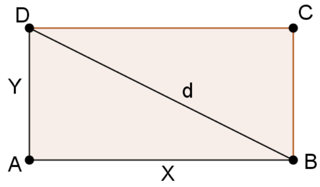
Tavola III.9
Soluzione

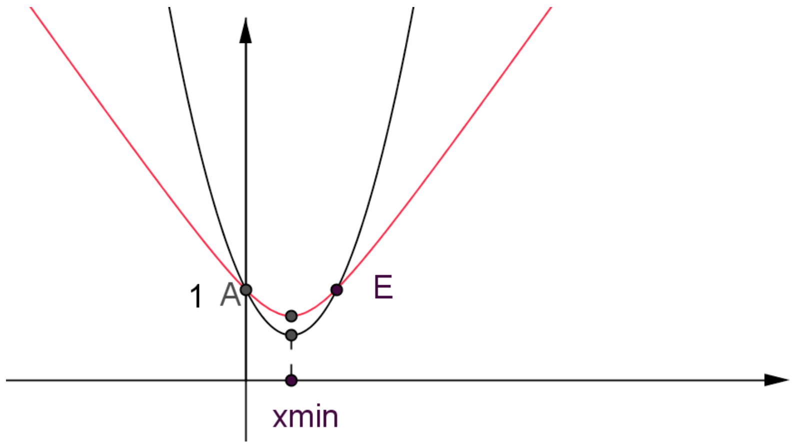
Siano x la base e y l'altezza di un rettangolo, si ha che il semiperimetro $p=x+y$ e quindi $y= p-x$, la diagonale è:



$$d = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + p^2 + x^2 - 2xp} = \sqrt{2x^2 - 2xp + p^2}$$

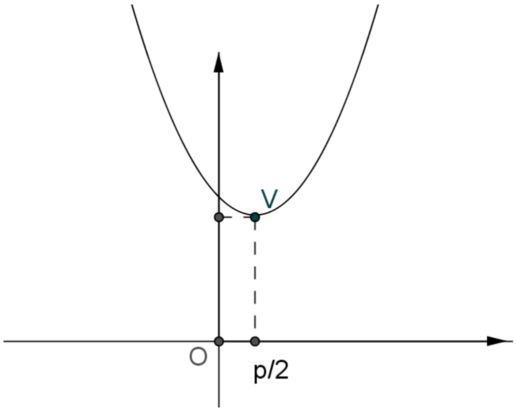
cioè, si ottiene una funzione irrazionale, definita su R e sempre positiva.
L'ascissa del minimo della funzione irrazionale coincide con quella della funzione radicando, infatti si può osservare che

$$\begin{array}{lll} se & 0 < \sqrt{f(x)} < 1 & \Rightarrow \quad 0 < f(x) < \sqrt{f(x)} \\ se & \sqrt{\mathrm{f(x)}} = 1 & \Rightarrow \quad \mathrm{f(x)} = 1 \\ \mathrm{se} & \sqrt{\mathrm{f(x)}} > 1 & \Rightarrow \quad 1 < \sqrt{\mathrm{f(x)}} < \mathrm{f(x)} \end{array}$$



Nel grafico vengono disegnate le funzioni d con p=1, cioè $y = \sqrt{2x^2 - 2x + 1}$ (in rosso) e la corrispondente funzione $y = x^2 - 2x + 1$ (in nero).

Il radicando della funzione $d = \sqrt{2x^2 - 2xp + p^2}$ rappresenta una parabola con la concavità verso l'alto, che ha il valore minimo nel vertice, cioè per $x = \frac{p}{2}$; per quanto visto sopra, anche la funzione d avrà il minimo con la stessa ascissa.



Poiché $y = p - x$ si ottiene dunque che anche $y = \frac{p}{2}$ e quindi nell'insieme dei rettangoli di perimetro costante il rettangolo di diagonale minima è il quadrato.