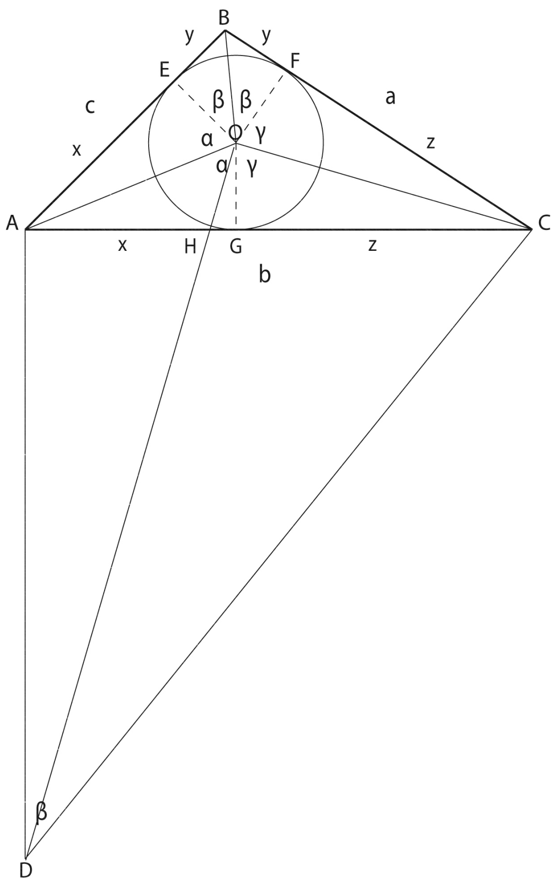
5. Geometria sintetica e geometria analitica

5.1 La potenza dei metodi sintetici

Oggi lo studio della geometria è presto dirottato su metodi analitici e si dà spesso la sensazione che con i metodi sintetici si possano ottenere solo risultati elementari. Può essere quindi utile analizzare alcune dimostrazioni puramente sintetiche, risalenti a periodi diversi, che mostrano come il metodo sintetico usato con intelligenza possa essere ben più versatile e potente di quanto appaia dagli attuali programmi scolastici.

5.1.1 La formula di Erone

Il primo risultato è, per così dire, interno alla geometria e in genere è oggi ottenuto con metodi trigonometrici. Si tratta della cosidetta "formula di Erone", che nonostante il suo nome (dovuto alla circostanza di essere stata tramandata da Erone), è probabile che risalga ad Archimede, come testimonia il matematico arabo al Biruni (973-1048)[1].



Voglio calcolare l'area di un triangolo ABC del quale conosco la lunghezza dei lati: a, b, c.

Considero il cerchio inscritto di centro O e traccio le congiungenti di O ai vertici A, B, C e le perpendicolari ai lati OE, OF, OG.
In questo modo divido il triangolo in 6 triangoli più piccoli, uguali due a due.
Avrò allora che il semiperimetro p sarà:

$p = (a + b + c) /2 = x + y + z$

Se chiamo r il raggio del cerchio inscritto, avrò che l'area S sarà:

$S = pr$

Per trovare r si compie un passaggio sorprendente nella dimostrazione. Si considera infatti:

$$S^2 = p^2r^2 \qquad (1)$$

Bisogna ricordare che gli enti considerati nelle dimostrazioni greche sono sempre di tipo geometrico. Considerare allora il quadrato di un'area significa operare con un oggetto a 4 dimensioni. Un altro modo di vedere questo passaggio, più vicino alla prassi antica, è quello di considerare S come medio proporzionale tra due quadrati.

Traccio da O l'ortogonale al segmento OC che incontra il lato AC nel punto H e la perpendicolare al lato AC condotta nel punto A nel punto D. Avrò

---

[1] Matematico, filosofo e scienziato persiano, si occupò di geografia matematica.
[2] René Descartes (1596-1650) filosofo e matematico, influenzò fortemente gli sviluppi degli studi moderni.

$r^2 = HG * GC = HG * z$ (2)

$AH/HG = (x – HG) /HG = x/HG – 1$

I triangoli ADH e HOG sono simili. Allora

$x/HG – 1 = AH/HG = AD/OG = AD/OE$ (3)

poiché OG e OE sono raggi dello stesso cerchio.

Il passo successivo della dimostrazione (tutt'altro che banale!) consiste nel notare che gli angoli ADC e EOB sono eguali. Poiché infatti i triangoli DAC e DOC sono entrambi rettangoli, i punti A e O sono punti della semicirconferenza di diametro DC. Il quadrilatero DAOC è quindi iscrivibile in un cerchio ed ha perciò angoli opposti supplementari. L'angolo ADC è quindi supplementare all'angolo AOC. D'altra parte, considerando i sei triangoli eguali a coppie in cui avevamo diviso il triangolo ABC si vede facilmente che l'angolo AOC, essendo eguale a $\alpha+\gamma$, è supplementare a β. L'angolo ADC è pertanto eguale a β, ossia a EOB.

I triangoli (rettangoli) DAC e EBO sono quindi simili e si ha:

$AD/OE = AC/EB = (x+z) /y$

Sostituendo l'ultima eguaglianza nella (3) si ha:

$x/HG = 1 + (x+z)/y = (x+y+z) /y$

$HG = xy/(x+y+z)$

Usando le (1) e (2) si ha infine:

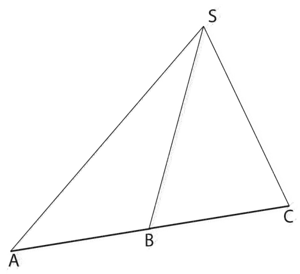
$S^2 = (x+y+z)xyz$

Da cui si ricava immediatamente l'usuale "formula di Erone".

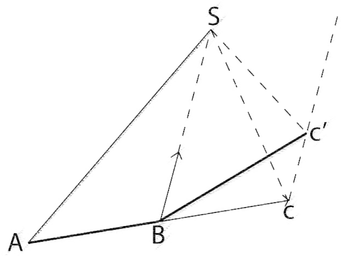
Abbiamo qui un esempio molto raffinato di dimostrazione di pura geometria sintetica. Il metodo con cui il risultato è raggiunto, attraverso vie complesse che non si capisce come siano state immaginate, è del tutto coerente con l'attribuziuone a Archimede. È anche sorprendente come dall'apparente asimmetria iniziale, si arrivi a una formula simmetrica.
Una dimostrazione del teorema, ma applicata a un triangolo "topico" i cui valori danno tutti risultati interi, si trova in Piero della Francesca ma è condotta con metodi algebrici e non puramente geometrici.

5.1.2 Anche Newton usa la geometria euclidea

La seconda dimostrazione riguarda la meccanica. Si tratta della dimostrazione newtoniana della II legge di Keplero, secondo la quale il moto dei pianeti spazza aree uguali in tempi uguali. Si basa sul principio di inerzia e sul criterio euclideo di eguaglianza dei triangoli che hanno stesse base e altezza.
Supponiamo di avere un punto materiale P che si muove, soggetto a una forza diretta verso S. Le aree descritte dalla traiettoria sono uguali in tempi uguali. La dimostrazione si presta bene anche ad essere esposta nelle scuole secondarie.



Newton parte dal caso particolare in cui la forza applicata a P è nulla.
Considerando i moti (rettilinei uniformi) compiuti in due intervalli di tempo consecutivi ed eguali Δt, e i relativi spostamenti AB e BC, vedo subito che i triangoli ABS e BCS sono "uguali" (nel senso euclideo del termine, ossia equivalenti), poiché hanno la stessa base e la stessa altezza.



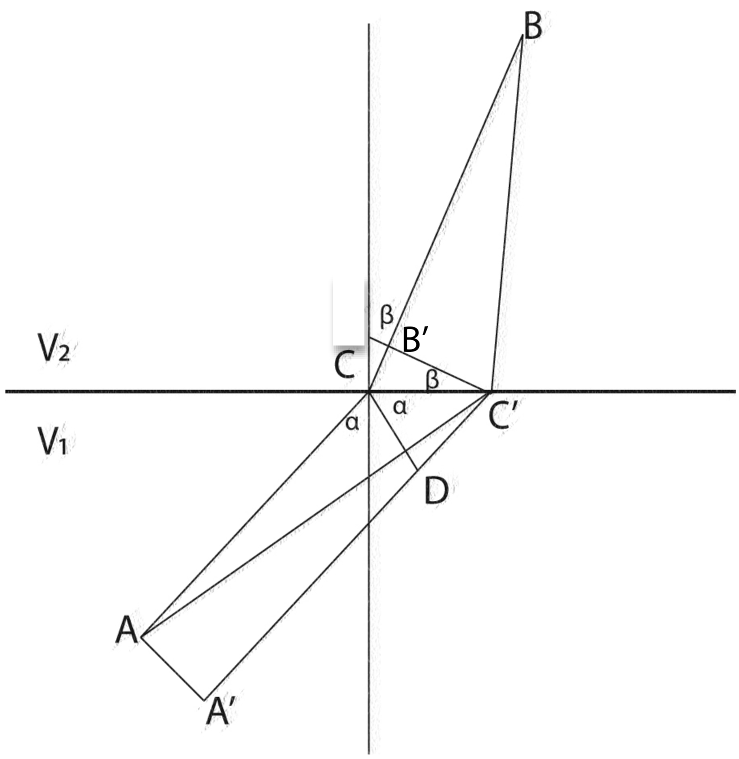
Applico ora una forza e suppongo che il moto di P sia rettilineo uniforme da A a B, ma in B subisca una percossa verso S. Compongo il tratto BC con lo spostamento verso S dovuto alla percossa usando la regola del parallelogramma. BCS e BC'S sono uguali tra loro e quindi anche a ABS. Con un passaggio al limite, ottengo la conservazionbe delle aree in un moto continuo sotto una forza centrale.

In questo modo si arriva a una dimostrazione intuitiva della conservazione delle aree.

5.1.3 Huygens e la legge di rifrazione

L'ultimo esempio è tratto dall'ottica, ma si tratta della dimostrazione "moderna" di Huygens della legge di rifrazione attraverso un principio di minimo.

Un raggio di luce diretto da A a B passa da un primo mezzo con velocità V_1 a un secondo dove ha velocità V_2 rompendosi in C.Voglio dimostrare che la legge dei seni (secondo la quale il rapporto tra i seni dell'angolo di incidenza e quello di rifrazione è uguale a quello tra le velocità) può essere dedotta dal principio del minimo cammino ottico, ossia imponendo che la luce scelga il percorso che le consente di arrivare nel tempo minimo. Supponiamo allora che il raggio si rompa in C', devo dimostrare che:



$AC'/V_1 + C'B/V_2 > AC/V_1 + BC/V_2$

Da C' traccio la parallela ad AC e da A conduco la perpendicolare ad AC. Da C' traccio poi la perpendicolare a CB.

AC' è l'ipotenusa del triangolo rettangolo AA'C'; è quindi:
AC' > A'C'

Analogamente, considerando il triangolo rettangolo BB'C', ho che:

BC'>BB'

Per dimostrare la nostra diseguaglianza è allora sufficiente provare che:

$A'C'/V_1 + B'B/V_2 \geq AC/V_1 + BC/V_2$

In particolare è condizione sufficiente l'eguaglianza

$A'C'/V_1 + B'B/V_2 = AC/V_1 + BC/V_2$

Ovvero: $DC'/V_1 = B'C/V_2$ o anche: $V_1/V_2 = DC'/B'C$

Ma $DC' = CC' \text{ sen } \alpha$ e $B'C = CC' \text{ sen } \beta$

Semplificando, ottengo il rapporto sen α / sen β

Le derivate, che di solito sono usate nel dedurre la legge di rifrazione dal principio del minimo cammino ottico, non sono quindi necessarie, né sono state usate nella dimostrazione originaria.

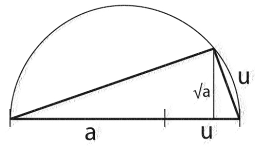
5.2 Dalla geometria sintetica alla geometria analitica

5.2.1 Le coordinate

Nel '600, come abbiamo visto dall'ultima dimostrazione, si faceva ancora uso della geometria sintetica. La geometria analitica soppianta quella sintetica solo più tardi.
Come spesso accade, è anche qui necessario sfatare alcuni miti: le coordinate, che sono considerate una conquista moderna, erano in realtà usate sin dall'antichità. Non a caso, i termini "ascissa" e "ordinata" derivano dai calchi latini dei termini greci usati da Apollonio. Tolomeo usa, nella *Geografia*, coordinate sferiche e, nelle mappe regionali, anche piane ortogonali, ben prima di Cartesio.
Nel 1445 circa l'architetto e umanista Leon Battista Alberti (1404-1472), nella sua *Descriptio urbis Romae*, individua i punti notevoli della città attraverso coordinate polari omogenee. Introduce una coordinata angolare e una seconda definita come il rapporto tra l'attuale coordinata radiale e il raggio del cerchio scelto per contenere la mappa. In questo modo le coordinatre non dipendono dalla scelta della scala in cui realizzare la carta.
Bartolomeo Eustachi (morto nel 1574) era un medico, colui che ha dato il nome alla Tromba d'Eustachio. Come molti medici contemporanei aveva il problema di introdurre nelle sue tavole anatomiche i nomi degli organi senza coprirne le illustrazioni. Egli sceglie allora di graduare i lati delle figure e accanto al nome di ogni organo indica le sue coordinate nell'illustrazione.

5.2.2 Metodi geometrici e metodi numerici

Ma allora qual è la novità della geometria cartesiana? La vera novità consiste nell'inversione del rapporto tra metodi geometrici e algebrici. Nell'antichità la soluzione di problemi algebrici si trovava attraverso metodi geometrici (per esempio il disegno accanto mostra un'estrazione di radice quadrata effettuata con riga e compasso).



A partire da Cartesio[2], si invertono completamente i rapporti tra geometria e metodi numerici. Per comprendere i motivi di questo passaggio, è utile riflettere sul fatto che ogni epoca fa uso degli strumenti più comodi e utili. In quel periodo si assiste a un salto di qualità nel calcolo numerico: risale al 1614 la prima pubblicazione delle tavole dei logaritmi di Nepero. In sostanza, le tavole dei logaritmi contengono tutti i calcoli possibili fatti a priori. C'è una motivazione economica e tecnologica fortissima che spinge verso questa innovazione: non a caso, già nel 1615, si ha notizia dell'uso dei logaritmi in un cantiere navale.
Ci si può allora chiedere perché l'antichità non abbia conosciuto le tavole numeriche. Il fatto è che esse sono strettamente legate all'uso della stampa. Infatti i possibili errori tramandati dai copisti avrebbero reso in breve tempo le tavole inutilizzabili. Non si tratta, quindi, di un problema di notazioni: il sistema numerico greco, seppur composito (si usavano lettere per i numeri e metodi posizionali in base 60 nei calcoli astronomici) era sintetico e si sarebbe potuto prestare. Non è nemmeno vero che i greci aborrissero le approssimazioni: nei loro testi si trovano sistematicamente stime dall'alto e dal basso di quantità calcolate approssimativamente.
Ma sappiamo che l'idea della stampa è antichissima e ha origine nel sistema dei sigilli mesopotamici. Perché non si è sviluppata? Sicuramente c'è un problema di "pubblico": la stampa fu resa possibile dall'allargamento del mercato degli acquirenti di libri. Questi fattori di scala sono essenziali per comprendere la storia della scienza.
Lo sviluppo dei metodi algebrici da parte degli arabi è in parte frutto di un'eredità più antica. Le differenze sono anche legate agli strumenti materiali di scrittura: nel sistema mesopotamico basato sull'incisione i disegni sono certamente più difficili. L'Islam occupa la mesopotamia ed eredita la tradizione dei metodi numerici. Si può dire che si approprino di metodi "digitali" contro la matematica "analogica" dei greci. Come è noto, le cosiddette cifre "arabe" sono in realtà di origine indiana e, prima ancora, mesopotamica (il metodo posizionale vi era già sviluppato).
Dalla geometria sintetica si svilupperà comunque la geometria proiettiva. Furono soprattutto gli artisti rinascimentali a favorire questo sviluppo, seguiti nel '600 dal matematico francese Girard Desargues (1591-1661). In Italia si mantenne una forte tradizione geometrica derivata proprio dalla diffusione delle botteghe degli artisti, che furono centri fondamentali per tutta la scienza: anatomia, botanica, meccanica. Per la rifondazione della scienza fu essenziale l'incontro tra il recupero delle opere antiche e le conoscenze tramandate nelle botteghe di artisti e artigiani.

5.2.2 Una parentesi sui logaritmi

I primi logaritmi introdotti sono quelli naturali in base e; quelli decimali saranno usati solo successivamente. L'idea è che approssimando tutti i numeri con potenze con la stessa base i calcoli si semplificano. Si tratta di un'idea antica, rintracciabile già nell'*Arenario* di Archimede. Per poter rappresentare la maggior quantità possibile di numeri in questo modo, la base deve essere un numero vicinissimo a 1. Con questo sistema, è possibile ridurre le moltiplicazioni a somme, le divisioni a sottrazioni, l'elevamento a potenza a prodotto e l'estrazione di radice ennesima a divisione per n.

Parto da $1 + 1/N$ con N molto grande. Rappresentando tutti i numeri come potenze di da $1 + 1/N$ mi accorgo che gli esponenti sono proporzionali a N. Mi conviene quindi fattorizzare N scrivendo:

$a = (1 + 1/N)^{Nx}$

[2] René Descartes (1596-1650) filosofo e matematico, influenzò fortemente gli sviluppi degli studi moderni. L'uso del piano cartesiano per coordinare studi geometrici e algebrici risale, nelle sue opere, al 1637.

Per N molto grande x è in pratica il logaritmo naturale di a.

In questo modo si capisce la scelta della base operata da Nepero[3]. Ma sembra che i logaritmi fossero stati inventati originariamente dai banchieri genovesi. Oggi i logaritmi sono sempre meno importanti perché sono stati scalzati dal calcolo automatico. Sono comunque interessanti da studiare, proprio perché attualmente stiamo vivendo un cambiamento analogo a quello determinato dalla loro introduzione. Il computer cambia anche il concetto di “soluzione”. Una soluzione esplicita era tradizionalmente quella che mi consentiva di poter leggere il risultato su tavole numeriche. Ma se utilizzo il computer, questa definizione non ha più alcun senso e la differenza tra metodi espliciti e impliciti viene a cadere..

5.2.3 Cosa si guadagna e cosa si perde

Un esempio del passaggio dalla geometria sintetica a quella analitica si trova nella voce di Wikipedia dedicata al teorema di Pitagora. Tra le altre, è presentata una dimostrazione puramente algebrica: un vero assurdo, visto che il teorema è vero solo in geometria euclidea.
Consideriamo un arbitrario numero complesso:

$z = a + ib = ce^{i\varphi}$

Allora il complesso coniugato di z è:

$\bar{z} = a - ib = ce^{-i\varphi}$

Moltiplicando membro a membro, si ha:

$c^2 = z\bar{z} = a^2 + b^2$

Poiché a e b sono le lunghezze dei cateti di un triangolo rettangolo la cui ipotrenusa è lunga a, sembra che abbiamo dimostrato il teorerma di Pitagora.
In realtà si tratta solo di una dimostrazione apparente, poiché il risultato è supposto implicitamente nell'uso dell'identità $e^{i\varphi} * e^{-i\varphi} = 1$. Usando tale identità in realtà sto dicendo che $\cos^2\vartheta + \mathrm{sen}^2\vartheta = 1$, cioè il teorema di Pitagora! Il ragionamento è chiuso nel formalismo e questo evidenzia bene la differenza tra metodi sintetici e analitici.

Si può dire che usare solo metodi analitici porta a risultati più rapidi ma impliciti. Enriques distingueva tra pensiero vivo e pensiero morto: bisogna essere in grado di tornare al pensiero vivo. Naturalmente l’uso dei metodi analitici consente di andare più avanti, tuttavia è necessario essere in grado di aprire le “scatole” del ragionamento sintetico che sono nascoste nei formalismi.
Oggi la matematica – come del resto tutta la cultura – è fatta in gran parte di “mattoncini” preconfezionati[4]. Un autore antico come Archimede era in grado di partire dai postulati e arrivare fino alla costruzione di una nave; la conoscenza moderna è invece

[3] John Napier (1550-1617), fu un matematico, astronomo e fisico scozzese. Nel 1614 introdusse i logaritmi naturali nella sua *Mirifici logarithmorum canonis descriptio* (descrizione della regola meravigliosa dei logaritmi). Nella stessa opera compaiono le prime tavole numeriche.

[4] Su questo tema vedi Lucio Russo, *La cultura componibile – Dalla frammentazione alla disgregazione del sapere*, Napoli, Liguori, 2008.

parcellizzata e si è persa anche la consapevolezza delle connessioni. È importante recuperarle soprattutto nella didattica, il cui scopo non è quello di raggiungere un risultato scientifico originale ma di formare i giovani. L'insegnamento specialistico è demandato all'università, mentre è fondamentale la base che si costruisce negli anni del liceo.
La domanda "a cosa serve la matematica?" può essere utile per fare cultura, purché la si interpreti non in senso meramente utilitaristico ma guardando alle motivazioni che, storicamente, hanno spinto i progressi della disciplina. Capire la storia della matematica significa anche capirne l'utilità, il ruolo svolto in campo culturale, sociale e tecnologico, le applicazioni.
È chiaro, poi, che i metodi matematici sono fondamentali per imparare ad argomentare e per risolvere problemi. E anche sul piano della logica e del ragionamento diventa importante recuperare la geometria sintetica, poiché la geometria analitica fa perdere qualcosa.