'autovalore massimo e minimo rispettivamente e t è il numero di cifre significative.

$\frac{\lambda}{\mu}$ = numero di condizionamento, sensibilità rispetto all'errore sui dati. Turing, 1948.

Matrici

Gilbert Strang, 1994: “Per gli ingegneri e i ricercatori nelle scienze fisiche e sociali l’algebra lineare occupa ora uno spazio che è spesso più importante del ‘calcolo’. La mia generazione di studenti e certo i miei maestri, non si accorsero del sopraggiungere di questa novità. Si tratta in parte del passaggio dall’analogico al digitale; le funzioni sono sostituite da vettori. Nell’algebra lineare si combinano l’analisi degli spazi n-dimensionali con le applicazioni di matrici.”

N.B. Ogni (!?) problema computazionale si riconduce alla risoluzione di un sistema di equazioni lineari, e quindi a problemi di calcolo matriciale.

Bordering technique 1

Matrici di Toeplitz. Applicazioni alla risoluzione numerica di equazioni integrali (Fredholm), alla predizione e filtraggio di segnali (Wiener, Levinson):

$$T = \begin{bmatrix} z_0 & z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \\ z_1 & z_0 & z_1 & z_2 & z_3 \\ z_2 & z_1 & z_0 & z_1 & z_2 \\ z_3 & z_2 & z_1 & z_0 & z_1 \\ z_4 & z_3 & z_2 & z_1 & z_0 \end{bmatrix}$$

Forma (*pattern*) della matrice conforme all'immagine dello gnomone quadrato. Fatto ovvio: ogni elemento di T si ottiene dalla prima riga. Fatto meno ovvio: ogni elemento della matrice inversa T^{-1} si ottiene dalla sua prima riga.

Bordering technique 2

$$A = A_n = \begin{bmatrix} A_{n-1} & \mathbf{u} \\ \mathbf{v}^T & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & a & a & a & a \\ a & a & a & a & a \\ a & a & a & a & a \\ a & a & a & a & a \\ a & a & a & a & b \end{bmatrix}$$

- Ragionamento per induzione
- Ricorsione
- Iterazione
- Applicazioni: decomposizione $A = LU$, costruzione di A^{-1}

$$A_n^{-1} = \begin{bmatrix} A_{n-1}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & 0 \end{bmatrix} + c \cdot \begin{bmatrix} A_{n-1}^{-1}\mathbf{u} \\ -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}^T A_{n-1}^{-1} & -1 \end{bmatrix}$$

$$c = \text{costante} = (b - \mathbf{v}^T A_{n-1}^{-1}\mathbf{u})^{-1}, \quad A_1 = [a], \quad A_1^{-1} = [1/a]$$

Matrici-Gnomone. Immagini

- Ruolo delle immagini. Rapporto tra logica e psicologia (fine '800, primo '900).
- Taine (Sec. XIX): In tutte le operazioni mentali per mezzo "di nomi astratti, giudizi, ragionamenti, astrazioni, generalizzazioni, combinazioni di idee, ci sono immagini più o meno nascoste o più o meno nitide."
- carattere costruttivo della figura (*schema*). Gnomone.
- effetto fuorviante dell'immagine. Immagine come mero supporto intuitivo. Reichenbach: i teoremi geometrici di Euclide dipendono dalla logica delle dimostrazioni e non dalla costruzione delle figure.
- Frege: distingue tra rappresentazione psichica soggettiva (*Vorstellung*) e ritratto fedele (*Abbild*) del pensiero puro (come i simboli del linguaggio ideografico).
- Fourier: importanza, in qualche caso necessità delle immagini.

Bibliografia essenziale

1. M. Arbib, *Brains, Machines, and Mathematics*, Springer, New York, 1987.

2. A. Bürk, Das Āpastamba-Śulba-Sūtra, *Zeitschrift der Deutschen Morgenländischen Gesellschaft*, 55:543-591 (1901); 56:327-391 (1902).

3. Jean-Luc Chabert et al., *A history of algorithms, From pebble to the microchip*, Springer, Berlin, 1999.

4. D.H. Fowler, *The mathematics of Plato'Academy. A new reconstruction*, Clarendon Press, Oxford, 1987.

5. T. Heath, *A history of Greek mathematics*, two volumes, Dover, New York, 1981.

6. S. Kangshen e al., *The nine chapters on the mathematical art*, Oxford University Press, 1999.

Bibliografia essenziale

7. J. Klein, *Greek mathematical thought and the origin of algebra*, Dover, New York, 1992.

8. D.E. Knuth, *The art of computer programming*, vol. 2, *Seminumerical algorithms*,Addison Wesley, Reading, Ma, 1969.

9. László Lovász, *Algorithmic aspects of some notions in classical mathematics*, in *Mathematics and Computer Science* (ed. by J.W. de Bakker, M. Hazewinkel, J.K. Lenstra), pp. 51-63, North Holland, Amsterdam, 1986.

10. I. Thomas, *Greek mathematics*, two volumes, W. Heinemann, London e Harvard University Press, Cambridge, Ma, 1967.

11. P. Zellini, *Gnomon. Un'indagine sul numero*, Adelphi, Milano, 1999.