Problema duale

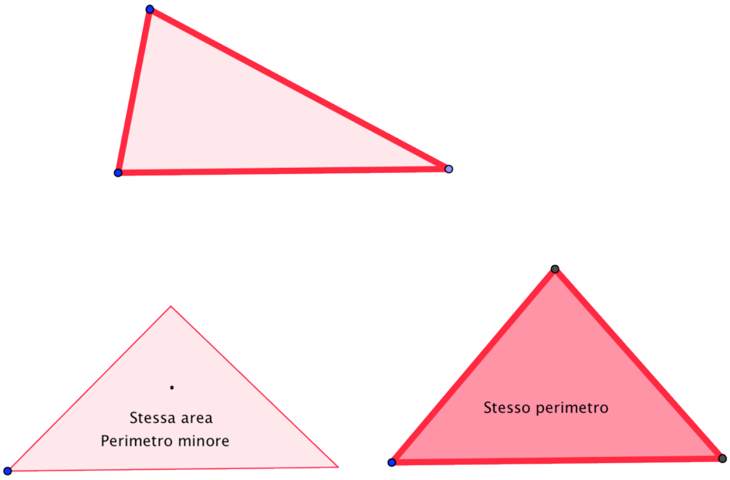
Per i triangoli isosceli di base d e perimetro P l'area è data da

$$A(P)=\frac{d}{2}\sqrt{\left(\frac{P-d}{2}\right)^2-\left(\frac{d}{2}\right)^2}=\frac{d}{4}\sqrt{P^2-2dP}$$

e quindi

$$A^2=\left(\frac{d}{4}\right)^2\left(P^2-2dP\right)$$

Questa equazione rappresenta una iperbole e per $P \geq 2d$ e $A>0$ la *funzione A(P) è crescente*
Possiamo quindi dimostrare che tra tutti i triangoli isoperimetrici di data base quello isoscele ha area massima utilizzando lo stesso metodo dei rettangoli: sapendo che tra tutti i triangoli di data base e di dato perimetro quello isoscele ha a perimetro minimo, possiamo dimostrare che tra tutti i triangoli di data base e di dato perimetro quello isoscele ha area massima e viceversa.



Consideriamo un triangolo di perimetro P vogliamo dimostrare che quello di area massima è isoscele. Sia A_0 l'area del dato triangolo di perimetro P, il triangolo isoscele di area A_0 ha perimetro $P_0 \leq P$ perché fissata l'area l'isoscele ha il perimetro più piccolo. Il triangolo isoscele di perimetro P ha area A maggiore dell'area del triangolo isoscele di perimetro P perché A(P) è crescente. Ne segue che il triangolo perimetro P ha area A minore dell'area del triangolo isoscele di perimetro P.

Triangolo generico (A,P)
Triangolo isoscele (A,P_0) $P \geq P_0$ perché l'isoscele fissato A ha P più piccolo
Triangolo isoscele (A_0,P) $A_0 \geq A$ perchè sui triangoli isosceli A(P) è crescente,
Triangolo generico (A,P) ha area minore dell'isoscele (A_0,P)