Sulla didattica dell'analisi: processi discreti e il concetto di limite

Alessio Porretta
Universita' di Roma Tor Vergata

Quale metodo?

- Quando introduco un concetto ho bisogno di una motivazione
  - voglio far sentire la necessita' di una domanda: deve spingerci insieme alla ricerca di una risposta
- voglio far sentire che stiamo facendo un percorso.

  In questo percorso:
  -ci sono dei fenomeni che voglio far osservare (rafforzano il senso delle mie domande). Devo scegliere con cura i miei esempi.

  Ci sono dei principi che voglio far comprendere. Devo scegliere con cura i miei enunciati.
- Voglio che i ragazzi sappiano fare alcune cose. In particolare, ci sono degli esercizi da fare.

Il concetto di limite

...Potrei dire a quell'attimo: fermati, dunque, sei cosi' bello!
(Faust, Goethe)

Il concetto di limite riguarda soprattutto il nostro stare nel tempo:

Motivazioni geometriche: pb. delle tangenti, pb. del calcolo dell'area ? secondari...

La domanda più naturale del mondo è: cosa accadrà ?
Cosa succederà tra molto tempo ? (o anche solo...a un certo punto ?)
e la domanda seguente spesso è: quanto dovrò aspettare per vederlo?

Uno dei modi migliori per presentare il concetto di limite è attraverso processi discreti (e in particolare modelli evolutivi a passi iterati)

Il paradosso di Zenone

In Grecia segnali di ripresa: Lo Stato non raggiungerà mai la bancarotta ha dichiarato Zenone. (www.spinoza.it)

Il paradosso di Zenone consiste nell'affermazione che Achille non possa raggiungere la tartaruga, se a questa è stato concesso un vantaggio iniziale. Infatti, cosı ragionava Zenone, in un primo tempo Achille colmerà il distacco iniziale raggiungendo il punto di partenza della tartaruga; tuttavia nello stesso tempo la tartaruga si sarà pur mossa, e avrà ora un nuovo, anche se piccolo, vantaggio. In un secondo tempo Achille colmerà il nuovo distacco, ma ancora la tartaruga sarà andata un poco avanti. Cosi' procedendo, non ci sarà mai un momento in cui Achille raggiunge la tartaruga.
Pb: Come posso capire un fenomeno che si ripete un numero infinito di passi?

Processi discreti

La prima cosa importante è capire che possiamo trovarci di fronte a leggi esplicite e leggi implicite.

Leggi esplicite: $a_n = f(n)$

Leggi implicite: $a_n = f(a_{n-1})$

Esempi:

1. Leggi esplicite sono le tabelle con cui gli studenti tipicamente costruiscono i grafici: $n|f(n)$

- $a_n = n^2$

-$a_n = \frac{1}{n}$

-$a_n = \sin(\frac{n\pi}{2})$

ma anche $a_n = (-1)^n$ è una legge esplicita (es. un interruttore di tipo binario on/off).

oss: capire cosa accade quando $n \to \infty$ ci aiuterà a disegnare il grafico in modo appropriato e a stabilire posizioni reciproche di alcuni grafici (confronto di ordini di grandezza : perché il grafico di $y = 2^x$ deve superare quello di $y = x + 2$?)

2. Leggi implicite sono esempi di fenomeni naturali:

-Una popolazione di batteri si riproduce ogni ora con un tasso di incremento del 20% .
$a_n = a_{n-1} + \frac{20}{100} a_{n-1}$.
Molti fenomeni di crescita di popolazioni vengono descritti da una legge di questo tipo

$$a_n = (1 + r)a_{n-1}$$

dove r è il tasso di crescita (es. una percentuale di incremento o decremento).

Un modello più realistico è dato dal caso in cui il tasso di crescita dipende dalla popolazione stessa (modello di Verhulst):

$$a_n = a_{n-1} + r(1 - \frac{a_{n-1}}{K})a_{n-1}$$

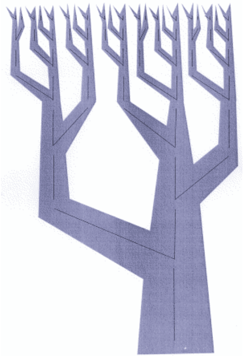
qual è il senso di questo modello ? Il tasso decresce con l'aumento della popolazione (supp. $r > 0$), il tasso diventa negativo appena si supera un valore limite di tolleranza $a_n = K$.
Es: se siamo in troppi, il cibo scarseggia...
Oss: il modello di Verhulst nel continuo: $y'(t) = r\, y\, (1 - \frac{y}{K})$

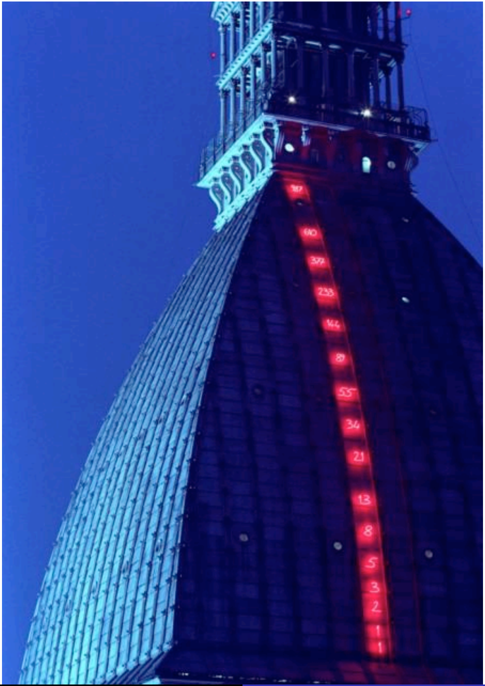
-Un altro esempio famoso di meccanismo di crescita: la successione di Fibonacci

$$\begin{cases} a_n = a_{n-1} + a_{n-2}\,, \\ a_0 = a_1 = 1 \end{cases} .$$

Si tratta di una crescita esponenziale ? quale è la sua base ? Vado a guardare

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} \longrightarrow ?$$




610
377
233
144
89
55
34
21
13
8
5
3
2
1
1

-Leggi implicite sono anche algoritmi di calcolo.

$$a_n = \frac{1}{2}\left(a_{n-1} + \frac{2}{a_{n-1}}\right) \qquad \text{algoritmo di Erone per il calcolo di } \sqrt{2}$$

Tipico esempio di cattiva didattica: le leggi implicite sono troppo difficili per gli esercizi, le lascio da parte.
Ma: le leggi implicite sono le più naturali nei modelli ! sono la vera ragione che ci spinge a chiederci: come posso capire se un qualcosa ha limite ?

Riassunto.

- Il paradosso di Zenone è la mia intro: annuncio che per chiarire il paradosso, e per gestire l'infinito, dovremo introdurre il concetto di limite.

- Attraverso gli esempi che ho fatto, voglio mettere gli studenti di fronte a diversi fenomeni: esistono sequenze oscillanti e altre monotòne, esistono sequenze limitate e illimitate. Esistono algoritmi di cui non capisco dove vanno a parare (mi sarà utile fare dei calcoli espliciti sugli esempi di prima...)
Si determina la necessità per un chiarimento: cosa intendo per *limite*?

Ora posso cominciare a mettere dei punti fermi nel mio percorso:

- precisare il concetto di limite è un meraviglioso esercizio di linguaggio: dare forma rigorosa a una idea intuitiva.

  Mi interessa sottolineare:

  -quella che definisco è soprattutto una proprietà delle mie sequenze: il fatto che forniscano per approssimazione un valore numerico.

  Attraverso gli esempi cattivi: $a_n = (-1)^n$, $a_n = \sin(n\frac{\pi}{2})$, metto in risalto questo carattere: si chiede che da un certo punto in poi i termini siano tutti vicini a un dato valore.

  Voglio convincere gli studenti di due principi cruciali:

  -il limite è unico.

  -una successione ha limite se e solo se tutte le sue possibili sottosuccessioni hanno lo stesso limite.

La mia intuizione mi convince: meglio distinguere processi monotoni dagli altri. Una successione monotona da qualche parte deve andare...

- Ecco l'ultimo principio che ora mi interessa seminare:
  -successioni monotone e limitate sono convergenti.

La monotonia è il criterio più semplice che userò per stabilire l'esistenza del limite.

Es. modello: interesse composto e il numero e.

Ogni anno mi viene concesso un tasso t: il mio capitale C in un anno si rivaluta diventando $C + tC$.
Pb: Se il tasso di interesse viene diluito lungo tutto l'anno invece che pagato alla fine, sarà meglio o peggio ?
Es: se ogni mese mi viene concesso un tasso $\frac{t}{12}$? Alla fine dell'anno avrò un capitale $C(1+\frac{t}{12})^{12}$
- Frazioniamo l'interesse in n rate di tasso $\frac{t}{n}$....alla fine avrò

$$a_n = C\left(1+\frac{t}{n}\right)^n \quad \to ?$$

Qui la monotonia addirittura mi permette di definire il numero e.

Vorrei insistere su un aspetto: l'importanza dello studio del rapporto

$$\frac{a_n}{a_{n-1}}$$

1. Mi offre lo spunto per parlare di crescita esponenziale: cosa è e come faccio a riconoscerla?

Una crescita esponenziale è qualcosa che spesso si osserva: $a_n \simeq K a_{n-1}$.

Il caso modello è calcolabile:

$$a_n = K a_{n-1} \Leftrightarrow a_n = a_0 K^n$$

(crescita o decadimento a seconda che $K > 1$ o $K < 1$).

In particolare, ricordo un criterio semplice e fondamentale:

$$\text{se } \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n-1}} = r < 1, \text{ allora } a_n \to 0.$$

2. Mi permette di apprezzare lo scarto tra progressione aritmetica e geometrica, e in particolare è il modo più semplice di confrontare esponenziali e polinomi:

$$a_n = \frac{n}{A^n} \Rightarrow \frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{n}{n-1}\frac{1}{A} \to \frac{1}{A}$$

Se $A > 1$ deduco dal criterio di prima che $a_n \to 0$.

oss: ora posso confrontare all'infinito i due grafici $y = A^x$ e $y = x$ (oppure altri polinomi), e per simmetria anche il grafico logaritmico.

Prendo quindi coscienza degli ordini di infinito $\Rightarrow$ esercizi !!

Spesso ci si trova di fronte alla domanda: questa crescita è esponenziale, e se si' quale è la sua base?

Es. dal mondo reale: abbiamo solo un ammasso di dati...
la tipica risposta empirica delle scienze applicate consiste nel riportare i dati in scala logaritmica.

Se $b_n = \log a_n$, mi aspetto che i dati si distribuiscano lungo una retta. Il coefficiente angolare mi permette di risalire alla base esponenziale:

$$\text{se } a_n \sim A^n, \text{ allora } b_n \sim n \log A.$$

Es. dal mondo ideale: conosciamo la legge ricorsiva...
per es. nella successione di Fibonacci

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}\,, \qquad a_0 = a_1 = 1.$$

se chiamo $b_n = \frac{a_n}{a_{n-1}}$, ottengo una nuova successione ricorsiva:

$$b_n = 1 + \frac{1}{b_{n-1}}$$

Pb: b_n ammette limite ?

Torniamo al paradosso di Zenone: cosa succede veramente ? siamo stati presi in giro ?
Zenone ci dice: dopo un primo tempo, Achille avrà colmato il distacco dalla tartaruga, ma questa avrà avanzato un poco.
Sia d il distacco iniziale. Sia la velocità della tartaruga una frazione di quella di Achille: $v_T = r\, v_A$. Allora il primo tempo sarà

$$t_1 = \frac{d}{v_A}$$

e il nuovo distacco $d_1 = v_T\, t_1 = \frac{v_T}{v_A} d = r\, d$.
Ora, ci sarà da colmare un nuovo distacco in un nuovo tempo:

$$t_2 = \frac{d_1}{v_A}\,, \qquad d_2 = v_T\, t_2 = \left(\frac{v_T}{v_A}\right)^2 d = r^2 d$$

Procedendo, dopo t_n momenti successivi lo scarto tra Achille e la tartaruga è dunque uguale a $r^n\, d$ ed essendo $r < 1$ tende a zero quando $n \to +\infty$.

Vuol dire questo che Achille raggiunge la tartaruga dopo un tempo infinito? Eh no, perché il tempo totale è

$$\tau = \sum_{n=1}^{\infty} t_n = \frac{1}{v_A} \sum_{n=0}^{\infty} d\, r^n = \frac{d}{v_A} \sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{d}{v_A} \frac{1}{1-r}$$

che naturalmente è il tempo in cui le traiettorie si incontrano: $V_A \tau = d + v_T \tau$.

Per calcolare la serie di Zenone usiamo il solito trucco di confrontare a_n e a_{n-1}: se $a_n = \sum_{k=0}^{n} r^k$, allora

$$a_n = 1 + r \sum_{k=1}^{n} r^{k-1} = 1 + r a_{n-1}$$

ma sappiamo anche che $a_n = a_{n-1} + r^n$, quindi

$$1 + r a_{n-1} = a_{n-1} + r^n \Rightarrow a_{n-1} = \frac{1-r^n}{1-r} \to \frac{1}{1-r}.$$

Alla base del paradosso di Zenone c'è la possibilità che la somma di infiniti numeri possa dare un numero finito: la convergenza di una serie !

$$a_n = c_0 + c_1 + \ldots + c_n = \sum_{k=0}^{n} c_k \, .$$

-Ora che sappiamo l'importanza della monotonia, capiremo che le serie a termini positivi sono speciali.
Anche se sarà difficile intuire se queste due sequenze convergono:
-$\{5, 8, 11, 13, 14, ...\}$
-$\{25, 36, 42, 46, 48, ...\}$

- E dopo l'esperienza di Fibonacci, forse sapremo affrontare l'idea di Leibniz per la convergenza della serie:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \ldots\ldots$$

Lo studio delle successioni ricorsive fa capire il senso delle domande e apre orizzonti vastissimi. Una successione definita per ricorrenza

$$\begin{cases} a_n = f(a_{n-1}) \\ a_0 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

è un caso particolare di iterazioni successive della stessa legge:
$a_n = f(a_{n-1}) = f(f(a_{n-2})) = ...f(f(f...f(a_0)))$.
I problemi principali, come visto attraverso la successione di Fibonacci, sono:
(a) capire se l'algoritmo è convergente
(b) determinare l'eventuale limite.

Per rispondere alla prima questione, ci occorre un criterio che garantisca la convergenza. La seconda domanda apre nuove questioni...in entrambi i casi, sarà importante guardare il grafico di $f(x)$

- Se a_n ammette limite x, allora $x = f(x)$.

Es (Fibonacci): $b_n = 1 + \frac{1}{b_{n-1}}$. Se sapessi già che b_n ha limite x, mi aspetto che

$$x = 1 + \frac{1}{x}$$

ovvero $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Analogo per l'algoritmo di Erone: $a_n = \frac{1}{2}\left(a_{n-1} + \frac{2}{a_{n-1}}\right)$, al limite $x = \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{x})$ da cui $x^2 = 2$.

I possibili limiti di una successione ricorsiva $a_n = f(a_{n-1})$ sono quindi soluzione dell'equazione

$$x = f(x)$$

Quelli che si chiamano punti fissi. Nell'ottica del sistema dinamico iterativo $a_0 \longrightarrow a_1 \ldots \longrightarrow a_n$ sono i punti di quiete: la successione resta costante.

Argomenti correlati:
- continuità
- esistenza di punti fissi (contrazioni, etc...)
- stabilità di un sistema: attrattori, orbite periodiche, etc...

Quali argomenti usare per capire se il limite esiste?....

L'argomento principe è ancora la monotonia. Qui ci accorgiamo del legame tra il grafico della legge $f(x)$ e l'andamento dell'iterazione

$$a_n = f(a_{n-1})$$

$$\text{se } f \text{ è crescente, } \Rightarrow a_n \text{ è monotòna: } \begin{cases} a_1 \geq a_0 \Rightarrow a_n \text{ cresce} \\ a_1 \leq a_0 \Rightarrow a_n \text{ decresce} \end{cases}$$

Se f è decrescente, vengono generate delle oscillazioni. Questo vuol dire che la successione necessariamente non converge ?

Es: $a_n = -\frac{1}{2}\, a_{n-1}$....si ottiene $a_n = (-\frac{1}{2})^n$ converge oscillando.

In effetti, lo stesso accadeva con il rapporto di Fibonacci:

$$b_n = 1 + \frac{1}{b_{n-1}} \quad \rightarrow f(x) = 1 + \frac{1}{x}$$

Per valori positivi, f è decrescente. Ma allora $f(f(x))$ è crescente ! E determina la ricorrenza delle sottosuccessioni dei pari e dei dispari...

Es:

$$\begin{cases} a_n = 2a_{n-1}(1 - a_{n-1}) \\ a_0 \in (0,1) \end{cases}$$

Ci sono due possibili punti limite: $x = 0$ e $x = \frac{1}{2}$.
La funzione $2x(1-x)$ è crescente solo in $(0, \frac{1}{2})$; tuttavia $2x(1-x) \leq \frac{1}{2}$, quindi $a_n \leq \frac{1}{2}$ per ogni n. Quindi,

- $a_n \leq \frac{1}{2}$
- se $a_0 < \frac{1}{2}$, allora $f(a_0) \geq a_0$, quindi $a_1 \geq a_0$ e $a_n \uparrow \frac{1}{2}$.

-se $a_0 > \frac{1}{2}$, allora $a_1 < \frac{1}{2}$ e si torna al caso precedente: $a_n \uparrow \frac{1}{2}$.

Il valore $x = \frac{1}{2}$ è attrattivo e $x = 0$ è repulsivo.

Potevamo saperlo da prima ?...

Nota: $a_n = f(a_{n-1})$. Se $\bar{x}$ è un punto fisso, allora

$$a_n - \bar{x} = f(a_{n-1}) - f(\bar{x}) \simeq f'(\bar{x})(a_{n-1} - \bar{x})$$

ovvero assomiglia a

$$b_n = f'(\bar{x})b_{n-1} \Rightarrow \begin{cases} |f'(\bar{x})| < 1 & \text{stabile - converge} \\ |f'(\bar{x})| > 1 & \text{instabile} \end{cases}$$

Oss: abbiamo usato un principio di *linearizzazione* !...

L'esempio precedente è un caso particolare della mappa logistica (R. May, Nature 1976):

$$\begin{cases} a_n = \gamma\, a_{n-1}(1 - a_{n-1}) \\ a_0 \in (0,1) \end{cases}$$

Questa mappa è ottenuta per riscalamento dal modello di evoluzione di popolazioni: $a_n = a_{n-1} + r(1 - \frac{a_{n-1}}{K})a_{n-1}$.

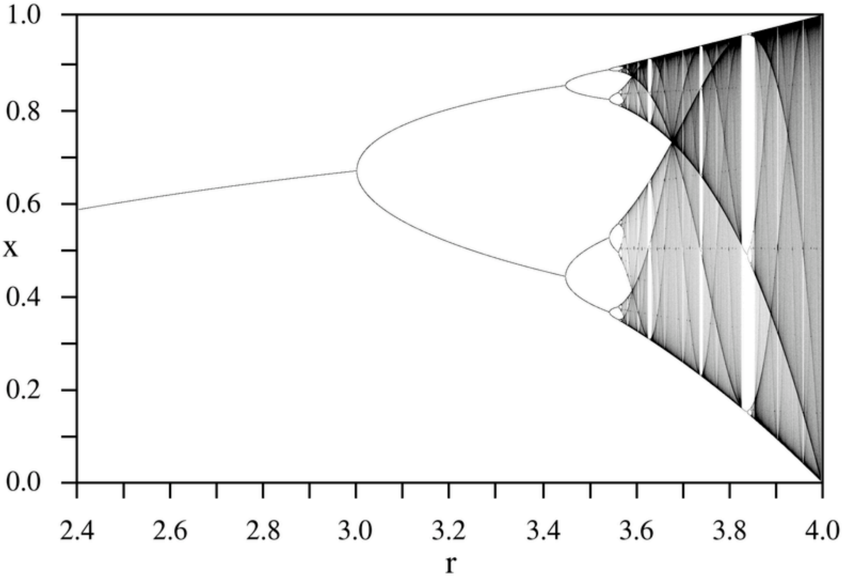
Questa mappa è estremamente sensibile al valore di r:

-se $\gamma \in [1,2]$, allora $a_n \to 1 - \frac{1}{\gamma}$ in modo crescente

-se $\gamma \in [2,3)$, allora $a_n \to 1 - \frac{1}{\gamma}$ in modo non monotòno

-se $\gamma \in [3, \mu_\infty)$, allora a_n non ha limite, ma ammette orbite periodiche; in particolare esiste una successione di valori $\mu_k \to \mu_\infty$ per cui quando $\gamma \in (\mu_k, \mu_{k+1})$ ci sono 2^k punti di accumulazione e la dinamica oscilla tra questi punti (in modo indipendente dalle condizioni iniziali).

-se $\gamma \in (\mu_\infty, 4)$, la dinamica è caotica, ammette un insieme (frattale) di punti di equilibrio e dipende dalle condizioni iniziali.


1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
x
2.4
2.6
2.8
3.0
3.2
3.4
3.6
3.8
4.0
r

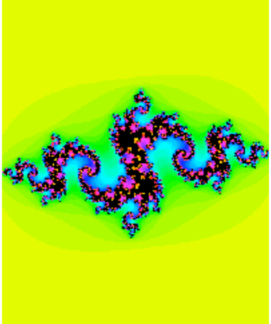
Esempi più classici di sistemi caotici che generano insiemi frattali possono ottenersi da sistemi dinamici nel campo complesso.

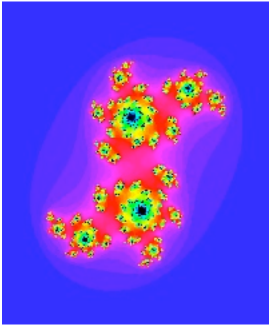
$$\begin{cases} z_{n+1} = z_n^2 + c \\ z_0 \in \mathbf{C} \end{cases} \tag{1}$$

dove $c \in \mathbf{C}$ è un parametro.

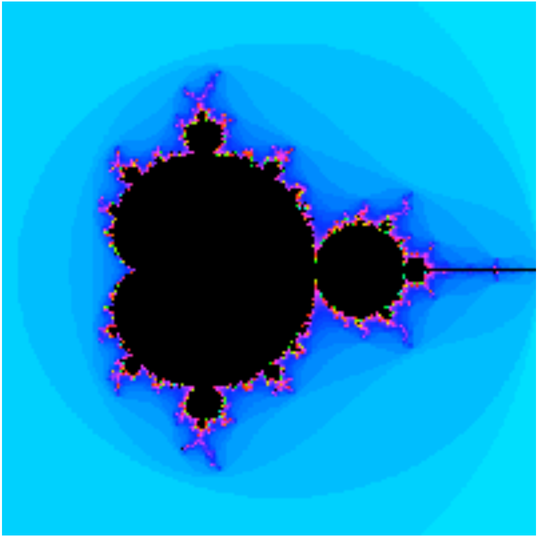
(a) Caso $c = 0$: esiste un solo punto limite $z = 0$, che è attrattivo partendo da punti interni al disco unitario.
La circonferenza unitaria è un insieme invariante, mentre i punti esterni al disco unitario divergono andando all'infinito. In particolare, l'insieme dei punti z_0 la cui dinamica resta limitata coincide col disco unitario chiuso.

(b) Caso $c \neq 0$: la successione (1) può dar luogo a dinamiche caotiche descritte da insiemi frattali.
Anche qui il piano complesso si divide in due regioni complementari: una in cui la successione rimane confinata e un'altra da cui si allontana per sempre. La frontiera che separa queste due regioni assume le forme frattali dell'insieme di Julia (un matematico francese).





Anche il famoso insieme di Mandelbrot si può definire attraverso i sistemi dinamici complessi: in particolare è costituito dai valori $c \in \mathbf{C}$ per cui la dinamica (1) partente da $z_0 = 0$ resta limitata.



La mappa logistica è ovviamente solo un possibile spunto per parlare del caos; i modelli di crescita discreti sono spesso più complicati dei modelli continui. Una buona scusa per passare... dal discreto al continuo !!

Alcuni esempi di modelli continui di crescita:

1. Modello logistico continuo (ottimo per l'integrazione delle funzioni razionali):

$y' = r\,y(1 - \frac{y}{K})$ (modello di Verhulst)
$y' = r\,y(1 - \frac{y}{K})(y - A)$ (correzione con effetto di Allee, 1931)

2. Un modello di crescita dei pesci (L =lunghezza del pesce)

$$\begin{cases} L'(t) = r(K - L(t)) \\ L(0) = 0 \end{cases} \qquad \Rightarrow L(t) = K(1 - e^{-r\,t}).$$

3. Un modello di crescita degli alberi (H =altezza dell'albero)

$$H'(t) = \frac{k}{t^2} H$$

$\Rightarrow H(t) = H_\infty \, e^{-\frac{k}{t}}$.

Quali differenze notiamo in questi due modelli ? Insegniamo ai ragazzi come leggere i grafici, come interpretare i parametri, etc....