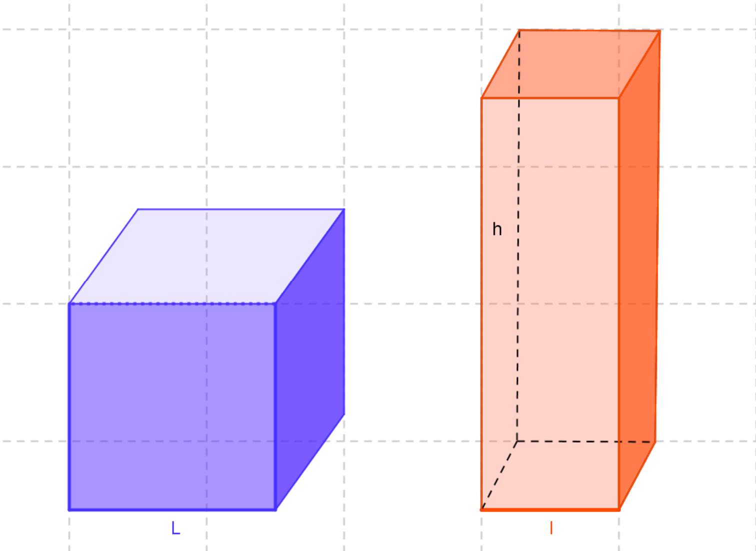
Teorema

Fra tutti i parallelepipedi, a base quadrata, di uguale area il cubo è quello che ha volume MASSIMO

<u>Dimostrazione</u>:

Si considerino

- il parallelepipedo P di base quadrata di lato l ed altezza h:
- il cubo C di spigolo L.



Poiché hanno la stessa area si deve avere:

$A_P=2*l^2+4*l*h$ e $A_C=6*L^2$ da cui $2*l^2 + 4*l*h = 6L^2$ quindi

$$h=\frac{3L^2 - l^2}{2l}$$

Il volume del parallelepipedo è : $V_P= l^2 * \frac{3*L^2-l^2}{2*l} = \frac{3*L^2*l-l^3}{2}$

Mentre il volume del cubo è: $V_C= L^3$

Vogliamo dimostrare che $V_C \geq V_P$ cioè che il volume del cubo è maggiore del volume di un qualunque parallelepipedo a base quadrata.

Dimostreremo che $V_C --- V_P \geq 0$ con l'uguaglianza valida nel caso in cui il parallelepipedo sia un cubo.

(1) $V_C --- V_P = \frac{2*L^3-3*L^2*l+l^3}{2} \geq 0$

Si consideri il polinomio $p^3(L)=\frac{2*L^3-3*L^2*l+l^3}{2}$ che rappresenta la (1). Si ha $p^3(l)=0$ ovvero l è uno zero del polinomio $p^3(L)=\frac{2*L^3-3*L^2*l+l^3}{2}$.

Per la regola di Ruffini il polinomio si può scomporre in

$$p^3(L)=\frac{2*L^3-3*L^2*l+l^3}{2} = {}^1\!/_2(L-l)*(2*L^2-l*L+l^2)$$

Il polinomio di II grado $p^2(L)=(2*L^2-l*L+l^2)$ ha $\Delta = 9*l^2$ e radici reali $L_1 = l$ e

$L_2 = -{}^l\!/_2$, quindi

V_C --- $V_P = \frac{2*L^3-3*L^2*l+l^3}{2} = 2*\frac{(L-l)^2*(L+{}^l\!/_2)}{2}$.

Dunque V_C --- V_P è una quantità positiva essendo prodotto di un quadrato e di una somma di misure di lati.

Infine V_C --- $V_P=0$ se e solo se $L=l$ ovvero se e solo se il parallelepipedo è un cubo; ciò in quanto $L=l$ implica $h=\frac{3L^2-l^2}{2l}=\frac{3l^2-l^2}{2l}=\frac{2l^2}{2l}=l=L$.