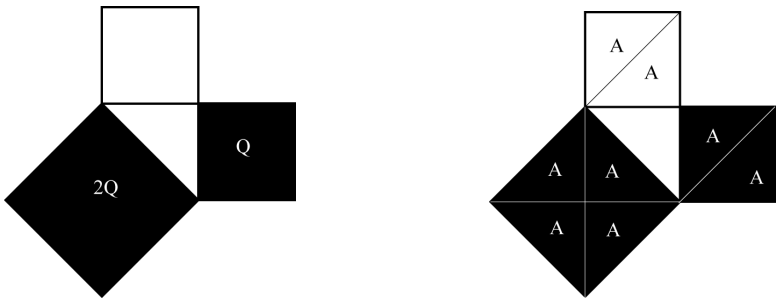
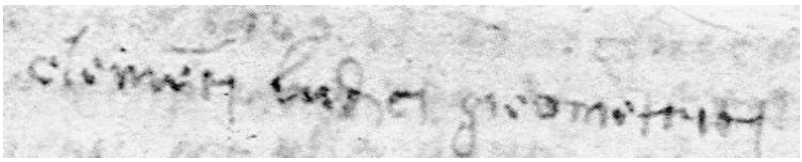
N. 4
I ludi geometrici di Leonardo da Vinci
Un gioco per avvicinarsi al concetto di area

franco ghione, daniele pasquazi

Tra i molteplici interessi scientifici di Leonardo non dobbiamo dimenticare la matematica. In Matematica Leonardo ha affrontato i problemi più difficili come la duplicazione del cubo e la quadratura del cerchio. Facilmente possiamo costruire un quadrato che abbia area doppia di un dato quadrato: basterà utilizzare il teorema di Pitagora applicato a un triangolo rettangolo isoscele. I quadrati costruiti sui due cateti sono uguali e quindi il quadrato costruito sull'ipotenusa è la somma di due quadrati uguali. Cosa che è peraltro evidente contando i mezzi quadrati.



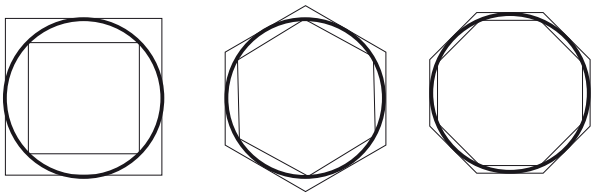
Per Leonardo doveva essere inammissibile di non saper fare una costruzione analoga per i cubi, non riuscire cioè a costruire un cubo il cui volume fosse il doppio di quello di un dato cubo. Tanto più che Leonardo riusciva facilmente a costruire per ogni figura un'altra, a lei simile, di area doppia e aveva anche scoperto come costruire, per ogni figura, un'altra, a lei simile, di area tripla, quadrupla o come si voglia. Queste costruzioni affascinavano l'animo artistico di Leonardo come un gioco perché permettevano di ideare infiniti tipi di decorazioni, ricche di simmetrie e bellezza, per le quali diventava anche possibile calcolarne l'area. In questo quaderno riproponiamo questi "ludi" riprendendo un'idea che Leonardo lasciò cadere: quella di scrivere un libro che aveva in mente di intitolare[1]:



Elementi ludici geometrici

Calcolare l'area di una figura poligonale può farsi, teoricamente, dividendo la figura i tanti triangoli e sommando le aree dei diversi triangoli che compongono la figura, ma per le figure con un contorno curvo questo metodo diventa impraticabile. La prima figura curva che possiamo tracciare facilmente col compasso è la circonferenza e l'area da essa circoscritta viene calcolata con una discreta precisione per la prima volta da Archimede. Archimede, per fare questo, ha l'audacia di inscrivere nel cerchio un poligono regolare di 96 lati, di circoscriverne un altro di altrettanti lati e calcolare le aree di questi due poligoni sommando le aree dei 96 triangoli che li compongono!

[1] Codice Atlantico: folio 124 r



nella nostra figura siamo riusciti a inserire solo 8 lati!

La lunghezza della circonferenza risulterà così maggiore del perimetro del poligono inscritto e minore di quello circoscritto; ugualmente l'area del cerchio sarà maggiore dell'area del poligono inscritto e minore di quella del poligono circoscritto. Per la circonferenza ecco le parole soddisfatte di Archimede alla fine di questo suo lunghissimo calcolo:

La circonferenza di un cerchio è uguale al triplo del diametro, più una parte di questo minore di un settimo e maggiore dei suoi dieci settantunesimi.

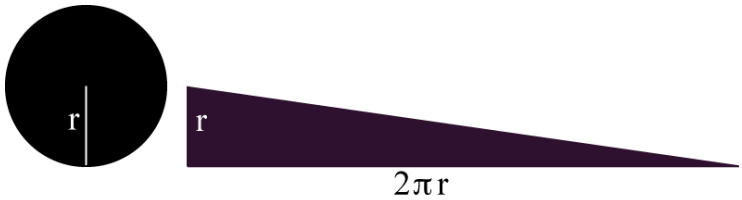
Ciò vuol dire che, se d è la lunghezza del diametro della circonferenza, la sua lunghezza C è limitata da questi numeri

$$3d + \frac{10}{71}d < C < 3d + \frac{1}{7}d$$

Il numero esatto che esprime la lunghezza della circonferenza è πd. Il numero π è un numero molto misterioso, oggi, usando i calcolatori, siamo in grado di calcolarne moltissime cifre decimali ma non riusciremo mai a prevederle tutte. Usando il grande calcolo di Archimede, e scrivendo le frazioni da lui calcolate in forma decimale, possiamo dire con certezza che:

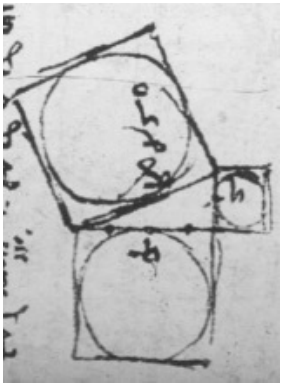
$$3{,}140 < \pi < 3{,}142$$

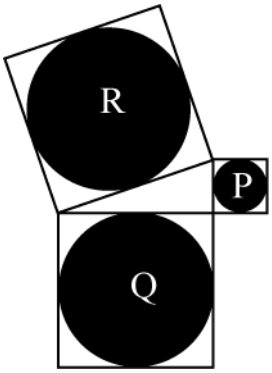
cioè che le prime due cifre decimali di π sono 1 e 4 e, in prima approssimazione, possiamo dire che la lunghezza della circonferenza di diametro d si ottiene moltiplicando d per 3,14. Per quel che riguarda l'area, Archimede scopre che l'area del cerchio è uguale a quella di un triangolo che ha come base la lunghezza della circonferenza e come altezza il suo raggio.



In definitiva l'area del cerchio di raggio r è uguale a πr^2.

Basta questo a Leonardo per costruire un cerchio la cui area sia il doppio di quella di un cerchio dato e, usando il teorema di Pitagora costruire un cerchio la cui area sia la somma delle aree di due cerchi dati: ecco l'idea di Leonardo





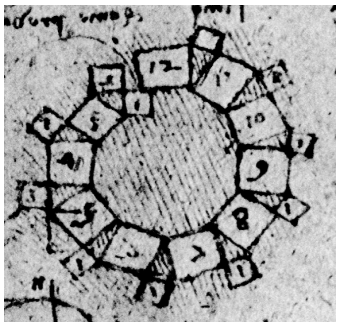
I diametri $2r_P$, $2r_Q$, $2r_R$, dei cerchi P e Q ed R sono i lati del triangolo rettangolo e quindi, applicando il teorema di Pitagora, troviamo:

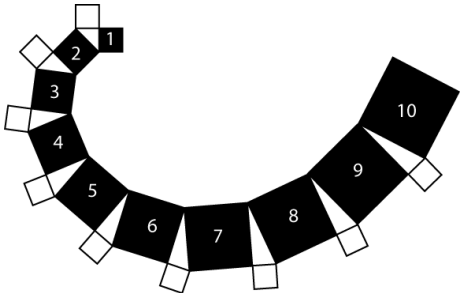
$$(2r_P)^2 + (2r_Q)^2 = (2r_R)^2 \qquad \text{cioè} \quad 4(r_P)^2 + 4(r_Q)^2 = 4(r_R)^2$$

e, dividendo per 4 e moltiplicando per π risulta:

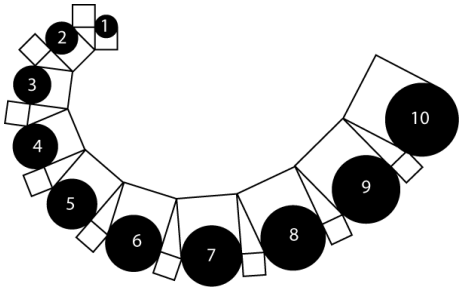
$$\pi(r_P)^2 + \pi(r_Q)^2 = \pi(r_R)^2$$

Quindi l'area del cerchio R è la somma delle aree del cerchio P e Q. Questo ci permette di costruire cerchi da area doppia tripla ecc. ma anche, con un po' di fantasia, di fare molte altre cose.

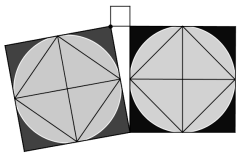


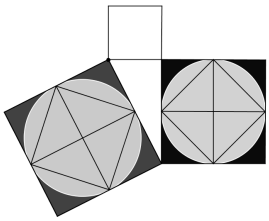


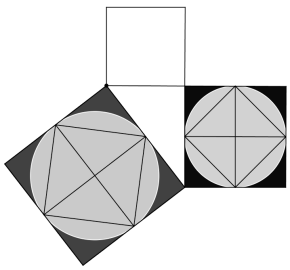
Con delle spirali possiamo costruire, a partire dal quadrato 1, quadrati di area doppia tripla quadrupla perché i triangoli rettangoli che via via costruiamo hanno un cateto di lato 1 e quindi a ogni passaggio aggiungiamo un quadrato di lato 1 aumentando di una unità l'area costruita sull'ipotenusa. Possiamo anche fare con la stessa logica la spirale con i cerchi costruendo in questo modo un cerchio di area doppia, tripla ecc.

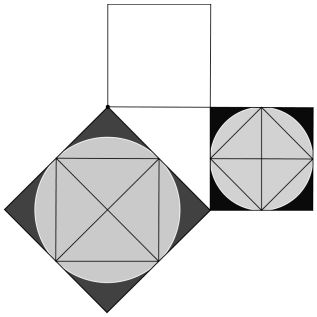


La visione di Leonardo è al tempo stesso figurativa e dinamica. Per restituire questa dinamicità agli studenti potrebbe essere utile realizzare una animazione con geogebra che riproduca il movimento che genera la spirale e il raddoppio delle dimensioni di tutti gli oggetti che vengono via via ingranditi uniformemente.

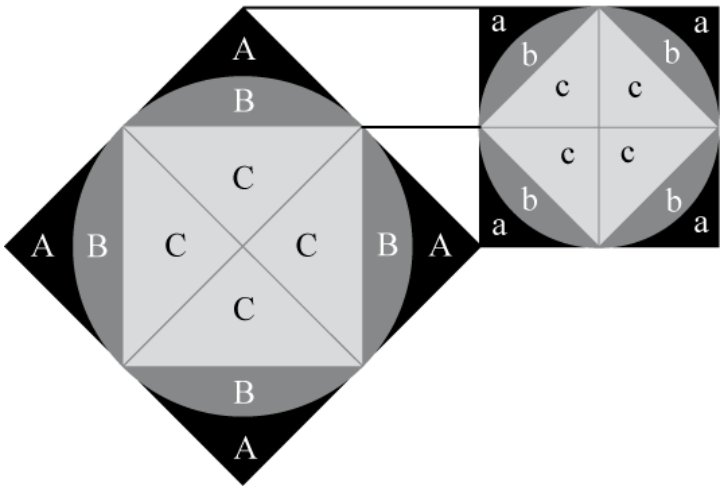








Alla fine della roto-dilatazione l'area del quadrato e di tutte le sue parti (il cerchio, i triangoli, le porzioni, gli interstizi) raddoppia.



Il quadrato piccolo è formato da 4a+4b+4c e sappiamo che il quadrato grande ha area doppia:

$$4A+4B+4C = 2(4a+4b+4c).$$

Il cerchio piccolo è formata da 4b+4c e sappiamo che il cerchio grande ha area doppia:

$$4B+4C = 2(4b+4c).$$

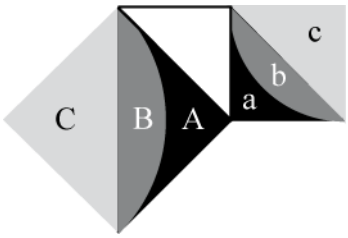
Sottraendo cose uguali a cose uguali otteniamo cose uguali:

$$[4A+4B+4C]-[4B+4C] = [2(4a+4b+4c)]-[2(4b+4c)]$$

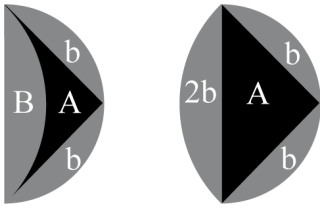
quindi

$$4A = 8a \quad \text{cioè} \quad A = 2a$$

cioè l'interstizio nero A ha area doppia dell'interstizio piccolo a.
Osserviamo anche che il quadrato A+B+C è il doppio del quadrato a+b+c



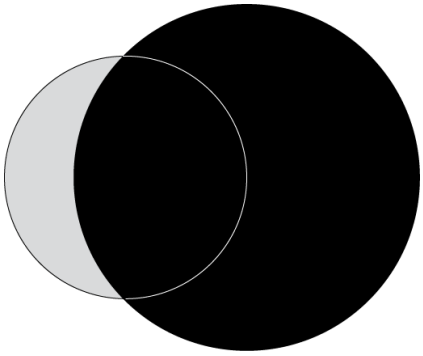
e dato che A=2a, C=2c ricaviamo che anche B=2b.
La figura B si chiama segmento circolare quadrato ma Leonardo e noi con lui la chiameremo una *porzione*. Osserviamo che la diagonale del quadrato piccolo è uguale al lato del quadrato grande e quindi le due porzioni dopo qualche spostamento possono mettersi nel modo seguente:

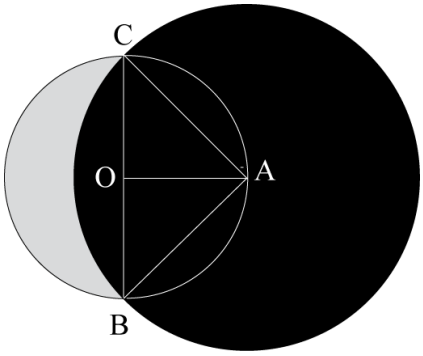


Guardando la figura di destra si vede che la porzione costruita sulla diagonale del triangolo rettangolo isoscele A è il doppio, come area, della porzione costruita sui due cateti o, dicendola alla Pitagora, *la porzione costruita sull'ipotenusa del triangolo rettangolo isoscele è la somma delle porzioni costruite sui cateti*. Naturalmente Leonardo sapeva bene che la cosa vale anche se il triangolo rettangolo non è isoscele. Ma in questo caso la dimostrazione è un po' più difficile.

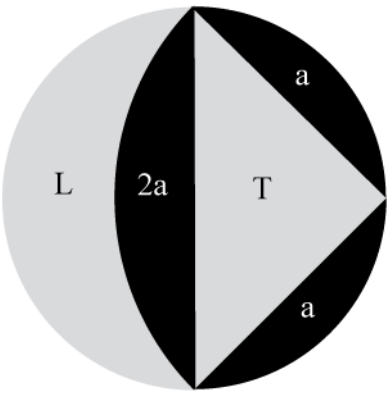
Le lunule

Le lunule sono state ideate da un seguace di Pitagora che si chiamava Ippocrate. Assomigliano alla luna quando se ne vede un quarto e per questo le ha chiamate lunule. La lunula che abbiamo disegnato in grigio, ha per definizione, come contorno due archi di circonferenza: uno di area doppia dell'altro.





La loro geometria non è difficile. Basta disegnare un triangolo rettangolo isoscele ABC, dividerlo in due parti uguali con il segmento OA e tracciare la circonferenza di centro A e raggio AB e la circonferenza di centro O e raggio OB.
Questa costruzione ci permette di calcolare visivamente l'area della lunula. Dividiamo il cerchio grigio in due parti uguali con il diametro verticale e confrontiamole.

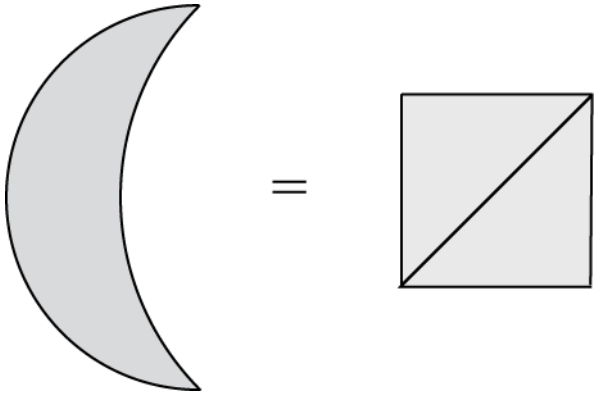


La parte sinistra è formata dalla lunula L e da una porzione la cui area è il doppio di quella delle due porzioni piccole di destra. Abbiamo quindi

$$L+2a=T+a+a$$

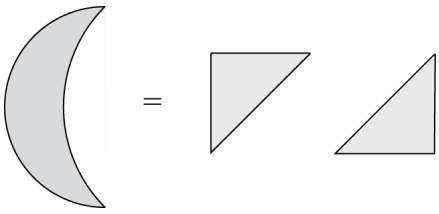
e quindi *l'area della lunula è uguale a quella del triangolo T*.

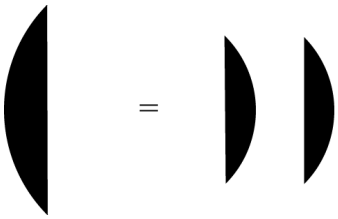
Questo risultato ha permesso a Ippocrate, per primo, di calcolare esattamente l'area di una superficie delimitata da due archi di circonferenza e di costruire con riga e compasso il quadrato con la stessa area della lunula:

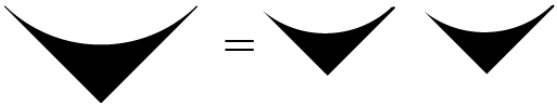


Leonardo, sicuramente affascinato da questo risultato, tenterà di trovare un modo per costruire con la riga e il compasso un quadrato con la stessa area di un dato cerchio. Questa ricerca impegnò il suo ingegno e la sua creatività in modo ossessivo. Nei suoi manoscritti troviamo migliaia di tentativi, di disegni di superfici con il contorno curvo per le quali riusciva a quadrare l'area senza tuttavia mai arrivare a quadrare il cerchio. Il problema era talmente difficile che alla fine i matematici hanno dimostrato non avere soluzione. Alcuni di questi disegni, oltre alla bellezza e all'uso che Leonardo ne ha fatto per decorare edifici, facciate, finestre, possono essere utili per familiarizzarsi col concetto di area di una superficie piana; un concetto molto riposto che si basa sulla possibilità di dividere la figura in tanti pezzi i quali ricomposti in altro modo danno luogo a una figura per la quale si sia in grado di calcolarne l'area. In questo laboratorio ne riproponiamo alcuni in forma di gioco.
Il gioco consiste nel comporre la figura iniziale proposta da Leonardo (qua ne proponiamo 12) con dei piccoli pezzi di plastica. Fatto questo possiamo sostituire un pezzo con altri della stessa area, fino ad arrivare a una figura semplice della quale sappiamo trovarne l'area.

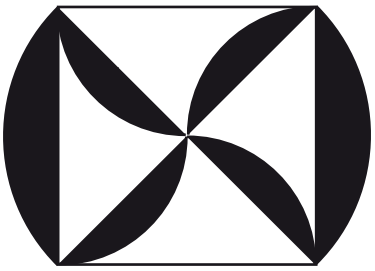
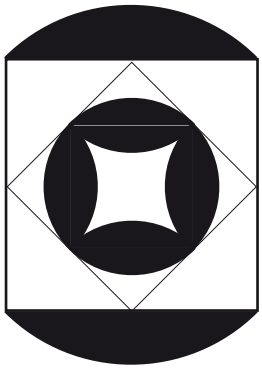
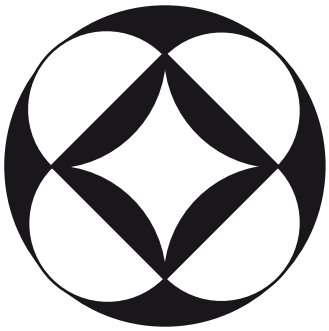
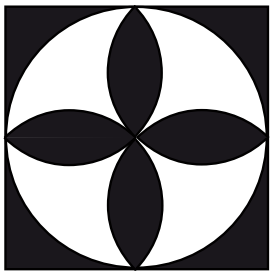
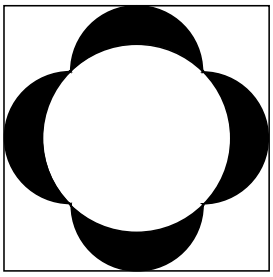
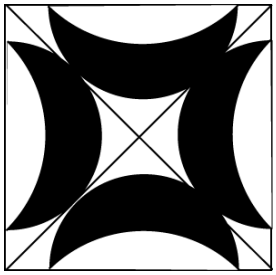
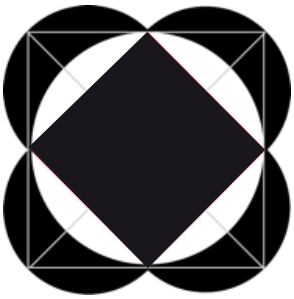
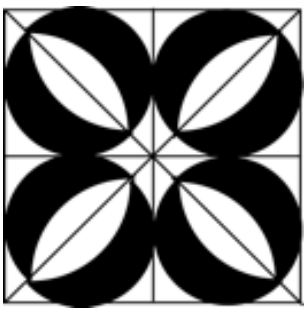
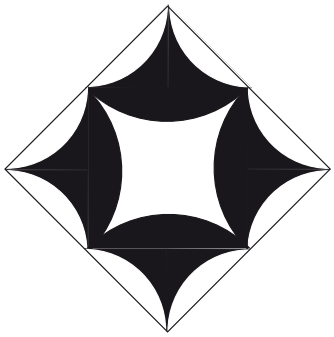
Ecco alcuni cambi possibili:







Ecco le figure che abbiamo scelto. In alcune di queste l'area della parte bianca è uguale a quella della parte nera rendendo la figura con una qualche sua misteriosa armonia.

Provate anche voi a formare figure come queste!