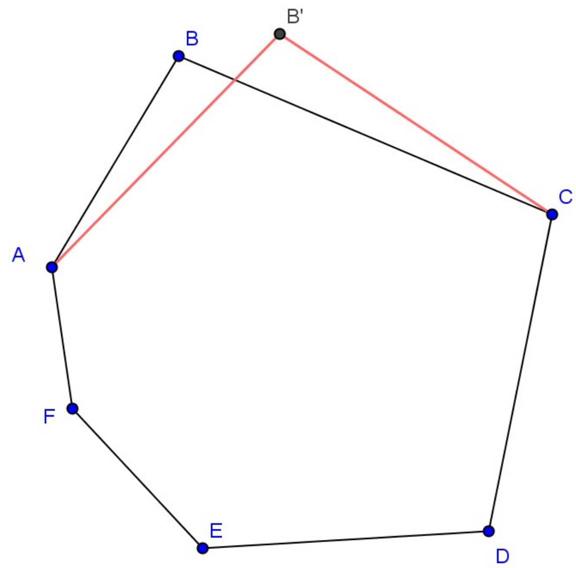
Teorema

Nella classe dei poligoni convessi isoperimetrici di n lati, se $\mathcal{P}$ è il poligono di area massima allora $\mathcal{P}$ è regolare.

Dimostrazione

Dimostriamo prima che $\mathcal{P}$ è **equilatero**.

Supponiamo per assurdo che $\mathcal{P}$, di area massima, abbia due lati consecutivi disuguali.
E' possibile costruire un nuovo poligono $\mathcal{P}'$, con lo stesso perimetro, di area maggiore.

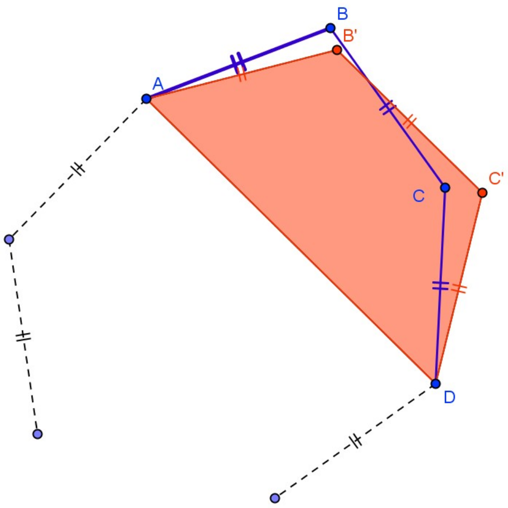


Si considerino i due lati AB, BC disuguali e consecutivi, si costruisca il triangolo isoscele AB'C isoperimetrico al triangolo ABC, per quanto precedentemente dimostrato il triangolo AB'C ha area maggiore di ABC. Quindi il poligono $\mathcal{P}'$ (AB'CDEF) ha area maggiore del poligono $\mathcal{P}$ in contrasto con l'ipotesi

Il poligono $\mathcal{P}$ è anche **equiangolo**.

Supponiamo per assurdo che $\mathcal{P}$, di area massima ed equilatero per la dimostrazione precedente , abbia due angoli consecutivi disuguali. A partire da tre lati consecutivi uguali è possibile costruire un nuovo poligono $\mathcal{P}'$ isoperimetrico, di area maggiore mantenendo costante la lunghezza di ogni lato.

Infatti vale il seguente teorema:
Fra tutti i quadrilateri isoperimetrici in cui un lato è fissato e gli altri tre sono uguali tra loro, ha area massima il trapezio isoscele. La dimostrazione è piuttosto laboriosa ed in questa trattazione si inserisce solo una verifica tramite un'animazione geogebra



Si considerino i tre lati AB, BC e CD uguali e consecutivi, si costruisca il trapezio isoscele AB'C'D isoperimetrico al trapezio ABCD , per quanto verificato tramite l'animazione il trapezio AB'C'D ha area maggiore di ABCD. Quindi il poligono $\mathcal{P}'$ ha area maggiore del poligono $\mathcal{P}$ in contrasto con l'ipotesi.